

Теория поля и ряды

Лекция 24

Вычеты

Понятие вычета

Вычетом (residue) функции $f(z)$ в правильной или изолированной особой точке $z_0 \neq \infty$ называется

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz,$$

где L – любой простой замкнутый контур, который охватывает точку z_0 , проходится в положительном направлении и не охватывает других особых точек.

Теорема: в правильной или устранимой особой точке $z_0 \neq \infty$ вычет равен нулю; в изолированной особой точке $z_0 \neq \infty$ вычет равен коэффициенту c_{-1} в ряде Лорана в окрестности точки z_0 .

Доказательство: следует из формулы для коэффициентов ряда Лорана

$$c_n = \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) \quad \square$$

Пример: для функции $f(z) = z^3 + z + \frac{5}{z} - \frac{7}{z^5}$ вычет в нуле $\operatorname{Res} f(0) = 5$.

Вычет в полюсе

Теорема: если точка z_0 является полюсом порядка m функции $f(z)$, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right).$$

Доказательство: прямые вычисления в ряде Лорана

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots,$$

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \dots,$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right) = (m-1)! c_{-1} + \frac{m!}{1!} c_0(z - z_0) + \frac{(m+1)!}{2!} c_1(z - z_0)^2 + \dots,$$

или по интегральной формуле Коши \square

В частности, для простого полюса

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0) f(z) \right).$$

Примеры

Для следующих функций найдём вычеты во всех конечных особых точках.

Пример 1: $f(z) = \frac{5z - 1}{(z - 1)(z + 2)} = \frac{4/3}{z - 1} + \frac{11/3}{z + 2}$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left((z - 1) \frac{5z - 1}{(z - 1)(z + 2)} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{5z - 1}{z + 2} = \frac{4}{3},$$

$$\lim_{z \rightarrow -2} \left((z + 2) \frac{5z - 1}{(z - 1)(z + 2)} \right) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{5z - 1}{z - 1} = \frac{11}{3},$$

$z = 1, z = -2$ – простые полюсы,

$$\operatorname{Res} f(1) = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{Res} f(-2) = \frac{11}{3}.$$

Примеры

Для следующих функций найдём вычеты во всех конечных особых точках.

Пример 2: $f(z) = \frac{1}{(z-2)\sin z}$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(z \frac{1}{(z-2)\sin z} \right) = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{z \rightarrow 2} \left((z-2) \frac{1}{(z-2)\sin z} \right) = \frac{1}{\sin 2},$$

$z = 0, z = 2$ – простые полюсы,

$$\operatorname{Res} f(0) = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Res} f(2) = \frac{1}{\sin 2}.$$

Примеры

Для следующих функций найдём вычеты во всех конечных особых точках.

Пример 3: $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^3} = \frac{1}{(z + i)^3 (z - i)^3}$

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} \left((z \mp i)^3 \frac{1}{(z + i)^3 (z - i)^3} \right) = \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{1}{(z \pm i)^3} = \frac{1}{(\pm 2i)^3} = \pm \frac{i}{8},$$

$z = \pm i$ – полюсы 3-го порядка,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(\pm i) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow \pm i} \left(\frac{1}{(z \pm i)^3} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \pm i} \left(\frac{-3}{(z \pm i)^4} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \pm i} \frac{12}{(z \pm i)^5} = \frac{6}{(\pm 2i)^5} = \pm \frac{6}{32i} = \mp \frac{3i}{16}. \end{aligned}$$

Примеры

Для следующих функций найдём вычеты во всех конечных особых точках.

Пример 4: $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$

$$e^{z + \frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s! (s + |n|)!} \right) z^n,$$

$z = 0$ – существенно особая точка,

$$\operatorname{Res} f(0) = c_{-1} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{s! (s + 1)!}.$$

Теорема Коши (основная теорема) о вычетах

Теорема Коши (основная теорема) о вычетах: пусть $z_{01}, z_{02}, \dots, z_{0n}$ – изолированные особые точки однозначной функции $f(z)$ в области G с кусочно гладкой границей Γ , тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_{0k}).$$

Доказательство: так как особые точки изолированы, для каждой из них найдётся окружность Γ_k с центром в этой особой точке и не охватывающая других особых точек; тогда по теореме Коши для многосвязной области и определению вычета

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_{0k}) \quad \square$$

Пример вычисления интеграла с помощью вычетов

Найдём интеграл

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{1-2\sin^2 z} dz = \frac{1}{2} \oint_{|z|=2} \frac{z dz}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin z\right)},$$

для подынтегральной функции точки $z = \pm \frac{\pi}{4}$ – простые полюсы, найдём вычеты в этих точках

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)z}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin z\right)} = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{z - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin z} \cdot \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{1}{-\cos z} \cdot \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{z \rightarrow -\pi/4} \frac{\left(z + \frac{\pi}{4}\right)z}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin z\right)} = \lim_{z \rightarrow -\pi/4} \frac{z + \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin z} \cdot \lim_{z \rightarrow -\pi/4} \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -\pi/4} \frac{1}{\cos z} \cdot \frac{-\pi}{4\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{1-2\sin^2 z} dz = \frac{1}{2} 2\pi i \left(\operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Res} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = -\frac{\pi^2}{2} i.$$

Вычет в бесконечно удалённой точке

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удалённой изолированной особой точке называется

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=N} f(z) dz,$$

где число N столь велико, что $f(z)$ аналитична в области $\{z : N < |z| < \infty\}$, и граничная окружность этой области обходится по часовой стрелке.

