# Теория поля и ряды
# Лекция 21

# Дифференцирование и интегрирование комплексных функций

## Предел комплексной функции

***Расширенной комплексной плоскостью*** называется множество

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

***Окрестностью*** бесконечно удалённой точки $\infty$ называется всякая область на $\mathbb{C}$, содержащая внешность некоторого круга.

Число $A \in \overline{\mathbb{C}}$ называется ***пределом*** комплексной функции в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, если $\forall U(A),\ \exists \mathring{V}(z_0),\ z \in \mathring{V}(z_0) \ \Rightarrow \ f(z) \in U(A)$.

Обозначается: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

**Теорема**: $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a + ib \ \Leftrightarrow \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{Re} f(z) = a$ и $\lim\limits_{y \to y_0} \operatorname{Im} f(z) = b$.

**Теорема**: $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = re^{i\varphi} \neq 0 \ \Leftrightarrow \ \exists \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = r$ и $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Arg} f(z) = \varphi$.

**Теорема**: $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0 \ \Leftrightarrow \ \exists \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = 0$.

# Дифференцируемость комплексной функции

Вещественная функция $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $(x,y)$, если $u$ и $v$ дифференцируемы, т. е.

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o_u(|\Delta z|),$$

$$\Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o_v(|\Delta z|).$$

***Матрицей Якоби*** дифференцируемой функции $f(x,y)$ называется матрица частных производных:

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}.$$

Комплексная функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $z$, если

$$\exists A \in \mathbb{C}, \qquad \Delta f = A \cdot \Delta z + o(|\Delta z|), \qquad \text{где} \quad \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} \right| = 0.$$

В этом случае производная $f'(z) = A$.

## Условия Коши-Римана

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o_u(|\Delta z|),$$
$$\Delta v = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o_v(|\Delta z|).$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + o(|\Delta z|)$$

**Теорема**: вещественно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ комплексно дифференцируема $\Leftrightarrow$ выполняются условия Коши-Римана:

$$u'_x = v'_y, \qquad u'_y = -v'_x,$$

при этом $f'(z) = u'_x + iv'_x$.

**Доказательство**: для комплексно дифференцируемой функции

$$\Delta f = \Delta u + i \cdot \Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) =$$
$$= (a\Delta x - b\Delta y) + i(b\Delta x + a\Delta y) + o_u(|\Delta z|) + i \cdot o_v(|\Delta z|),$$
$$u'_x = a, \qquad u'_y = -b, \qquad v'_x = b, \qquad v'_y = a \quad \square$$

Из условий Коши-Римана получаем следующие формулы для производной аналитической функции:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y - iu'_y = v'_y + iv'_x.$$

# Аналитические функции

Комплексная функция называется ***аналитической в точке*** $z$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки $z$.

Комплексная функция называется ***аналитической в области*** $D \subseteq \mathbb{C}$, если она дифференцируема в каждой точке области $D$.

**Пример**: проверим аналитичность функции $f(z) = e^{Az}$, где $A \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = e^{(\alpha+i\beta)(x+iy)} = e^{(\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y)} = e^{\alpha x-\beta y}(\cos(\beta x+\alpha y) + i\sin(\beta x+\alpha y)),$$

$$u(x,y) = e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y)\,, \qquad v(x,y) = e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y),$$

$$u'_x = \alpha e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y) - \beta e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y),$$

$$u'_y = -\beta e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y) - \alpha e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y),$$

$$v'_x = \alpha e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y) + \beta e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y),$$

$$v'_y = -\beta e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y) + \alpha e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y),$$

так что функция является аналитической в $\mathbb{C}$ и её производная

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = \alpha e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y) - \beta e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y) +$$

$$+\,i\big(\alpha e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y) + \beta e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y)\big) =$$

$$= (\alpha+i\beta)e^{\alpha x-\beta y}(\cos(\beta x+\alpha y) + i\sin(\beta x+\alpha y)) = Ae^{Az}.$$

## Пример функции, не являющейся аналитической

**Пример**: проверим аналитичность функции $f(z) = \bar{z}$,

$$f(z) = x - iy, \qquad u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = -y,$$

$$u'_x = 1, \qquad u'_y = 0, \qquad v'_x = 0, \qquad v'_y = -1,$$

$u'_x \neq v'_y$ ни в одной точке комплексной плоскости $\mathbb{C}$, поэтому данная функция нигде не дифференцируема.

# Свойства аналитических функций

**Теорема**: для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитических в области $D \subseteq \mathbb{C}$, аналитическими в области $D$ также будут их сумма $f_1 + f_2$, произведение $f_1 f_2$, функции $1/f_1(z)$ и $1/f_2(z)$ и композиция $f_1\big(f_2(z)\big)$.

