Теория поля и ряды
Лекция 22

Интегральная формула Коши, ряды Тейлора и Лорана

Интеграл от дроби $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ по окружности с центром в точке z_0

Найдём интеграл

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n},$$

для точек окружности $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ и $\varphi \in [0; 2\pi]$, отсюда

$$dz = i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi,$$

при $n = 1$ имеем

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} i\, d\varphi = 2\pi i,$$

при $n > 1$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}\, d\varphi}{(\rho e^{i\varphi})^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i}{\rho^{n-1}}\, e^{-i(n-1)\varphi}\, d\varphi = \frac{-1}{\rho^{n-1}(n-1)}\, e^{-i(n-1)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Интегральная формула Коши

Пусть функция f аналитическая в односвязной области G с кусочно гладкой границей Γ и точка $z_0 \in G$. Тогда f непрерывна в точке z_0, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \rho > 0, \qquad \forall z \in \gamma = \{z : |z - z_0| = \rho\}, \qquad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

откуда

$$\left| \oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - \oint_\gamma \frac{f(z_0)\,dz}{z - z_0} \right| = \left| \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz \right| \le \frac{1}{\rho} \sup_{z \in \gamma} |f(z) - f(z_0)| \cdot 2\pi\rho \le 2\pi\varepsilon,$$

поэтому по теореме Коши для области между Γ и γ

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \oint_\gamma \frac{f(z_0)\,dz}{z - z_0} = f(z_0) \cdot \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

и получаем интегральную формулу Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Интегральная формула для производной

Выберем приращение $\Delta z = z - z_0$ такое, чтобы $z_0 + \Delta z \in G$, тогда по интегральной формуле Коши

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\left(\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-(z_0+\Delta z)} - \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i \Delta z}\oint_\Gamma \frac{\big(f(z)(z-z_0)-f(z)(z-z_0-\Delta z)\big)\,dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)},$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}.$$

Аналогично, $$\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z} = \frac{1!}{2\pi i \Delta z}\left(\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{\big(z-(z_0+\Delta z)\big)^2} - \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}\right) =$$

$$= \frac{1!}{2\pi i \Delta z}\oint_\Gamma \frac{(f(z)(z-z_0)^2-f(z)(z-z_0-\Delta z)^2)\,dz}{(z-z_0-\Delta z)^2(z-z_0)^2} = \frac{1!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)(2(z-z_0)+\Delta z)\,dz}{(z-z_0-\Delta z)^2(z-z_0)^2},$$

$$f''(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z} = \frac{2!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}.$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Примеры вычисления интегралов

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}\,, \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}\,.$$

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0), \qquad \oint_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Пример:

$$\oint_{|z-3i|=2} \frac{e^z\,dz}{z(z-2i)} = \oint_{|z-3i|=2} \frac{\frac{e^z}{z}\,dz}{z-2i} = 2\pi i\, \frac{e^z}{z}\Big|_{z=2i} = \pi(\cos 2 + i \sin 2).$$

Пример:

$$\oint_{|z|=10} \frac{\cos z\,dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!}\,(\cos z)''\Big|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \operatorname{ch} 1.$$

Ряд Тейлора

Теорема Тейлора: для функции $f(z)$, аналитической в области G, и любой точки z в круге $\{z : |z - z_0| < r\} \subset G$ имеем ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Доказательство: для окружности $\gamma = \{\xi : |\xi - z_0| = r\}$ по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z},$$

разложим подынтегральную функцию в ряд

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)\,(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

этот степенной ряд равномерно сходится, так как мажорируется геометрической прогрессией

$$\left|\frac{f(\xi)\,(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| \le \max_{\xi \in \gamma} |f(\xi)| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}},$$

поэтому можно почленно проинтегрировать

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)\,(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \square$$

Неравенства Коши и теорема Лиувилля

Для коэффициентов ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

имеем $|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{|2\pi i|} \cdot \sup_{\xi\in\gamma}\left|\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| \cdot 2\pi r,$

откуда следуют ***неравенства Коши***:

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n},$$

где $M(r) = \sup\limits_{\xi\in\gamma}|f(\xi)|$ и r – радиус окружности γ.

Теорема Лиувилля: если функция $f(z)$ аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости, то она постоянна.

Доказательство: если $|f(z)| \leq M$ для любых $z \in \mathbb{C}$, то в неравенствах Коши $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ числитель не зависит от r, а знаменатель можно выбрать сколь угодно большим, поэтому все $a_n = 0$ для $n \geq 1$ и $f(z) = a_0$ □

Пример разложения функции в ряд Тейлора

Пример: разложим функцию $f(z) = \ln(1+z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$,

находим $f(0) = \ln 1 = 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+z}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+z)^3}, \qquad \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n,$$

этот ряд сходится в круге $|z| < 1$, так как значение $\ln 0$ не определено.

Ряд Лорана

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $D^* = \{z : r^* < |z - z_0| < R^*\}$.

Выберем точку $z \in D^*$ и числа r и R так, чтобы $r^* < r < |z - z_0| < R < R^*$ и рассмотрим окружности

$$\Gamma_1 = \{z : |z - z_0| = r\}, \qquad \Gamma_2 = \{z : |z - z_0| = R\}, \qquad \gamma = \{\xi : |\xi - z| = \rho\},$$

где радиус ρ достаточно мал, чтобы γ не пересекалась с Γ_1 и Γ_2. Тогда по интегральной формуле Коши и теореме Коши для многосвязной области

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} - \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} \right),$$

разложим подынтегральные функции в ряды, для $\xi \in \Gamma_2$ имеем $|\xi - z_0| > |z - z_0|$, поэтому

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)\,(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

для $\xi \in \Gamma_1$ имеем $|\xi - z_0| < |z - z_0|$, поэтому

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = -\frac{f(\xi)}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = -\frac{f(\xi)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}} = -\frac{f(\xi)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)\,(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = [\, m = -n - 1 \,] = -\sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{f(\xi)\,(z - z_0)^m}{(\xi - z_0)^{m+1}},$$

эти степенные ряды сходятся равномерно, поэтому можно почленно интегрировать

Ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\Gamma_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(\xi)\,(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi + \oint_{\Gamma_1}\sum_{m=-1}^{-\infty}\frac{f(\xi)\,(z-z_0)^m}{(\xi-z_0)^{m+1}}\,d\xi\right),$$

Рядом Лорана функции $f(z)$ с центром в точке z_0 называется следующий ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n,$$

где Г – любая простая замкнутая кривая в кольце D^*, совершающая один оборот вокруг точки z_0.

Правильной частью ряда Лорана называется ряд, состоящий из слагаемых ряда Лорана с неотрицательными степенями n.

Главной частью ряда Лорана называется ряд, состоящий из слагаемых ряда Лорана с отрицательными степенями n.

Пример разложения функции в ряд Лорана

Разложим функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана по степеням $z-2$.

Разложим $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

В области $0 < |z-2| < 1$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^n = \sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n.$$

В области $|z-2| > 1$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^{n+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}.$$

Пример разложения функции в ряд Лорана

Разложим функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ в ряд Лорана по степеням z.

В области $|z| < 1$ имеем

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

В области $1 < |z| < 2$ имеем

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2^{\max\{0,n+1\}}} z^n.$$

В области $|z| > 2$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n - 1)}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2^n - 1)}{z^{n+1}} =$$

$$= [\, k = -n - 1 \,] = \sum_{k=-2}^{-\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} - 1 \right) z^k.$$