Теория поля и ряды
Лекция 20

Комплексные функции комплексной переменной

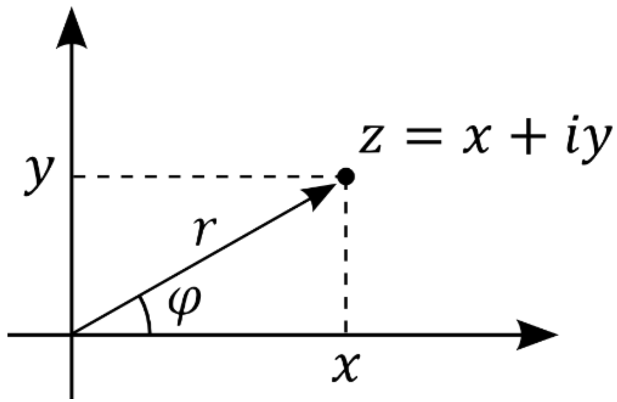
Комплексные числа

Множество комплексных чисел $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, где i – мнимая единица, $i^2 = -1$.

Формы записи комплексного числа z:

алгебраическая, тригонометрическая, экспоненциальная

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$



Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Вещественная часть $\operatorname{Re} z = x$

Мнимая часть $\operatorname{Im} z = y$

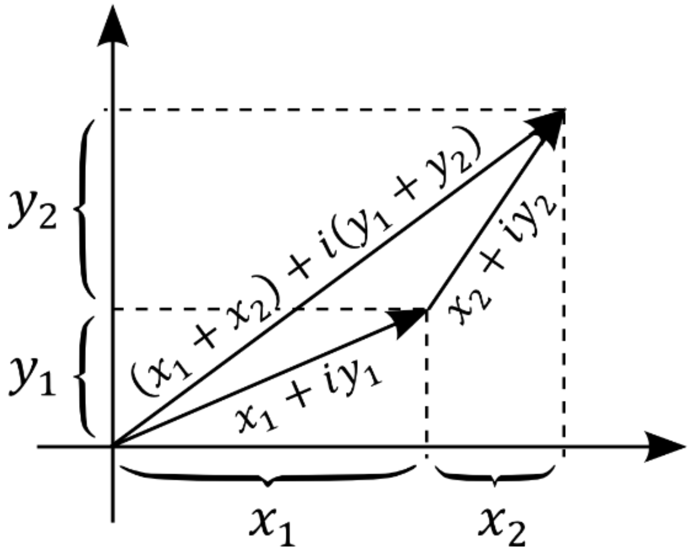
Модуль $|z| = r$

Множество всех значений аргумента $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Главное значение аргумента $\arg z = \varphi,\ \ -\pi < \arg z \le \pi$

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел

Сложение $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$



Вычитание $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Модуль разности $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2.

Умножение

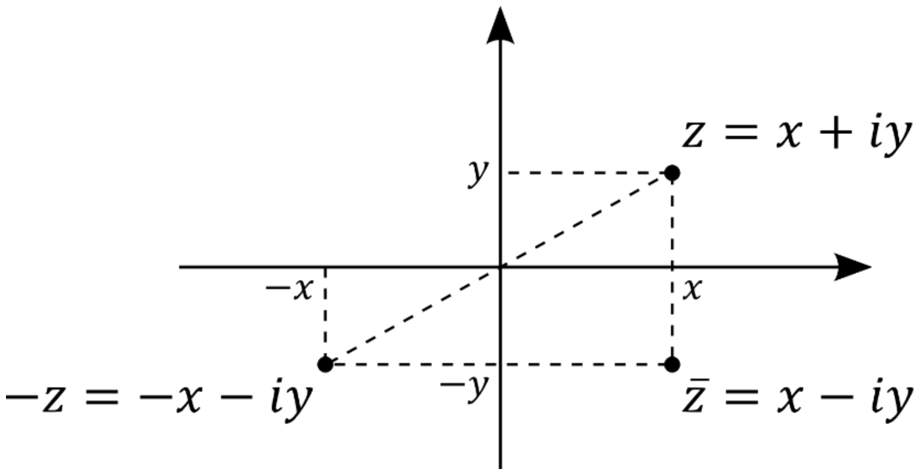
$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + y_1y_2i^2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = (r_1r_2)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Сопряжение и деление комплексных чисел

