Лекция 1

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Основные понятия

Опред. Обыкновенным д.у. n-ого порядка назыв. ур-ние, зависящее от одной независ. переменной x, неизвестной ф-ции $y(x)$ и её производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (1)

Если из д.у. (1) можно выразить n-ую производную, то это д.у. назыв. разрешенным относительно старшей производной.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2)$$

Искомая ф-ция y - есть ф-ция одного действит. переменного.

Опред. Порядком д.у. назыв. максимальный порядок производной, входящей в д.у.

Опред. Решением д.у. (1) или (2) назыв. ф-ция $y = \varphi(x)$ такая, что после подстановки $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)$ в д.у. (1) или (2) получается верное тождество для всех значений x в конечном или бесконечном интервале (a, b): $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$

Прим. $y' = 2x$; $y = x^2$ - решение, т.к. $y' = (x^2)' = 2x$

Опред. Нахождение решений д.у. назыв. интегрированием д.у.

Опред. Гр-к решения д.у. наз. интегральной кривой этого д.у.

Примеры задач, приводящих к диф. ур-ниям.

Задача 1 Найти закон движения точки, если она движется вдоль оси Ox и её скорость в каждый данный момент времени равна $f(t)$.

Решение: По усл. задачи $\frac{dx}{dt} = f(t)$ - д.у. этой задачи.

$$dx = f(t)\,dt$$

$$x(t) = \int f(t)\,dt + C$$

2. Дифференциальные ур-ния 1-ого порядка

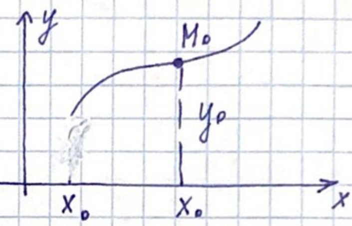
Опред. Общий вид д.у. 1-ого порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

Если это д.у. можно разрешить относительно y', то получаем $y' = f(x, y)$ ~~(*)~~ д.у. 1-ого порядка, разрешенное относит производной

Опред. Задачей Коши (задачей с нач. усл.) наз. задачу нахождения решения $y = y(x)$ д.у. $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ (или $y|_{x=x_0} = y_0$).

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ пл-ти xOy



Т-ма Коши (∃и! решения задачи Коши)

Пусть дано д.у. $y' = f(x, y)$, где ф-ция $f(x, y)$ определена в некот. обл. D пл-ти xOy, содержащей т-ку (x_0, y_0). Если ф-ция $f(x, y)$ удовл. след. усл.

1) $f(x, y)$ – непр. ф-ция двух переменных x и y в обл. D
2) $f'_y(x, y)$ – непр. и огранич. в обл. D пл-ти xOy, тогда найдется интервал $(x_0 - h; x_0 + h)$, на котором ∃и! решение $y = \varphi(x)$ данного д.у., удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Замеч. Т-ма дает достаточные усл. сущ-ния единственного реш. зад. Коши для д.у. $y' = f(x, y)$, но эти усл. не явл. необходимыми.

Прим 1. $y' = xy + e^{-y}$

$f(x, y) = xy + e^{-y}$ – непр. на пл-ти xOy

$f'_y(x, y) = x - e^{-y}$ – опред. и непр. на пл-ти xOy.

$\Rightarrow$, $\forall$ нач. усл. на всей плоскости xOy $\exists$ единственное решение этого д.у.

Прим. 2 $\quad y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$

$f(x,y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ – опред. и непр. на всей пл-ти xOy

$f'_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ обращ. в бесконечность при $y = 0$,

т.е. на оси Ox, т.е. при $y = 0$ нарушается усл. 2) т-мы $\exists$ и !-ти. Сл-но, в точках оси Ox возможно наруш. ед-ти.

