# Лекция 2

## Дифференциальные уравнения n-ого порядка

### 1. Задача Коши

Пусть имеем ДУ n-ого порядка $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, разрешенное относит. старшей производной $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Задача Коши (нач. задача): Найти решение ДУ (1), удовлетворяющее нач. условиям:

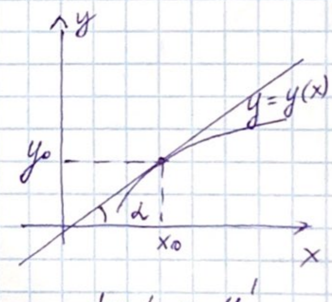
$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \dots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

ДУ 2-ого порядка, разреш. относит. старшей производной имеет вид $y'' = f(x, y, y')$. (3)

Задача Коши в сл. $n = 2$: Найти решение ДУ (3), удовл. нач. усл. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ (4).

Геометр. интерпретация задачи Коши для $n = 2$.

Находим интегральную кривую $y = y(x)$, прох. через т. $(x_0, y_0)$ с угловым коэф-том касательной в этой т-ке к интегр. кривой равным $y_0'$




$$tg\,\alpha = y_0'$$

Во многих физ. задачах приходится искать решение ДУ не по заданным нач. усл., а по их значениям на концах интервала. Такие задачи наз. краевыми (гранич.) задачами.

Краевая (граничная) задача: Найти решение, удовл. краевым усл.: $\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = A$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = B,$$ где

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - постоянные, не равные 0 одновременно.

Если $A = 0$, $B = 0$, то краевые усл. - однородные

Кр. зад. не всегда разрешимы

Т-ма Коши ( $\exists$ и ! решения задачи Коши )

Если в ДУ (1) ф-ция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ ограничены в некот. обл $D$ $(n+1)$-мерного пр-ва, то $\forall$ т-ки $M_0(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ $\exists$ в $U(x_0)$ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ единственное решение ДУ (1) $y = \varphi(x)$, удовлетв. нач. усл. (2)

Т-ма Коши ( $n = 2$ )

Если в ДУ (3) ф-ция $f(x, y, y')$ непрерывна, ее частные производные $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$ ограничены в некот. области $D$ 3-х мерного пр-ва, то $\forall$ т-ки $M_0(x_0, y_0, y_0') \in D$ $\exists$ в $U(x_0)$ единств. реш. ДУ (3) $y = \varphi(x)$, удовл. нач. усл. (4) : $y(x_0) = y_0$,

$$y'(x_0) = y_0'$$

Опред. Общим решением ДУ (1) назыв. ф-ция $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, зависящая от $x$ и $n$ произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$, такая, что:

1) при $\forall$ допустимых значениях постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$ ф-ция $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ явл. реш. ДУ (1)

2) Каковы бы ни были нач. усл. (2), можно так подобрать значения постоянных $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$, чтобы решение $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0)$ удовлетворяло заданным нач. условиям

Опред. Решение, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$, назыв. частным решением. Его график - кривую на пл-ти $xOy$ - интегральной кривой

Опред. Соотношение $\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, неявно определяющее общее решение, называют общим интегралом ДУ n-ого пор.

2 Понижение порядка некоторых типов ДУ n-ого порядка

1) $y^{(n)} = f(x)$ - ДУ n-ого порядка, зависящее только от $x$

Общее решение ДУ находим последовательным интегрированием

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left( \int f(x)\,dx + C_1 \right) dx + C_2 = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2$$

. . . . . . .

$$y(x) = \int dx \int dx \dots \int f(x)\,dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

Прим. Найти общее реш. ДУ: $y''' = \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x}$

$$y'' = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x}\,dx = -2 \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + C_1$$

$$y' = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + C_1 \right) dx = \operatorname{tg} x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left( \frac{\sin x}{\cos x} + C_1 x + C_2 \right) dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} +$$

$$+ \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3 = -\ln|\cos x| + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

2) $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ — ДУ, не содержащее явно искомой ф-ции $y$ и ее производных $y', \dots, y^{(k-1)}$.

Порядок этого ДУ понижается на $k$

заменой $y^{(k)} = p(x)$

Находим общее реш. ДУ $F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0$

$p = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$ и тогда

$y^{(k)} = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$. А затем последовательным интегрированием находим

общее реш $y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n)$ исходного ДУ.

Част. сл. ДУ 2-ого порядка $F(x, y', y'') = 0$, не содержащие искомой ф-ции $y$, заменой $y' = p(x)$ приводится к ДУ 1-ого пор $F(x, p, p') = 0$

Прим $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ ; $y(1) = 0$, $y'(1) = e^2$

Замена: $y' = p(x)$ ; $y'' = p'(x)$

$xp' = p \ln \frac{p}{x}$ ; $p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$ - однород. ДУ 1-ого пор.