Сопряжённое число $\bar{z} = x - iy$



Обратное число

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Деление

$$z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}, \qquad r_1 e^{i\varphi_1} : r_2 e^{i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Возведение в степень и извлечение корня

Возведение в степень (***формула Муавра***)

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Извлечение корня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Пример: найдём все значения корня $\sqrt[4]{-1}$

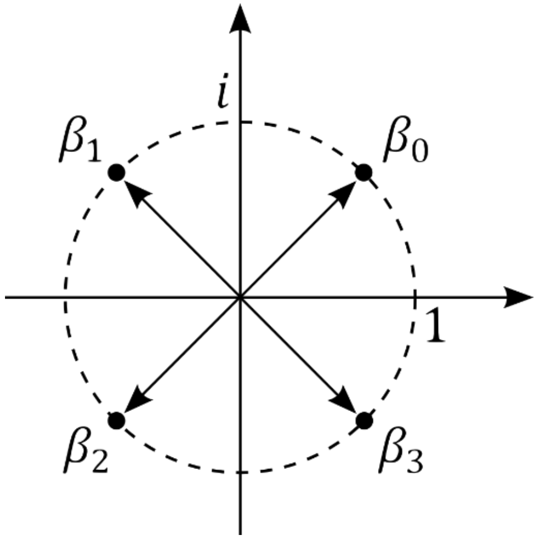
$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\beta_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Алгебраические и трансцендентные числа

Алгебраическим уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$

Основная теорема алгебры (Карл Фридрих Гаусс, 1799): любое алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами всегда имеет хотя бы одно комплексное решение.

Число называется ***алгебраическим***, если оно является решением некоторого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

Число называется ***трансцендентным***, если оно не является алгебраическим.

Пример: $\sqrt{2}$ – алгебраическое, так как является решением уравнения

$$x^2 - 2 = 0.$$

Пример: числа π и e трансцендентные.

Комплексные функции

Комплексной функцией комплексной переменной называется функция, определённая на некоторой области $D \subseteq \mathbb{C}$ и принимающая комплексные значения:

$$w = f(z).$$

Если $z = x + iy$ и $w = u + iv$, то комплексную функцию

$$x + iy \xmapsto{f} u + iv$$

можно задать как пару вещественных функций двух переменных $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которые называются соответственно вещественной частью $\operatorname{Re} f$ и мнимой частью $\operatorname{Im} f$ функции f.

Пример: найдём вещественную и мнимую части для функции $f(z) = z^2$,

$$(x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

$$\operatorname{Re} f = x^2 - y^2, \qquad \operatorname{Im} f = 2xy.$$

Комплексные числовые ряды

Комплексным числовым рядом называется числовой ряд, состоящий из комплексных чисел:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + iy_n).$$

Комплексный числовой ряд называется ***сходящимся***, если существует предел его последовательности частичных сумм:

$$S_n = z_1 + z_2 + \ \dots + z_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

В этом случае комплексное число S называется ***суммой*** ряда.

Комплексный числовой ряд $\sum z_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится вещественный ряд из модулей $\sum |z_n| = \sum \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$.

Комплексный числовой ряд $\sum z_n$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $\sum |z_n|$, составленный из модулей, расходится.

Комплексные степенные ряды

Комплексным степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Теорема Абеля: если $\sum c_n (z-z_0)^n$ сходится в точке $z^* \neq z_0$, то он сходится во всех z, для которых $|z-z_0| < |z^*-z_0|$, а если ряд расходится в z^*, то расходится во всех z, для которых $|z-z_0| > |z^*-z_0|$.