**Доказательство**: $f_1(z) = u_1 + iv_1$, $f_2(z) = u_2 + iv_2$,

для суммы

$$(f_1 + f_2)(z) = f_1(z) + f_2(z) = u_1 + iv_1 + u_2 + iv_2 = (u_1 + u_2) + i(v_1 + v_2),$$

$$(u_1 + u_2)'_x = (u_1)'_x + (u_2)'_x = (v_1)'_y + (v_2)'_y = (v_1 + v_2)'_y;$$

для композиции

$$f_1\big(f_2(z)\big) = \Big(u_1\big(u_2(x,y), v_2(x,y)\big), v_1\big(u_2(x,y), v_2(x,y)\big)\Big),$$

$$\Big(u_1\big(u_2(x,y), v_2(x,y)\big)\Big)'_x = (u_1)'_{u_2}(u_2)'_x + (u_1)'_{v_2}(v_2)'_x =$$

$$= (v_1)'_{v_2}(v_2)'_y - (v_1)'_{u_2}\big(-(u_2)'_y\big) = \Big(v_1\big(u_2(x,y), v_2(x,y)\big)\Big)'_y \quad \square$$

## Сопряжённые гармонические функции

**Теорема**: если функция $f(z)$ аналитическая, то функции $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ гармонические.

**Доказательство**: $f(z) = u + iv$, $\operatorname{Re} f = u$, $\operatorname{Im} f = v$,

$$u''_{xx} = (u'_x)'_x = \left(v'_y\right)'_x = v''_{yx}, \qquad u''_{yy} = \left(u'_y\right)'_y = (-v'_x)'_y = -v''_{xy},$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$$

и аналогично проверяется, что $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ $\square$

Гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются ***сопряжёнными***, если они являются вещественной и мнимой частями некоторой аналитической функции.

Зная одну из пары сопряжённых гармонич. функций, можно найти другую:

$$u(x,y) = C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u'_x\,dx + u'_y\,dy = C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_y\,dx - v'_x\,dy,$$

$$v(x,y) = C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_x\,dx + v'_y\,dy = C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y\,dx + u'_x\,dy\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

## Восстановление аналитической функции по её вещественной или мнимой части

**Пример**: проверим, что функция $v(x,y) = x + y + xy$ является гармонической

$$v'_x = 1 + y, \qquad v''_{xx} = 0, \qquad v'_y = 1 + x, \qquad v''_{yy} = 0,$$

$$v''_{xx} + v''_{yy} = 0;$$

найдём сопряжённую гармоническую

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_y\,dx - v'_x\,dy + C,$$

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} (1+x)\,dx - \int_{(x,0)}^{(x,y)} (1+y)\,dy + C = x + \frac{x^2}{2} - y - \frac{y^2}{2} + C,$$

$$f(z) = x + \frac{x^2}{2} - y - \frac{y^2}{2} + C + i(x + y + xy),$$

заменим $x$ на $z - iy$, получим $f(z) = \frac{1}{2}z^2 + (1+i)z + C$, где $C \in \mathbb{R}$.

## Восстановление аналитической функции по её модулю или аргументу

**Пример**: проверим, что функция $r = e^{2xy}$ может быть модулем некоторой аналитической функции $f(z)$,

для этого рассмотрим функцию

$$\operatorname{Ln} f(z) = \ln|f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

функция $u(x, y) = \ln|f(z)| = 2xy$ является гармонической, так как

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 + 0 = 0,$$

найдём сопряжённую гармоническую

$$v(x, y) = \operatorname{Arg} f(z) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -2x\,dx + 2y\,dy + C = -x^2 + y^2 + C,$$

тогда

$$\operatorname{Ln} f(z) = 2xy + i(-x^2 + y^2 + C) = [\, x = z - iy \,] = -iz^2 + iC,$$

$$f(z) = e^{-iz^2 + iC}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

# Интеграл от комплексной функции по кривой $L$

Пусть комплексная функция $f(z)$ определена на области $D \subseteq \mathbb{C}$ и линия $L$ лежит в области $D$, начинается в точке $A$ и закачивается в точке $B$. Рассмотрим разбиение линии $L$ на частичные линии точками $A_0 = A$, $A_1$, $A_2$, …, $A_n = B$. В каждой частичной линии выберем точку

$$z_k \in A_{k-1}A_k, \qquad k \in \overline{1, n}.$$

Обозначим $\Delta z_k = A_k - A_{k-1},\ k \in \overline{1, n}$, где разность $A_k - A_{k-1}$ понимается как разность комплексных чисел.

