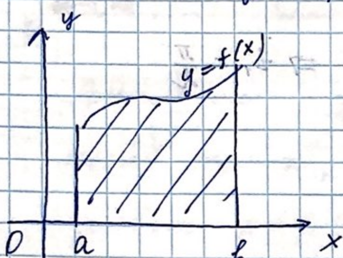
Лекция 7-8

Геометр. прилож. определенного интеграла.

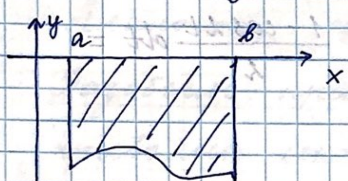
Вычисление площадей плоских фигур

1. Площадь криволин. трапеции



$y = f(x) > 0$ $\forall x \in [a; b]$ – кр. трап. расположена выше оси абсцисс.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



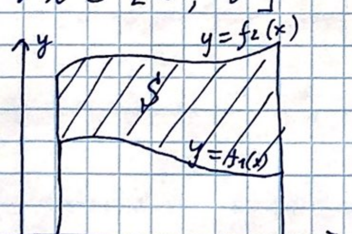
$y = f(x) < 0$ $\forall x \in [a; b]$ – криволин. трап. расположена ниже оси абсцисс

$$S = \int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Независимо от знака $f(x)$:

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

2. Площадь фигуры, огранич. непр. кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$; $x = a$; $x = b$, где $f_2(x) > f_1(x)$ $\forall x \in [a; b]$



S – есть разность площадей двух криволин. трапеций:

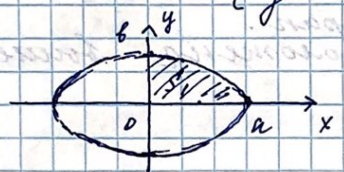
$$S = \left|\int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx\right|.$$

3. Площадь фигуры при задании кривой параметрическими ур-ниями

если непр. кривая задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то площадь фигуры, огранич. этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, вычисл. по ф-ле.

$$S = \left| \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt \right|,$$ где t_1 и t_2 находятся из ур-ний $a = \varphi(t_1)$; $b = \varphi(t_2)$

Прим. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$



S_1': $\begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}$ $\begin{cases} a\cos t = 0 \\ b = b\sin t \end{cases} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$

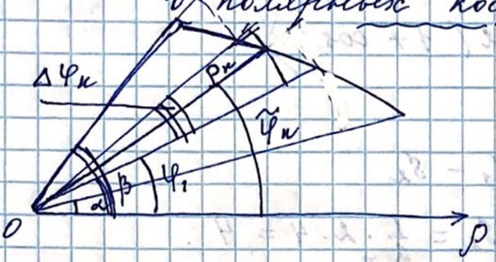
$\begin{cases} x = a \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow t_2 = 0.$

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,(-a\sin t)\,dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= -2ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos 2t)\,dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= -2ab\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi ab.$$

4. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах.



Пусть дана непр. ф-ция $\rho = \rho(\varphi)$ на $[\alpha; \beta]$, $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le 2\pi$

Аналогом криволин. трапеции явл. криволинейный тр-к, ограниченный лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$.

Аналогом пр-ка – круговой сектор.

Разобьем криволин. сектор лучами на n частичных криволин. секторов лучами:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_n = \beta$$

$$\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$$

В каждом частичном секторе возьмем произвольно $\tilde{\varphi}_k$ ($k = \overline{1,n}$), т.е. $\tilde{\varphi}_n \in \Delta\varphi_k$, где $\rho(\tilde{\varphi}_k)$ – радиус-вектор, соответствующий углу $\tilde{\varphi}_k$.

Обозначим $\rho_n = \rho(\tilde{\varphi}_n)$.

$$S_{\text{криволин. сектора}} \approx S_{\text{кругового сектора}}$$

$$S_{\text{кругового сектора}} = \frac{1}{2}\rho_k^2 \Delta\varphi_k = S_k$$

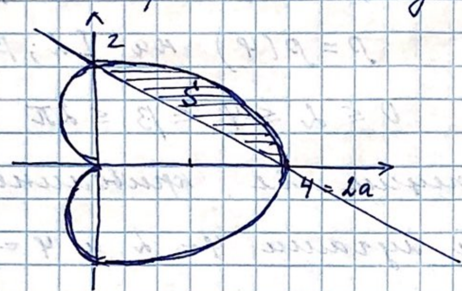
Суммируем: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \rho^2(\tilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k$ –

