Теория поля и ряды
Лекция 19

Типы векторных полей и дифференциальные операторы в криволинейных ортогональных координатах

Потенциальное поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в области D, называется ***потенциальным***, если оно является градиентом некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\vec{a} = \operatorname{grad} u.$$

В этом случае скалярное поле $u(M)$ называется (***скалярным***) ***потенциалом*** векторного поля $\vec{a}(M)$.

Для потенциального векторного поля $\vec{a}$ имеем

$$\vec{a}\, d\vec{r} = a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz = u'_x\, dx + u'_y\, dy + u'_z\, dz = du$$

– полный дифференциал. Поэтому потенциал потенциального векторного поля $\vec{a}$ можно найти по следующей формуле:

$$u(M) = u(M_0) + \int_{M_0}^{M} \vec{a}\, d\vec{r},$$

где интеграл не зависит от пути.

Бесциркулярное и безвихревое векторное поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в области D, называется ***бесциркулярным***, если циркуляция этого поля по любому контуру L, лежащему в D, равна нулю:

$$\oint_L \vec{a}\, d\vec{r} = 0, \qquad \forall L \subset D.$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в области D, называется ***безвихревым***, если ротор этого поля в каждой точке области D равен нулевому вектору:

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \vec{0}, \qquad \forall M \in D.$$

Теорема: непрерывное векторное поле является потенциальным $\Leftrightarrow$ оно является бесциркуляционным.

Теорема: если непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ потенциальное, то оно безвихревое; если векторное поле $\vec{a}$ непрерывно дифференцируемое и безвихревое в поверхностно односвязной области D, то это поле потенциальное.

Теорема: у непрерывного потенциального векторного поля, нигде не обращающегося в нуль, в поверхностно односвязной области нет замкнутых векторных линий.

Пример на проверку потенциальности векторного поля и вычисление его потенциала

Пример: проверим потенциальность векторного поля

$$\vec{a}(x_1^3 + x_2x_3,\ \ x_2^3 + x_1x_3,\ \ x_3^3 + x_1x_2),$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ x_1^3 + x_2x_3 & x_2^3 + x_1x_3 & x_3^3 + x_1x_2 \end{vmatrix} = \vec{0},$$

следовательно, поле потенциальное;

найдём его потенциал

$$u = C + \int_{(0,0,0)}^{(x_1,x_2,x_3)} (x_1^3 + x_2x_3)\,dx_1 + (x_2^3 + x_1x_3)\,dx_2 + (x_3^3 + x_1x_2)\,dx_3 =$$

$$= C + \int_0^{x_1} x_1^3\,dx_1 + \int_0^{x_2} x_2^3\,dx_2 + \int_0^{x_3} (x_3^3 + x_1x_2)\,dx_3 = C + \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4}{4} + x_1x_2x_3.$$

Соленоидальное (бездивергентное) поле

Векторное поле $\vec{a}(M)$, заданное в области D, называется ***соленоидальным*** (***бездивергентным***), если дивергенция этого поля в каждой точке области D равна нулю:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0, \qquad \forall M \in D.$$

Векторное поле $\vec{b}$ называется ***векторным потенциалом*** векторного поля $\vec{a}$, если $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$.

Теорема: если для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ существует векторный потенциал $\vec{b}$, то это поле соленоидальное; если векторное поле $\vec{a}$ непрерывно дифференцируемое и соленоидальное в объёмно односвязной области D, то для этого поля существует векторный потенциал $\vec{b}$.

Все векторные линии соленоидального векторного поля либо замкнуты, либо упираются в границу области, либо уходят на бесконечность.

Теорема: поток через сечение векторной трубки у соленоидального поля постоянен.

Гармоническое (лапласово) векторное поле

Векторное поле $\vec{a}$ называется ***гармоническим*** (***лапласовым***), если оно одновременно потенциальное и соленоидальное:

$$\vec{a} = \operatorname{grad} u\,, \qquad \operatorname{div} \vec{a} = 0.$$

Для потенциала u гармонического векторного поля: $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$.

Вещественная функция $u(x, y, z)$ называется ***гармонической***, если она является решением уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0.$$

Теорема: непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ представимо в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{пот}} + \vec{a}_{\text{сол}}.$$

Доказательство: из математической физики известно, что уравнение Пуассона $\Delta u = \operatorname{div} \vec{a}$ всегда имеет решение $u(x, y, z)$, положим

$$\vec{a}_{\text{пот}} = \operatorname{grad} u \quad \text{и} \quad \vec{a}_{\text{сол}} = \vec{a} - \vec{a}_{\text{пот}},$$

тогда

$$\operatorname{div} \vec{a}_{\text{пот}} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = \operatorname{div} \vec{a} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{a}_{\text{сол}} = \operatorname{div} \vec{a} - \operatorname{div} \vec{a}_{\text{пот}} = 0 \ \square$$