Опред. Общим решением д.у. $y' = f(x, y)$ назыв. ф-ция $y = \varphi(x, C)$, обладающая св-вами:

1) зависит от независ. перем. x и одной произвольной C
2) при $\forall$ допустимом знач. C явл. реш. д.у.
3) каково бы ни было нач. усл. $y|_{x=x_0} = y_0$, можно подобрать такое знач. C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному нач. усл.

Опред. Частным реш. д.у. назыв. решение, получаемое из общего решения при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C.

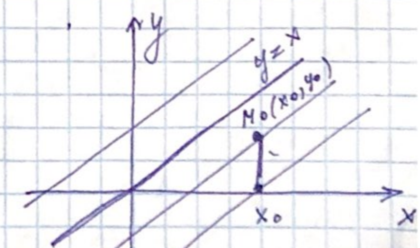
Прим. 1 $y' = 1$

Проверить, что $y = x + C$ – общее реш. д.у.
Найти част. реш., удовл. нач. усл. $y|_{x=0} = 0$
Дать геометр. интерпритацию рез-та

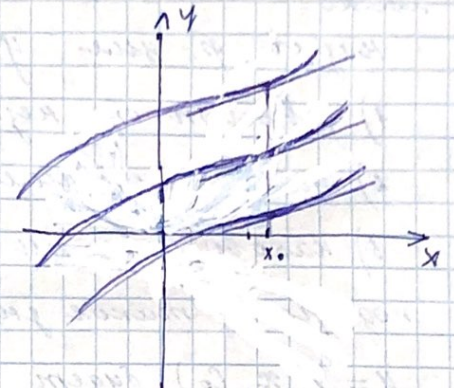
Решение: $\forall C$ $y = x + C$ – удовлетв. данному д.у., т.к. $y' = (x + C)' = 1$.

Зададим произвольное нач. усл. $y|_{x=x_0} = y_0$
Полагая $x = x_0$ и $y = y_0$ в рав-ве $y = x + C$, получим $y_0 = x_0 + C \Rightarrow C = y_0 - x_0$
Подставим найденное знач. C в ф-цию $y = x + C$: $y = x + y_0 - x_0$ – эта ф-ция удовл. заданному нач. усл., т.к. положив $x = x_0$, будем иметь $y = x_0 + y_0 - x_0 = y_0$
Итак, ф-ция $y = x + C$ – общее реш. д.у. $y' = 1$
Положим $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ и получим частное реш. $y = x$

Общее реш. д.у., т.е. ф-ция $y = x + C$ определяет в плоскости сем-во парал. прямых с $k = 1$
Через каждую т-ку $M_0(x_0, y_0)$ прох. единств. интегральная линия $y = x + y_0 - x_0$ $y = x$ – част. реш., которому соотв. прямая, прох. через начало коорд.



Гр-ком общего решения явл. однопараметрическое сем-во интегральных кривых (C-пар-р), облад. св-вом: в т-ках с одинаковой абсциссой касательные к интегр. кривым параллельны



Опред. Особым решением д.у. $y' = f(x, y)$ назыв. такое ее решение $y = \psi(x)$, во всех т-ках которого условие единственности решения не выполняется, иначе говоря, для произвольной т-ки $(x_0, \psi(x_0))$ $\exists$, по крайней мере, еще одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$ д.у. $y' = f(x, y)$, проходящая через эту точку и не совпадающая с интегральной кривой $y = \psi(x)$.

Особое решение не зависит от постоянной C

Особое решение нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C

Опред. Соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно определяющее общее решение, назыв. общим интегралом д.у. 1-ого порядка.

Соотношение, получаемое из общего интеграла при конкретном знач. постоянной C, назыв. частным интегралом д.у.

Задача решения или интегрирования д.у. состоит в нахождении общего решения или общего интеграла данного д.у.

Если дополнительно задано нач. усл., то требуется выделить частное реш. или частный интеграл, удовлетворяющие поставленному нач. условию.

Метод изоклин.

$y' = f(x, y)$ - д.у. определяет в каждой т-ке (x, y), где $\exists$ ф-ция $f(x, y)$, значение y', т.е. угловой коэф-т касательной к интегральной кривой в этой т-ке.