полученная сумма есть интегральная сумма для ф-ции $\rho^2(\varphi)$ ($\rho=\rho(\varphi)$ явл. непр. на $[\alpha, \beta]$, $\Rightarrow$, $\rho^2(\varphi)$ тоже непр. на $[\alpha; \beta]$), $\Rightarrow$,

$\exists$ конечный $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta\varphi_k \to 0}} \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \rho^2(\tilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$

Итак, $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$

<u>Прим.</u> Найти площадь фигуры, располож. внутри кардиоиды $r = 2(1+\cos\varphi)$ выше прямой $x+2y-4=0$



$$S = S_1 - S_2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4.$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2(1+\cos\varphi))^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 4\left(1+2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left(1+2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

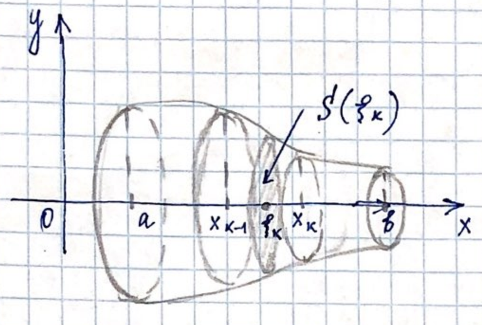
$$= 2\int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\left(\frac{3\pi}{4} + 2\right) = \frac{3\pi}{2} + 4.$$

$$S = \frac{3\pi}{2} + 4 - 4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений.



Дано тело T. Предположим, что известна площадь $\forall$ сечения тела плоскостью, $\perp$-ной оси Ox, т.е. площадь поперечного сечения $S = S(x)$, $a \le x \le b$.

Пусть $S(x)$ - непр. ф-ция.

Проведем плоскости $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, \dots$, $x = x_n = b$

Плоскости разбивают на слои. $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$

В каждом частичном интервале ΔX_k выберем произвольную т-ку ξ_k, и для каждого значения $k = 1, 2, \dots, n$ построим цилиндр. тело, образующая которого $\parallel$-на оси Ox, а направляющая явл. контуром сечения тела T плоскостью $x = \xi_k$.

Объем такого элементарного цилиндра с площадью основания $S(\xi_k)$ и высотой ΔX_k равен:

$V_k = S(\xi_k) \cdot \Delta x_k$

Объем всех цилиндров $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta X_k$ $(*)$

Опред. Предел интегральной суммы $(*)$ для непр. ф-ции $S(x)$, если он $\exists$, при $\max\limits_k \Delta X_k \to 0$ назыв. объемом данного тела:

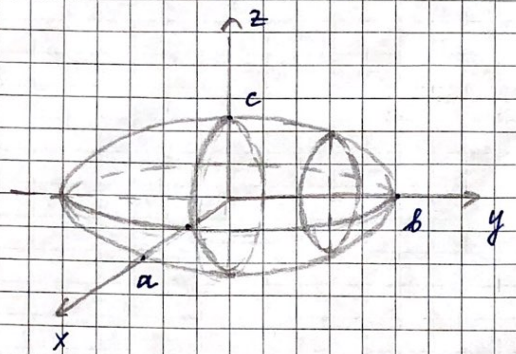
$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_k \Delta X_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx, \text{ т.е.}$$

(1) $V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$, где $S(x)$ - площадь поперечного сечения.

или $V = \int\limits_c^d S(y)\,dy$

или $V = \int_{c_1}^{d_1} S(z)\,dz$

Прим. Вычислить объём эллипсоида
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Сечение эллипсоида пл-тью, ∥-ной пл-ти XOZ и отстоящей на расстоянии y от нее - эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}=1$$

$a_1=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$; $c_1=c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ - полуоси эллипса.

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1$$

Площадь эллипса $S(y)=\pi a_1 c_1$, т.е.

$$S(y)=\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$V=\int_{-b}^{b}\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\pi ac\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

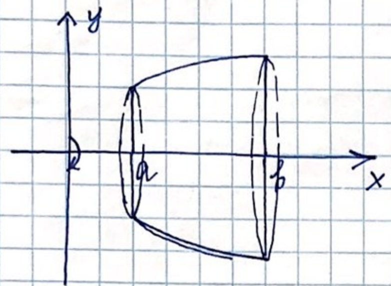
$$=2\pi ac\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi abc$$ ▲