$\frac{p}{x} = u(x)$ ; $p = u \cdot x$ ; $p' = u'x + u$

$u'x + u = u \ln u$ - ДУ с разд. перем.

$$\frac{du}{u \ln u - u} = \frac{dx}{x} ; \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln c_1$

$\ln u - 1 = c_1 x \Rightarrow \ln u = c_1 x + 1 \Rightarrow u = e^{c_1 x + 1}$

$p(x) = x \cdot e^{1 + c_1 x} \Rightarrow y' = x \cdot e^{1 + c_1 x}$

найдем $c_1$:

Нач. усл. $y'(1) = e^2$, $\Rightarrow$, $e^2 = e^{1 + c_1} \Rightarrow \underline{c_1 = 1}$

$y' = x e^{1+x}$

$y = \int x e^{1+x} dx = \int x \, d(e^{1+x}) = x \cdot e^{1+x} - \int e^{1+x} dx =$

$= x e^{1+x} - e^{1+x} + c_2$

Найдем $c_2$

Нач. усл. $y(1) = 0$, $\Rightarrow$, $0 = e^2 - e^2 + c_2 \Rightarrow \underline{c_2 = 0}$

$y = (x-1) e^{x+1}$ - частное реш. ДУ

Найдем общее решение:

$y' = x \cdot e^{1 + c_1 x}$

$y = \int x e^{1 + c_1 x} dx = \frac{1}{c_1} \int x \, d(e^{1 + c_1 x}) =$

$= \frac{1}{c_1} \left( x \cdot e^{1 + c_1 x} - \frac{1}{c_1} \int e^{1 + c_1 x} d(1 + c_1 x) \right) =$

$= \frac{1}{c_1} x e^{1 + c_1 x} - \frac{1}{c_1^2} e^{1 + c_1 x} + c_2$

3) $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ – ДУ не содержит переменной $x$

Порядок ДУ понижается на единицу подстановкой: $y' = p(y)$

$$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot p = p\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\cdot\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}\right) =$$

$$= \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dp}{dy} + p\frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx} =$$

$$= p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2} = p\cdot(p')^2 + p^2\cdot p''$$

Част. сл. $(n=2)$

$F(y, y', y'') = 0$ – ДУ не зависит от $x$

Замена: $y' = p(y)$ :

$$y'' = p'\cdot p = p\frac{dp}{dy}$$

Получаем ДУ: $F\left(y, p(y), p\frac{dp}{dy}\right) = 0$

Прим. Найти частное решение ДУ.

$3y'y'' = e^{-y}$ $\quad y(-3) = 0$ ; $y'(-3) = -1$

Замена: $y' = p(y)$ ; $y'' = p\frac{dp}{dy}$

$$3p\cdot p\frac{dp}{dy} = e^{-y}$$

$3p^2dp = e^{-y}dy$ ; $3\int p^2dp = \int e^{-y}dy$

$p^3 = -e^{-y} + C_1$

Найдем $C_1$: $\begin{cases}(y')^3 = -e^{-y} + C_1\\ y' = -1\\ y = 0\end{cases}$ $\quad -1 = -1 + C_1 \Rightarrow \underline{C_1 = 0}$

$p^3 = -e^{-y}$ ; $(y')^3 = -e^{-y}$ ; $y' = -e^{-\frac{y}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{y}{3}}$ ; $\int e^{\frac{y}{3}}dy = -\int dx$ ; $3e^{y/3} = -x + C_2$

Найдем $C_2$: $\begin{cases}3e^{y/3} = -x + C_2\\ y = 0\\ x = -3\end{cases}$ $\Rightarrow \underline{C_2 = 0}$

$x = -3e^{y/3}$ – част. реш. ДУ

4) $\frac{d}{dx} F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ - Л.ч. ДУ явл. полным диф-лом некот. выражения.

Интегрируя по $x$, получим ДУ, порядок кот. на единицу ниже порядка исходного ДУ.

Прим $\frac{(y'')^2 - y'y'''}{(y')^2} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{-y''}{y'}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow -\frac{y''}{y'} = -\frac{1}{x} - c_1$

$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} + c_1$ - не содержит $y(x)$ в явном виде.

Замена: $y' = p(x)$

$y'' = p'(x)$

$\frac{p'}{p} = \frac{1}{x} + c_1$;

$\int \frac{dp}{p} = \int \left(\frac{1}{x} + c_1\right) dx$

$\ln|p| = \ln|x| + c_1 x + \ln c_2$

$p = c_2 x e^{c_1 x} \Rightarrow y' = c_2 x e^{c_1 x}$

$\int dy = c_2 \int x e^{c_1 x} dx$

$y = \frac{c_2}{c_1} \int x\, d(e^{c_1 x}) = \frac{c_2}{c_1}\left(x \cdot e^{c_1 x} - \int e^{c_1 x} dx\right) =$

$= \frac{c_2}{c_1}\left(x e^{c_1 x} - \frac{1}{c_1} e^{c_1 x}\right) + c_3 =$

$= \bar{c}_2 \left(x e^{c_1 x} - \frac{1}{c_1} e^{c_1 x}\right) + c_3$.