Опред. Изоклиной наз. геометр. место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и то же направление.

Семейство изоклин д.у. определяется ур-нием:

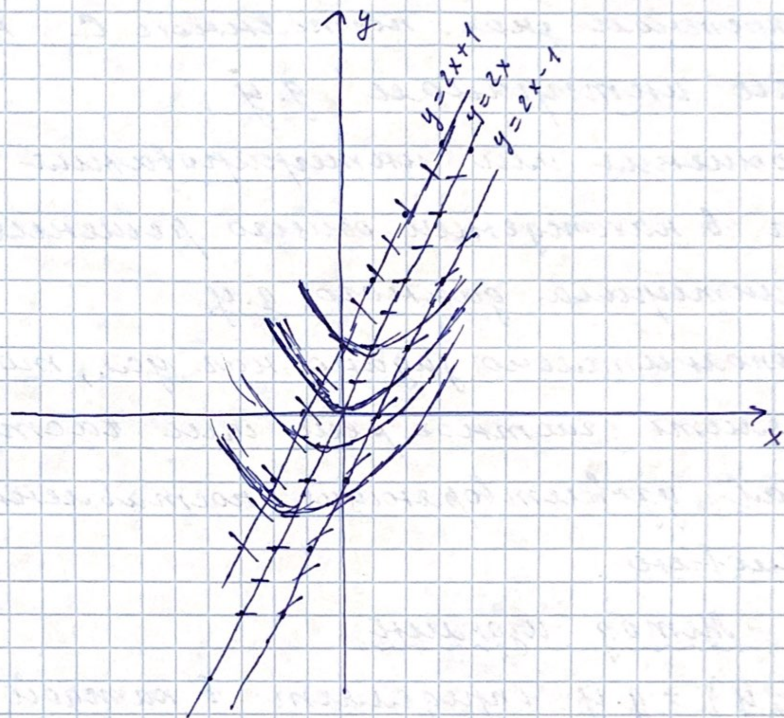
$f(x, y) = k$, где k - параметр.

Придавая пар-ру k числ. значения, получаем сеть изоклин, с пом. которых можно приближенно построить интегральные кривые д.у. $y' = f(x, y)$.

-7- Прим. С пом. изоклин постр. приближенно интегр. кривые д.у. $y' = 2x - y$

Решение. $y' = k$, $k = const$

$2x - y = k$ или $y = 2x - k$ – ур-ние изоклин



$k = 0$; $tg\,\alpha = 0$; $y = 2x$

$k = -1$ $tg\,\alpha = -1$ $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ $y = 2x + 1$

$k = 1$ $tg\,\alpha = 1$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $y = 2x - 1$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Опред 1 Д.у. 1-ого порядка с разделяющимися переменными наз. диф. ур-ние вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \qquad (*)$$

или вида $f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$, $(**)$

где $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ - непр и зависят только от x,

и $g(y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ - непр. и зависят только от y.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \;\Big|\cdot \frac{dx}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0.$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx; \quad g(y) \neq 0 \qquad (***)$$

Получим ур-ние с разделенными переменными.

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{g_1(y)\, f_2(x)}$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy, \quad g_1(y) \neq 0, \; f_2(x) \neq 0.$$

Также получим ур-ние с разделенными переменными

Интегрируя $(***)$, находим общий интеграл д.у.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C, \quad g(y) \neq 0.$$

или общее решение д.у. $(*)$

Замеч. При делении $(*)$ на $g(y)$ или $(**)$ на $g_1(y)\, f_2(x)$ возможна потеря решений. Если ур-ние $g(y) = 0$, $g_1(y) = 0$, $f_2(x) = 0$ имеют действит. решение $y = y_1$, $x = x_1$, $y = y_2$, кот. явл. решениями д.у., то они могут оказаться особыми решениями, т.е. реш., где нарушаются условие т-мы Коши.