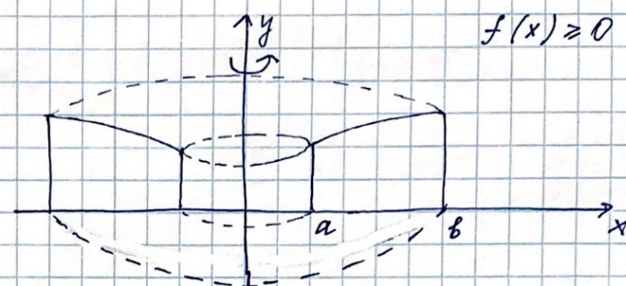
Вычисление объемов тел вращения в декартовых координатах

1) Вращение криволин. трапеции, огранич. линией $y = f(x)$ – непр. ф-ция, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ вокруг

оси Ox: оси Oy:

$f(x) \geq 0$





$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x\,y(x)\,dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

Покажем это: 1) $S(x) = S_{окр} = \pi y^2 = \pi f^2(x)$

Подставим в ф-лу (1) выч. объема тела по площади сечения и получим $V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ ▲

2) если же криволин. трапеция вращается вокруг оси Oy, то элемент объема этого тела можно рассматривать как разность объемов цилиндров:

$$\Delta V_k = \pi x_k^2 f(\xi_k) - \pi x_{k-1}^2 f(\xi_k) = \pi f(\xi_k)(x_k^2 - x_{k-1}^2) =$$

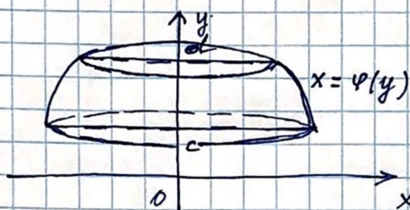
$$= \pi f(\xi_k)(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = 2\xi_k \pi f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

$$V_n = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

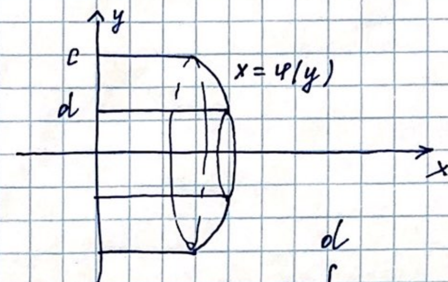
$$V = \lim_{\max\limits_k \Delta x_k \to 0} V_n = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xy\,dx$$ ▲

2) Вращение криволин. трапеции, огранич. линией $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$, вокруг

оси Oy



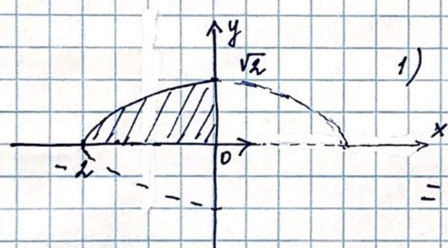
оси Ox



$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy$$

$$V_{Ox} = 2\pi \int_c^d x(y)\,y\,dy = 2\pi \int_c^d y\,\varphi(y)\,dy$$

Прим. Вычислить объем тела, образ. вращением фигуры, огранич. линиями $y = \sqrt{x+2}$, $y = 0$, $x = 0$ вокруг оси Ox и оси Oy.



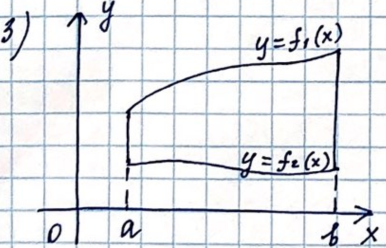
1) $V_{Ox} = \pi \int_{-2}^{0} y^2(x)\,dx = \pi \int_{-2}^{0} (x+2)\,dx =$

$= \dfrac{\pi}{2}(x+2)^2 \Big|_{-2}^{0} = \dfrac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi$ (ед.^{2})

2) $y^2 = x + 2 \Rightarrow x = y^2 - 2$

$$V_{Oy} = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (y^2-2)^2\,dy = \pi\left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 4y\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{15}\pi$$

3)



Вращение фигуры, огранич. прямыми $x = a$, $x = b$ и двумя непр. линиями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \geq f_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$)

вокруг

оси Ox: $V_{Ox} = \pi \int_a^b \left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right] dx$

оси Oy: $V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x\left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx$

Вычисление объема тела вращения в параметрическом виде

Пусть кривая задана параметр. ур-ниями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2, \quad \varphi(t_1) = a, \quad \varphi(t_2) = b$$