Теорема: $\operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1}$.

Доказательство: следует из формулы для коэффициентов ряда Лорана, знак «минус» появляется из-за обхода по часовой стрелке \square

Теорема: если бесконечно удалённая точка является нулём порядка $m \geq 2$ функции $f(z)$, то $\operatorname{Res} f(\infty) = 0$.

Доказательство: если бесконечно удалённая точка является нулём порядка $m \geq 2$ функции $f(z)$, то ряд Лорана в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m-1}}{z^{m+1}} + \frac{c_{-m-2}}{z^{m+2}} + \dots, \quad \operatorname{Res} f(\infty) = -c_{-1} = 0 \quad \square$$

Теорема о сумме вычетов во всех особых точках, включая ∞

Теорема: если функция $f(z)$ имеет лишь изолированные особые точки z_{01}, z_{02}, \dots и $z_{0n} = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_{0k}) = 0.$$

Доказательство: для окружностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$, охватывающих соответственно по одной особой точке $z_{01}, \dots, z_{0,n-1}$, и окружности Γ , охватывающей все особые точки $z_{01}, \dots, z_{0,n-1}$, запишем теорему Коши для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} f(z) dz,$$

где все окружности обходятся против часовой стрелки; поделим на $2\pi i$ и используем определение вычета

$$-\operatorname{Res} f(\infty) = \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Res} f(z_{0k}) \quad \square$$

Примеры

Пример 1: $f(z) = \frac{5z - 1}{(z - 1)(z + 2)} = \frac{4/3}{z - 1} + \frac{11/3}{z + 2}$

$z = 1, z = -2$ – простые полюсы, $\operatorname{Res} f(1) = \frac{4}{3}, \operatorname{Res} f(-2) = \frac{11}{3},$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (z \cdot f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(5z - 1)}{(z - 1)(z + 2)} = 5,$$

$z = \infty$ – нуль 1-го порядка,

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -\operatorname{Res} f(1) - \operatorname{Res} f(-2) = -\frac{4}{3} - \frac{11}{3} = -5,$$

в окрестности ∞ имеем $f(z) = \frac{4}{3z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{11}{3z} \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} = \frac{4}{3z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{11}{3z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{z^n} =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4 + 11 \cdot (-2)^n}{3z^{n+1}} = \frac{5}{z} - \frac{6}{z^2} + \dots, \quad c_{-1} = 5.$$

Примеры

Найдём интеграл

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3 + 1},$$

внутри круга $|z| < 3$ расположены три особые точки

$$z_{01} = e^{i\pi/3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_{02} = e^{i\pi} = -1, \quad z_{03} = e^{5i\pi/3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

воспользуемся теоремой Коши о вычетах и теоремой о сумме вычетов

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3 + 1} = 2\pi i (\operatorname{Res} f(e^{i\pi/3}) + \operatorname{Res} f(e^{i\pi}) + \operatorname{Res} f(e^{5i\pi/3})) = -2\pi i \operatorname{Res} f(\infty),$$

разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + \frac{1}{z^3}} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{3n}} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^9} - \frac{1}{z^{12}} + \dots,$$

$$z = \infty \text{ — ноль 3-го порядка,} \quad \operatorname{Res} f(\infty) = 0, \quad \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^3 + 1} = 0.$$

Примеры

Найдём интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$,

рассмотрим контур $L_R = C_R \cup [-R; R]$, где C_R - верхняя половина окружности $|z| = R$,

для функции $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ точки $z = \pm i$ являются полюсами 2-го порядка,

$$\operatorname{Res} f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{1}{(z + i)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z + i)^3} = -\frac{i}{4}, \quad \int_{L_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = 2\pi i \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} \right| &= [z = Re^{i\varphi}] = \left| \int_0^\pi \frac{Rie^{i\varphi} d\varphi}{(R^2 e^{2i\varphi} + 1)^2} \right| \leq \int_0^\pi \frac{R d\varphi}{|R^2 e^{2i\varphi} + 1|^2} = \\ &= \int_0^\pi \frac{R d\varphi}{(R^2 \cos 2\varphi + 1)^2 + R^4 \sin^2 2\varphi} = \int_0^\pi \frac{R d\varphi}{R^4 + 2R^2 \cos 2\varphi + 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2} - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$