Прим. Решить д.у.

(1) $(x+xy^2)\,dx-(y+x^2y)\,dy=0$

$\frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}\Big|$ $x(1+y^2)\,dx-y(1+x^2)\,dy=0$ - ур-ние с разд. перем.

$\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{y}{1+y^2}dy$

$\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}$

$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln c$

$1+y^2=c(1+x^2)$ - общий интеграл д.у

(2) $\frac{dy}{dx}=e^{y-x}$ $\quad y(0)=\ln 2$

Решить задачу Коши.

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{e^x}$

$\frac{dy}{e^y}=\frac{dx}{e^x}$

$e^{-y}dy=e^{-x}dx$

$\int e^{-y}dy=\int e^{-x}dx$

$-e^{-y}=-e^{-x}-C$

$\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^x}+C$

$\frac{1}{e^y}=\frac{1+Ce^x}{e^x}\Rightarrow e^y=\frac{e^x}{1+Ce^x}$ - общий интеграл д.у.

Найдем частный интеграл:

$y(0)=\ln 2$

$e^{\ln 2}=\frac{e^0}{1+Ce^0}$; $\quad 2=\frac{1}{1+C}$

$1+C=\frac{1}{2}$; $\quad C=-\frac{1}{2}$

$e^y=\frac{e^x}{1-\frac{1}{2}e^x}$ - частный интеграл д.у

Однородные ДУ 1-ого порядка

Опред Ф-ция $f(x,y)$ наз. однородной ф-цией степени n относительно переменных x и y, если $\forall t$ справедливо рав-во:

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

Опред ДУ $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ (v) назыв. однородным, если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные ф-ции одинаковой степени однородности.

Ур-ние (v) м.б. приведено к виду

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (u) ; $f\left(\frac{x}{y}\right)$ – однород. ф-ция нулевой ст.

Замена: $u(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$

$$y' = u'x + u$$

Подставляем в (u):

$$u'x + u = f(u)$$

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{du}{f(u)-u} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + C$$

Прим $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} = u$; $y = ux$; $y' = u'x + u$

$u'x + u = \frac{1}{u} + u$

$u'x = \frac{1}{u}$; $x\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$; $x\,du = \frac{dx}{u}$;

$u\,du = \frac{dx}{x}$; $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$

$$u^2 = 2\ln|x| + 2C \; = C$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + \ln C$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \ln Cx^2$$

$y^2 = x^2 \ln Cx^2$ - общее реш.

Линейные ДУ 1-ого порядка

Уравнение Бернулли

Опред. ДУ вида $y' + p(x)y = q(x)$ (1),
где $p(x)$, $q(x)$ – непр. ф-ции назыв. ЛДУ 1-ого порядка (это ДУ явл. лин. относит. y и y').

Если $q(x) = 0$, то ур-ние (1) примет вид: $y' + p(x)y = 0$ (2) соответств. однородное ЛДУ 1-ого пор.
Оно явл. ур-нием с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \Big| \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C$$

$$y = C\cdot e^{-\int p(x)dx}$$ (3), где C – произвольная пост., $C>0$
$\int p(x)dx$ – одна из первообр. ф-ции $p(x)$

При делении на $y \neq 0$ могло быть потеряно решение $y=0$, но оно входит в реш. (3) при $C=0$.

Интегрирование ЛДУ 1-ого порядка

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Рассм. $y' + p(x)y = q(x)$

1. Решим соотв. однородное ЛДУ 1-ого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y_{o.o.} = C\cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad C = const$$

2. $y_{o.н.} = C(x)\, e^{-\int p(x)dx}$ (4)

$$y'_{o.н.} = C' e^{-\int p(x)dx} + C e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x))$$