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt = 2\pi \int_a^b xy\,dx$$

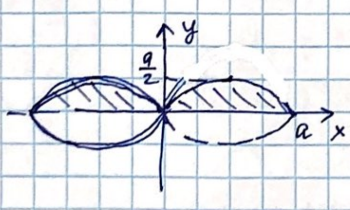
$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\,\psi'(t)\,dt \;; \quad \begin{matrix} c = \psi(\alpha) \\ d = \psi(\beta) \end{matrix}$$

Вычисление объема тела вращения в полярных координатах

Вращение криволин. сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\,d\varphi$$

Прим. $r = a\cos^2\varphi$ вращ. вокруг полярной оси. V - ?



$$V_p = \frac{2}{3}\pi \int_0^\pi a^3 \cos^6\varphi \sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3\cdot 7}\pi a^3 \cos^7\varphi \Big|_0^\pi = -\frac{2}{21}\pi a^3 (-1-1) =$$

$$= \frac{4}{21}\pi a^3$$

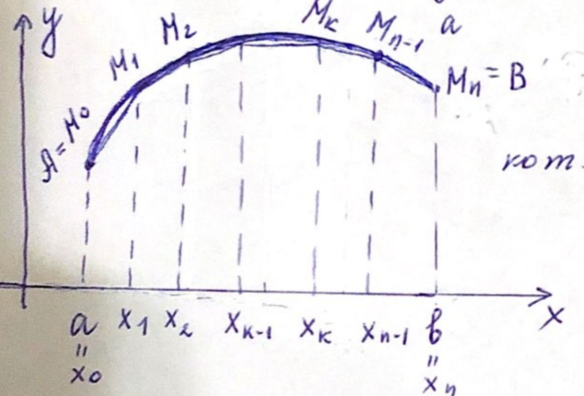
φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$\pi + \frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$	2π
r	a	$a/2$	0	$a/2$	a	$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	a

Вычисление длины дуги кривой и площади поверхности вращения

1. Вычисление длины дуги кривой, заданной в декартовых координатах

Пусть кривая AB задана ур-нием $y = f(x)$, где $f(x)$ - ф-ция непрерывная на $[a, b]$ и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке, тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$



Покажем это:
Разобьем дугу AB на n частей т-ками $M_0, M_1, \dots, M_n$, абсциссы кот. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Проведем хорды, соединив соседние т-ки, и получим ломаную, вписанную в дугу AB. Эта ломаная состоит из звеньев M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., $M_{n-1}M_n$, где $M_0 = A$ и $M_n = B$.

Обозначим длину хорды $M_0M_1 = l_1$, $M_1M_2 = l_2$, ..., $M_{n-1}M_n = l_n$, тогда периметр этой ломаной

$$l_n = l_1 + l_2 + \dots + l_n \text{ или } l_n = \sum_{k=1}^{n} l_k$$

Очевидно, что с уменьшением длин хорд ломаная по своей форме приближается к дуге AB.

Опред. Длиной l дуги AB кривой $y = f(x)$ назыв. предел длины вписанной в нее ломаной, когда число ее звеньев неограниченно растет, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю.

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max l_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} l_k . \quad (1)$$

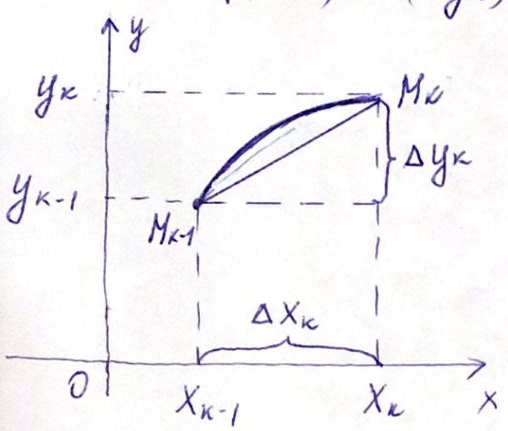
При этом предполагается, что этот предел $\exists$ и не зависит от выбора точек.

Опред. Кривые, для которых предел (1) существует, называются спрямляемыми.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \quad \text{или}$$

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \text{ где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$



$\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$

$y_{k-1} = f(x_{k-1})$

$y_k = f(x_k)$, где $k = 1, 2, \dots, n$.

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

По т-ме Лагранжа: $\dfrac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k)$,

где $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, тогда

$$l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\, \Delta x_k \quad \text{и}$$

длина вписанной ломаной $l_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k$ (*) – интегральная сумма.