***Интегралом*** от функции $f(z)$ по линии $L$ называется предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k$ при стремлении диаметра разбиения $d$ к нулю, при условии что предел не зависит от выбора разбиений и точек на частичных линиях разбиений:

$$\int_L f(z)\, dz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k.$$

## Вычисление интеграла от комплексной функции

Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\big(u(x_k,y_k) + iv(x_k,y_k)\big)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}(u(x_k,y_k)\Delta x_k - v(x_k,y_k)\Delta y_k) + i\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}(v(x_k,y_k)\Delta x_k + u(x_k,y_k)\Delta y_k).$$

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u+iv)(dx + i\,dy) = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy.$$

**Пример**: найдём интеграл от функции $f(z) = \operatorname{Re} z$ от точки $A$ до точки $B$ сначала по прямой $AB$, а затем по ломаной $ACB$, где $A(0;0)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$.

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad u(x,y) = x, \qquad v(x,y) = 0,$$

$$AB: y = x, \qquad x \in [0,1], \qquad \int_{AB} \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 x\,dx = \frac{1+i}{2},$$

$$AC: y = 0, \qquad CB: x = 1, \qquad \int_{ACB} \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 1\,dy = \frac{1}{2} + i.$$

## Свойства интеграла от комплексной функции

1) линейность: $\int_L \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\,dz = \alpha \int_L f(z)\,dz + \beta \int_L g(z)\,dz\,;$

2) аддитивность: $\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz\,;$

3) ориентированность: $\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{BA} f(z)\,dz.$

4) $\int_{AB} dz = B - A, \qquad \forall A, B \in \mathbb{C}.$

Доказательство: $\int_{AB} dz = \lim\limits_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i = \lim\limits_{d\to 0}(B - A) = B - A \quad \square$

5) $\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le M \cdot l, \qquad$ где $M = \sup\limits_{z\in L} |f(z)|\,,$ $l$ – длина кривой $L$.

Док-во: $\left|\int_L f(z)\,dz\right| = \lim\limits_{d\to 0} \left|\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i\right| \le M \cdot \lim\limits_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} |\Delta z_i| \le M \cdot l \quad \square$

## Теорема Коши для аналитической функции

**Теорема Коши**: $f(z)$ – аналитическая в односвязной области $G$ с кусочно гладкой границей $\Gamma$ $\Rightarrow$ $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

**Доказательство**: интеграл от комплексной функции равен сумме криволинейных интегралов

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma u\,dx - v\,dy + i\oint_\Gamma v\,dx + u\,dy,$$

условия Коши-Римана для функции $f(z)$ есть фактически условия независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования □

**Теорема Коши для многосвязной области**:

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)\,dz,$$

где $\Gamma$ – внешняя компонента границы области, а $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ – внутренние компоненты границы области, и все контуры $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ проходятся в одинаковом направлении.

## Теорема об интеграле с переменным верхним пределом от аналитической функции

**Теорема**: если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $G$, то функция $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ также является аналитической в области $G$ и $F'(z) = f(z)$.

**Доказательство**: по теореме Коши $F(z)$ определена корректно;

в силу условий Коши-Римана для $f(z)$ подынтегральные выражения в

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy$$

есть полные дифференциалы

$$dU = u\,dx - v\,dy, \qquad dV = v\,dx + u\,dy;$$

для $U$ и $V$ также выполняются условия Коши-Римана:

$$U'_x = V'_y = u, \qquad V'_x = -U'_y = -v;$$

отсюда $F = U + iV$ – аналитическая и $F'(z) = U'_x + iV'_x = u + iv = f(z)$ □

## Следствия из теоремы об интеграле с переменным верхним пределом от аналитической функции

**Следствие 1**: аналитические функции с равными производными отличаются максимум на константу

$$F_1'(z) = F_2'(z) \;\Rightarrow\; F_1 - F_2 = const.$$

**Доказательство**: для функции $\varphi(z) = u + iv = F_1(z) - F_2(z)$ имеем

$$\varphi'(z) = u_x' + iv_x' = F_1'(z) - F_2'(z) = 0,$$

откуда из условий Коши-Римана $u_y' = -v_x' = 0$ и $v_y' = u_x' = 0$, поэтому

$$u = const, \qquad v = const, \qquad \varphi(z) = F_1(z) - F_2(z) = const \;\; \square$$

**Следствие 2**: если функция $f(z)$ аналитическая и $F'(z) = f(z)$, то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

**Доказательство**: по теореме для $\Phi(z) = \int_{z_1}^{z} f(z)\,dz$ имеем $\Phi'(z) = f(z)$, по следствию 1 имеем $\Phi(z) = F(z) + C$, где $C = -F(z_1)$ $\square$