Подставим $y_{o.н.}$ и $y'_{o.н.}$ в исходное ДУ (1)

$$C' e^{-\int p(x)dx} + \underline{C e^{-\int p(x)dx}\cdot(-p(x)) + p(x)\, C e^{-\int p(x)dx}} = q(x)$$

$$C' e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\frac{dC}{dx} = q(x)\, e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + C_1, \quad C_1 = const$$

3. Подставляем найденную $C(x)$ в (4):

$$y_{о.н.} = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C_1\right) e^{-\int p(x)\,dx} =$$

$$= C_1 e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx$$

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$$

Метод Бернулли (метод u и v)

Общее реш. неоднород. ЛДУ 1-ого порядка ищем в виде пр-ния двух неизвест. ф-ций

$$y_{о.н.} = u(x)\, v(x)$$

$$y'_{о.н.} = u'v + uv'$$

Подставляем $y_{о.н.}$ и $y'_{о.н.}$ в исходное ДУ.

$$u'v + uv' + p(x)\, uv = q(x)$$

$$v(u' + p(x)\, u) + uv' = q(x)$$

1) Ф-цию u ищем из условия

$$u' + p(x)\, u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -p(x)\, u \ ; \quad \frac{du}{u} = -p(x)\, dx \ ; \quad u = e^{-\int p(x)\,dx} \quad (c = 0)$$

2) $uv' = q(x)$

$$e^{-\int p(x)\,dx}\, \frac{dv}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\int dv = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx$$

$$v = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C$$

$$y_{о.н.} = u \cdot v \ ; \quad y_{о.н.} = e^{-\int p(x)\,dx} \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + C\right)$$

$$y_{о.н.} = C e^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx$$

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$$

Прим. 1 $\quad y' - y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x}$ $\quad$ (Решить задачу Коши) $y(0)=0$

Метод Лагранжа: (метод вариации) $\quad$ 1) $y' - y\,tg\,x = 0$

$$y' = y\,tg\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,tg\,x \;\Big|\cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = tg\,x\,dx \qquad ;\ y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$\ln|y| = \ln C - \ln|\cos x| \Rightarrow y_{о.о.} = \frac{C}{\cos x}$$

2) $y_{о.н.} = \frac{C(x)}{\cos x}$

$$y'_{о.н.} = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} = C'\cdot\frac{1}{\cos x} + \frac{C(x)}{\cos x}\cdot tg\,x$$

Подставим в исходное:

$$C'\cdot\frac{1}{\cos x} + \cancel{\frac{C(x)}{\cos x}\cdot tg\,x} - \cancel{\frac{C(x)}{\cos x}\cdot tg\,x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$C'\cdot\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C' = 1$$

$$\frac{dC}{dx} = 1\ ;\ \int dC = \int dx\ ;\ C(x) = x + C_1,\ C_1 = const.$$

Итак, $y_{о.н.} = \frac{x + C_1}{\cos x}$ – Общее реш. ЛНДУ 1 пор.

$$0 = \frac{0 + C_1}{\cos 0} \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y_{ч.н.} = \frac{x}{\cos x}$$

Прим. 2 $\quad xy' - 2y = 2x^4$

$$y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3$$

$$y = u\cdot v\ ;\ y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - 2\frac{uv}{x} = 2x^3$$

$$v\left(u' - 2\frac{u}{x}\right) + uv' = 2x^3 \quad (*)$$

$$u' - 2\frac{u}{x} = 0\ ;\ u' = \frac{2u}{x}\ ;\ \frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}\ ;\ u = x^2$$

(*) $\quad x^2 v' = 2x^3$

$v' = 2x$

$v = 2\int x\,dx = x^2 + C$

$\underline{y_{о.н} = x^2(x^2 + C)}$

Рассм. лин. ДУ относительно x и x':

$$x' + p(y)x = q(y)$$

Оно интегрируется аналогично рассмотренными выше двумя способами.