$f'(x)$ непр. на $[a, b]$, $\Rightarrow$, $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ тоже непр. на $[a, b]$, поэтому $\exists$ предел интегральной суммы (*), который равен определенному интегралу, т.е.

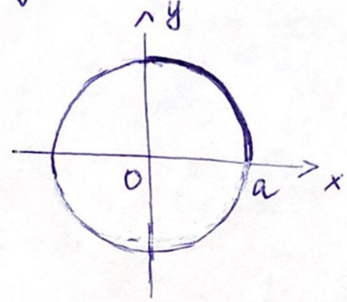
$$l = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Т.о. мы получили формулу для вычисления длины дуги кривой, если кривая задана в декарт. коорд.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \quad (2)$$

Прим. Вычислить длину части окружности $x^2+y^2=a^2$ в I квадранте.

Решение.



$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$l^*=\int_0^a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a\cdot\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a=a\cdot\arcsin 1=\frac{\pi}{2}a$$

Проверим: длина окружности $l=2\pi a$, тогда

$$l^*=\frac{1}{4}l=\frac{\pi}{2}a.$$

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\ t_1\le t\le t_2,\ \varphi(t),\psi(t),\varphi'(t),\psi'(t) -$$

непр. на $[t_1,t_2]$

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\ ,\quad a=\varphi(t_1),\ b=\varphi(t_2)$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\ ;\ dx=x'_t\,dt=\varphi'(t)dt$$

Подставляем в ф-лу (2) и получаем.

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\,x'_t\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt \qquad (3)$$

Прим. $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ - Вычислить длину одной арки циклоиды

$0 \le t \le 2\pi$

Решение.

$x'_t = a(1-\cos t)$

$y'_t = a\sin t$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(2-2\cos t)}\, dt = \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a.$$

3. Вычисление длины дуги кривой, заданной в полярных координатах.

Кривая задана в виде $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ полярными координатами ρ, φ.

Имеем: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

Найдем $x'_\varphi = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi$

$y'_\varphi = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi$

Воспользуемся формулой (3):

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2}\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2}\, d\varphi$$

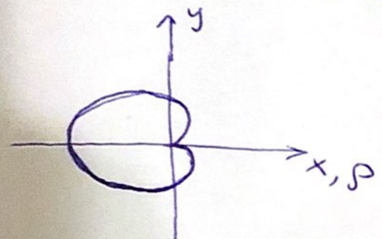
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2\cos^2\varphi - \cancel{2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi} + \rho^2\sin^2\varphi + (\rho')^2\sin^2\varphi + \cancel{2\rho'\rho\sin\varphi\cos\varphi} + \rho^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\varphi$$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\,d\varphi \quad (4)$$

Прим. Вычислить длину кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$

Решение



$$\rho' = \sin\varphi$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\varphi + (1-\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\,d\varphi = 4\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -8\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

4. Площадь поверхности вращения.

1) Дуга кривой, заданной ф-цией $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вращается вокруг оси Ox. Площадь пов-ти вращения выч. по ф-ле:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

2) Если дуга задана параметрически, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, тогда

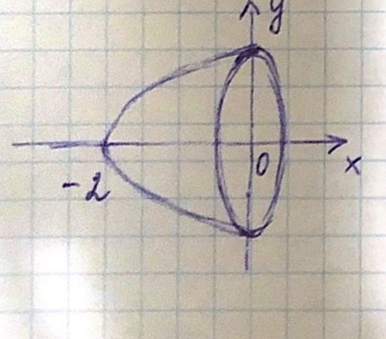
$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t)^2)}\,dt$$

3) если Дуга задана полярными координатами $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, тогда

$$Q_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

Прим. Определить площадь поверхности вращения параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y = \sqrt{x+2}$, $x < 0$

Решение.



$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

$$Q = 2\pi \int_{-2}^{0} \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4(x+2)}}\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{\cancel{2}} \int_{-2}^{0} \frac{\cancel{\sqrt{x+2}}\cdot\sqrt{4x+9}}{\cancel{\sqrt{x+2}}}\,dx = \pi \int_{-2}^{0} \sqrt{4x+9}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}_{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\pi\sqrt{4x+9}\,(4x+9)\Big|_{-2}^{0} = \frac{1}{6}\pi\left(3^3-1\right) = \frac{13}{3}\pi \text{ (кв. ед.)}$$