Теория поля и ряды

Лекция 23

Нули и особые точки

Понятие нуля аналитической функции

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ называется ***нулём*** порядка m аналитической функции $f(z)$, если $f(z_0) = f'(z_0) = \ \dots \ = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Ноль первого порядка также называется ***простым***.

Теорема: точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является нулём порядка m для функции $f(z) \ \Leftrightarrow$ существует аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi(z_0) \neq 0$ и

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z).$$

Доказательство: необходимость следует из вида ряда Тейлора

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot \left(\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}\,(z - z_0) + \ \dots \right);$$

для достаточности надо разложить $\varphi(z)$ в ряд Тейлора $\square$

Примеры нулей аналитических функций

Пример: найдём нули функции $f(z) = \sin\frac{1}{z}$,

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{e^{i/z} - e^{-i/z}}{2i} = 0, \qquad e^{i/z} = e^{-i/z}, \qquad e^{2i/z} = 1,$$

$$\frac{2i}{z} = \operatorname{Ln} 1 = \ln|1| + i \operatorname{Arg} 1 = i(0 + 2\pi n), \qquad z_{0n} = \frac{1}{\pi n}, \qquad n \in \mathbb{Z}^*;$$

для каждого нуля определим его порядок

$$f'(z) = \left(\sin\frac{1}{z}\right)' = -\frac{\cos\frac{1}{z}}{z^2}, \qquad f'(z_{0n}) = -\frac{\cos \pi n}{\frac{1}{\pi^2 n^2}} = (-1)^{n+1}\pi^2 n^2 \neq 0,$$

все точки $z_{0n} = \frac{1}{\pi n}$ являются простыми нулями.

Примеры нулей аналитических функций

Пример: найдём нули функции $f(z) = (z^3 + 1)^4$,

$$(z^3 + 1)^4 = 0, \qquad z^3 = -1,$$

$$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{|-1|}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right) = e^{i(\pi+2\pi k)/3}, \;\; k = 0, 1, 2,$$

$$z_{01} = e^{i\pi/3}, \qquad z_{02} = e^{i\pi}, \qquad z_{03} = e^{5i\pi/3};$$

для каждого нуля определим его порядок

$$z^3 + 1 = z^3 - \left(e^{i\pi/3}\right)^3 = \left(z - e^{i\pi/3}\right)\left(z^2 + ze^{i\pi/3} + e^{2i\pi/3}\right),$$

$$f(z) = (z - z_{01})^4 \cdot \varphi(z), \qquad \varphi(z) = \left(z^2 + ze^{i\pi/3} + e^{2i\pi/3}\right)^4,$$

$$\varphi(z_{01}) = \left(3e^{2i\pi/3}\right)^4 = 81e^{2i\pi/3} \neq 0,$$

так что точка $z_{01} = e^{i\pi/3}$ является нулём 4-го порядка,

аналогично проверяется, что точки $z_{02} = e^{i\pi}$ и $z_{03} = e^{5i\pi/3}$ также являются нулями 4-го порядка.

Особая точка однозначной комплексной функции

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ однозначной функции $f(z)$ называется ***особой***, если f не определена или не аналитична в точке z_0.

Неособая точка называется ***правильной***.

Особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f называется ***изолированной***, если в некоторой окрестности точки z_0 не существует других особых точек, т. е. f аналитична в некоторой проколотой окрестности

$$\{z : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Точка $z_0 = \infty$ называется ***изолированной особой точкой*** функции $f(z)$, если f аналитична в некоторой окрестности бесконечности $\{z : |z| > r\}$.

Примеры особых точек комплексных функций

Пример: функция $f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z-2)}$ имеет три изолированные особые точки

$$z_{01} = 1, \qquad z_{02} = 2, \qquad z_{03} = \infty.$$

Пример: для функции $f(z) = \dfrac{1}{1 + e^{1/z^2}}$ особая точка $z_0 = 0$ не является изолированной, так как в любой её окрестности есть другие особые точки

$$1 + e^{1/z^2} = 0, \qquad e^{1/z^2} = -1, \qquad \frac{1}{z^2} = \operatorname{Ln}(-1) = \ln|-1| + i\operatorname{Arg}(-1),$$

$$\frac{1}{z^2} = i(\pi + 2\pi n), \qquad z_{0n} = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi i}}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример: для функции $f(z) = \dfrac{1}{1 + e^{z}}$ особая точка $z_0 = \infty$ не является изолированной, так как в любой её окрестности есть другие особые точки

$$z_{0n} = (2n+1)\pi i, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Классификация изолированных особых точек

Изолированная особая точка z_0 функции f называется:

1) ***устранимой***, если $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;
2) ***полюсом***, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
3) ***существенно особой***, если не $\exists$ ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Теорема: ряд Лорана функции $f(z)$ в правильной или устранимой изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ не содержит главной части

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ \dots ,$$

в полюсе порядка m содержит лишь конечное число слагаемых в главной части

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ \dots , \qquad c_{-m} \neq 0,$$

в существенно особой точке содержит бесконечное число слагаемых в главной части.