Доказательство: $|c_n (z-z_0)^n| = |c_n (z^*-z_0)^n| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^n \leq Mq^n$ $\square$

Следствие: для степенного ряда $\exists$ круг сходимости $|z-z_0| < R$.

Формула Коши-Адамара: $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Пример: для степенного ряда $\sum z^n$ его радиус сходимости $R = 1$ и сумма

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n(z) = \lim_{n\to+\infty} (1 + z + \ \dots + z^{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Пример: $\sum (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ с радиусом сходимости $R = 1$.

Алгебраические и трансцендентные функции

Алгебраической функцией называется элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения $F(z, w) = 0$, где $F(z, w)$ – многочлен от переменных z и w с комплексными коэффициентами.

Примеры алгебраических функций: $f(z) = z^2$, $f(z) = \sqrt{1 - z^3}$.

Трансцендентной функцией называется аналитическая функция, не являющаяся алгебраической.

Примеры трансцендентных функций: экспонента, тригонометрические и гиперболические функции определяются как суммы следующих рядов, абсолютно сходящихся для любого $z \in \mathbb{C}$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Свойства экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций комплексной переменной

1) ***формулы Эйлера*** $e^{iz} = \cos z + i\sin z$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

доказательство:

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i\sin z,$$

остальное через первое тождество □

2) справедливы все стандартные свойства экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций, например:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

доказательство:

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!} = [n = k+m] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\; z_1^k\, z_2^{n-k}}{k!\; (n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2},$$

остальное через формулы Эйлера □

Свойства экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций комплексной переменной

3) $|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y, \quad \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y.$

Доказательство: $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ □

4) $e^z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ – периодические с периодом $2\pi i$,

$\sin z, \cos z$ – периодические с периодом 2π.

Доказательство: $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$,

остальное через периодичность e^z и формулы Эйлера □

5) $\sin iz = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z.$

Доказательство: всё легко следует из формул Эйлера, например,

$$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{ch} z \quad \square$$

6) $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y, \quad \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y,$

$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$

Доказательство: $\operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} iy$ □

7) функции $\sin z$ и $\cos z$ не ограничены в $\mathbb{C}$.

Примеры вычисления некоторых значений экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций комплексной переменной

$$e^{i} = \cos 1 + i \sin 1,$$

$$e^{1+i\frac{\pi}{4}} = e \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e}{\sqrt{2}}(1+i),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right) = -\sin(i\ln 2) = -i\,\mathrm{sh}(\ln 2) = -i\,\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = -\frac{3i}{4}.$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определяется как функция, обратная к функции $z = e^w$.

$$z = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}, \qquad |z| = e^u, \qquad \operatorname{Arg} z = v,$$

$$\operatorname{Ln} z = w = u + iv = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Логарифмическая функция комплексной переменной определяется как многозначная функция

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Главным значением логарифма $\operatorname{Ln} z$ называется

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z\,, \qquad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Свойства: $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, $\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$.

Примеры: $\ln i = \ln|i| + i \arg i = \frac{i\pi}{2}$,

$$\ln(3 + 4i) = \ln|3 + 4i| + i \arg(3 + 4i) = \ln 5 + i \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

Обратные тригонометрические функции

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right), \qquad \operatorname{Arccos} z = i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Вывод формулы для арксинуса: $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$,

$$e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0, \qquad \left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

$$e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz + \sqrt{1 - z^2}, \qquad iw = \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Пример: $\operatorname{Arcsin} 2 = -i \operatorname{Ln}\left(2i + \sqrt{1 - 2^2}\right) = -i \operatorname{Ln} i\left(2 \pm \sqrt{3}\right) =$

$$= -i\left(\ln\left|2 \pm \sqrt{3}\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - i \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right),$$

$n \in \mathbb{Z}$.