Криволинейные координаты и коэффициенты Ламе́

Рассмотрим отображение $D_q \to D$, заданное функциями

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), \qquad i = 1, 2, 3,$$

с якобианом $J = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial q_1 & \partial x_1/\partial q_2 & \partial x_1/\partial q_3 \\ \partial x_2/\partial q_1 & \partial x_2/\partial q_2 & \partial x_2/\partial q_3 \\ \partial x_3/\partial q_1 & \partial x_3/\partial q_2 & \partial x_3/\partial q_3 \end{vmatrix} \neq 0, \ \ \forall (q_1, q_2, q_3) \in D_q.$

Если $(q_1, q_2, q_3) \to M(x_1, x_2, x_3)$, то упорядоченная тройка чисел (q_1, q_2, q_3) называется ***криволинейными координатами*** точки $M \in D$.

Векторы $\vec{r}\,'_{q_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial x_2}{\partial q_i}, \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)$, где $i = 1, 2, 3$, образуют базис.

Длины этих векторов называются ***коэффициентами Ламе*** криволинейной системы координат:

$$H_i = \left|\vec{r}\,'_{q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ортонормированный базис: $\vec{q}_i = \frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial x_2}{\partial q_i}, \frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right), \ i = 1, 2, 3.$

Условие ортогональности базисных векторов: $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0.$

Коэффициенты Ламе для цилиндрических и сферических координат

Для цилиндрических координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты Ламе: $H_r = 1,\ H_\varphi = r,\ H_z = 1.$

Ортонормир. базис: $\vec{q}_1(\cos\varphi, \sin\varphi, 0),\ \vec{q}_2(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ \vec{q}_3(0, 0, 1).$

Для сферических координат:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix}$$

Коэффициенты Ламе: $H_r = 1,\ H_\varphi = r\sin\theta,\ H_\theta = r.$

Ортонормир. базис: $\vec{q}_1(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\ \vec{q}_2(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),$
$\vec{q}_3(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta).$

Градиент в ортогональных криволинейных координатах

В ортогональных криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 скалярное поле является функцией $u(q_1, q_2, q_3) = u\big(x_1(q_1, q_2, q_3), x_2(q_1, q_2, q_3), x_3(q_1, q_2, q_3)\big)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial q_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_k} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \operatorname{grad} u \cdot H_k \vec{q}_k.$$

Координаты вектора $\operatorname{grad} u$ в ортонормированном базисе $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$ равны скалярным произведениям вектора $\operatorname{grad} u$ с базисными векторами $\operatorname{grad} u \cdot \vec{q}_k$, поэтому

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1},\ \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2},\ \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)$$

или

$$\operatorname{grad} u = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\vec{q}_i}{H_i}.$$

Дивергенция в ортогональных криволинейных координатах

Рассмотрим поток через элементарный 6-гранник с вершиной (q_{10}, q_{20}, q_{30}) и рёбрами $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$. Объём 6-гранника:

$$\iiint_{\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3} H_1 H_2 H_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3 = H_1 H_2 H_3 (q_{10} + \delta_1, q_{20} + \delta_2, q_{30} + \delta_3) \, \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Суммарный поток через грани $q_3 = q_{30}$ и $q_3 = q_{30} + \Delta q_3$:

$$\iint_{\Delta q_1 \Delta q_2} (a_3 H_1 H_2)(q_{10}, q_{20}, q_{30} + \Delta q_3) \, dq_1 \, dq_2 - \iint_{\Delta q_1 \Delta q_2} (a_3 H_1 H_2)(q_{10}, q_{20}, q_{30}) \, dq_1 \, dq_2 =$$

$$= \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} (q_{10} + \varepsilon_1, q_{20} + \varepsilon_2, q_{30} + \varepsilon_3) \, \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Аналогично для других граней.

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right).$$

Ротор в ортогональных криволинейных координатах

Для скалярных полей $u_i(q_1, q_2, q_3) = q_i$, $i = 1, 2, 3$, имеем:

$$\operatorname{grad} u_i = \frac{1}{H_i}\,\vec{q}_i.$$

Поэтому векторное поле $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ можно записать в виде:

$$\vec{a} = a_1\vec{q}_1 + a_2\vec{q}_2 + a_3\vec{q}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i H_i \operatorname{grad} u_i.$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \sum_{i=1}^{3}(a_i H_i \operatorname{rot}\operatorname{grad} u_i - \operatorname{grad} u_i \times \operatorname{grad} a_i H_i) = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\vec{q}_i}{H_i} \times \sum_{j=1}^{3}\frac{\vec{q}_j}{H_j}\,\frac{\partial(a_i H_i)}{\partial q_j}.$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{q}_1}{H_2 H_3} & \dfrac{\vec{q}_2}{H_1 H_3} & \dfrac{\vec{q}_3}{H_1 H_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}.$$

Лапласиан в ортогональных криволинейных координатах

Лапласиан получаем как дивергенцию градиента:

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}, \ \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}, \ \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right),$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right),$$

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u,$$

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right).$$