Свойства полюса

Теорема: изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ однозначной функции $f(z)$ является полюсом порядка m $\Leftrightarrow$ $\exists \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0, \infty$.

Доказательство:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots,$$

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \ldots \quad \square$$

Теорема: изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ однозначной функции $f(z)$ является полюсом порядка m $\Leftrightarrow$ z_0 является нулём порядка m для $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Доказательство:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots,$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + c_{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \ldots \quad \square$$

Бесконечно удалённая точка

Так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$, то тип изолированной особой точки $z_0 = \infty$ функции $f(z)$ совпадает с типом изолированной особой точки $z_0 = 0$ для $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

$$f(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + c_{m+2} z^{m+2} + \ \ldots \ \Rightarrow \ f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_m}{z^m} + \frac{c_{m+1}}{z^{m+1}} + \frac{c_{m+2}}{z^{m+2}} + \ \ldots$$

В ряде Лорана в окрестности $z_0 = \infty$ слагаемые с неположительными степенями называются ***правильной частью***, а слагаемые с положительными степенями – ***главной частью***.

Теорема: изолированная особая точка $z_0 = \infty$ однозначной функции $f(z)$ является полюсом порядка $m \iff \exists \lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^m} \neq 0, \infty$.

Бесконечно удалённая точка называется ***нулём*** порядка m для $f(z)$, если точка $z_0 = 0$ является нулём порядка m функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Теорема: бесконечно удалённая точка функции $f(z)$ является нулём порядка $m \iff \exists \lim\limits_{z\to\infty} z^m f(z) \neq 0, \infty$.

Примеры

Для следующих функций найдём все особые точки и определим их характер, включая бесконечно удалённую точку.

Пример 1: $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{ch} z}{1} = 1,$$

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots,$$

$z = 0$ – устранимая;

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{z}}{1/z} = z\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!\, z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!\, z^{2n}} = 1 + \frac{1}{3!\, z^2} + \frac{1}{5!\, z^4} + \dots,$$

$z = \infty$ – существенно особая.

Примеры

Для следующих функций найдём все особые точки и определим их характер, включая бесконечно удалённую точку.

Пример 2: $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z^6}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sh} z}{z^6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{ch} z}{6z^5} = \infty, \qquad \lim_{z\to 0}\left(z^5 \frac{\operatorname{sh} z}{z^6}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sh} z}{z} = 1,$$

$$\frac{\operatorname{sh} z}{z^6} = \frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n-5}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^5} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z} + \frac{z}{7!} + \frac{z^3}{9!} + \dots,$$

$z = 0$ – полюс 5-го порядка,

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{z}}{(1/z)^6} = z^6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!\,z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!\,z^{2n-5}} = z^5 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z}{5!} + \dots,$$

$z = \infty$ – существенно особая.

Примеры

Для следующих функций найдём все особые точки и определим их характер, включая бесконечно удалённую точку.

Пример 3: $f(z) = e^{1/z}$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \dots,$$

$z = 0$ – существенно особая,

$z = \infty$ – устранимая.

$$\lim_{z=x\to 0+} e^{\frac{1}{z}} = +\infty, \qquad \lim_{z=x\to 0-} e^{\frac{1}{z}} = 0;$$

$$\lim_{z\to\infty} e^{\frac{1}{z}} = e^0 = 1.$$

Примеры

Для следующих функций найдём все особые точки и определим их характер, включая бесконечно удалённую точку.

Пример 4: $f(z) = \left(z + \frac{1}{z^2}\right)^2 = z^2 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^4}$

$$z = 0 \text{ – полюс 4-го порядка,}$$

$$z = \infty \text{ – полюс 2-го порядка.}$$

$$\lim_{z\to 0} z^4 \left(z + \frac{1}{z^2}\right)^2 = \lim_{z\to 0}(z^6 + 2z^3 + 1) = 1,$$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\left(z + \frac{1}{z^2}\right)^2}{z^2} = \lim_{z\to\infty}\left(1 + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^6}\right) = 1.$$

Примеры

Для следующих функций найдём все особые точки и определим их характер, включая бесконечно удалённую точку.

Пример 5: $f(z) = \frac{1}{(z-1)\,(z-2)}$

$$\lim_{z\to 1}\left((z-1)\,\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z-2} = -1,$$

$$\lim_{z\to 2}\left((z-2)\,\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right) = \lim_{z\to 2}\frac{1}{z-1} = 1,$$

$z = 1, z = 2$ – простые полюсы,

$$\lim_{z\to\infty}\left(z^2\,\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{z}+\frac{2}{z^2}} = 1,$$

$z = \infty$ – нуль 2-го порядка.

Примеры

Для следующих функций найдём все особые точки и определим их характер, включая бесконечно удалённую точку.

Пример 6: $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!\, z^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{k-m}}{k!\, m!} = [\, n = k - m \,] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{k,m \in \mathbb{Z}_+ \\ k-m=n}} \frac{1}{k!\, m!} \right) z^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s!\,(s+|n|)!} \right) z^n,$$

$z = 0, \infty$ – существенно особые точки.