Напр. $y = (2x + y^3)y'$

$$y = (2x + y^3)\frac{dy}{dx}$$

$$y\,dx - (2x + y^3)\,dy = 0$$

$$y\frac{dx}{dy} - 2x = y^3$$

$$x' - 2\frac{x}{y} = y^2 \text{ — лин. отн. } x \text{ и } x'.$$

$x_{о.н.} = u(y)\cdot v(y)$. (метод Бернулли)

$x' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - 2\frac{uv}{y} = y^2$; $v\left(u' - 2\frac{u}{y}\right) + uv' = y^2$

$$\begin{cases} u' - \frac{2u}{y} = 0 \\ uv' = y^2 \end{cases}$$

1) $u' - \frac{2u}{y} = 0$

$u' = \frac{2u}{y}$

$\frac{du}{u} = 2\frac{dy}{y}$

$\int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dy}{y}$

$\ln u = 2\ln y$

$u = y^2$ - часть реш.

2) $uv' = y^2$

$y^2 v' = y^2$

$v' = 1$

$dv = dy$

$\int dv = \int dy$

$v = y + C$ - часть реш.

3) $x = u\cdot v$

$x = y^2(y + C)$

Уравнение Бернулли

Опред. Д.у. вида $y' + p(x)y = q(x)\,y^n$, где $n \in R$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ называется уравнением Бернулли

Заметим, что при $n = 0$ ур-ние Б. превращается в лин. д.у. 1-ого порядка, а при $n = 1$ - в ур-ние с разделяющимися переменными.

Чтобы решить ур-ние Бернулли, надо обе ее части разделить на y^n и сделать замену $y^{1-n} = z$. Это его к лин. диф. ур-нию 1-ого пор. Покажем это:

$$y' + p(x)y = q(x)\,y^n \quad | : y^n \neq 0$$

$$y^{-n}y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

Подстановка: $y^{1-n} = z$, тогда

$$z' = (1-n)\,y^{-n}y' \Rightarrow,$$

и $y^{-n}y' = \frac{1}{1-n} z'$ и получаем

$$\frac{1}{1-n} z' + p(x)\,z = q(x) \quad \text{или}$$

$$z' + (1-n)\,p(x)\,z = (1-n)\,q(x) \text{ - лин. д.у.}$$

1-ого порядка, кот. решается либо методом Лагранжа (методом вариации), либо методом Бернулли.

Прим. Решить ур-ние $y' + y = e^{2x}y^2 \quad | : y^2 \neq 0$.

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = e^{2x}$$

Замена: $z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$$z' = -\frac{1}{y^2}\,y', \text{ тогда}$$

$$-z' + z = e^{2x}$$

$z' - z = -e^{2x}$ – лин. д.у. 1-ого пор.

Решим по методом Лагранжа:

1) $z' - z = 0$

$\frac{dz}{dx} = z$; $\frac{dz}{z} = dx$; $\ln z = x + C$

$z_{o.o.} = e^{C+x} = C \cdot e^x$

2) $z_{o.н.} = C(x) \cdot e^x$

$z'_{o.н.} = C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x$

$C'(x) e^x + \cancel{C(x) e^x} - \cancel{C(x) e^x} = -e^{2x}$

$C'(x) e^x = -e^{2x} \;/ : e^x \neq 0$

$C'(x) = -e^x$, $\Rightarrow$, $C(x) = -e^x + C$

$z_{o.н.} = (C - e^x) e^x = C e^x - e^{2x}$

т.к. $y = z^{-1}$, то $\underline{y = (C e^x - e^{2x})^{-1}}$ – общее реш. исходного д.у.

Данное д.у. имеет еще решение $y = 0$, которое мы потеряли при делении на $y^2 \neq 0$ и оно не описано общим решением

Замеч. Ур-ние Бернулли можно решить сразу с пом. метода Бернулли подстановкой

$y = u\,v$

Прим. Решить ур-ние $xy' - y = x^2 \sqrt{y}$ $\left(r = \frac{1}{2}\right)$

$y = uv$; $y' = u'v + uv'$

$x(u'v + uv') - uv = x^2 \sqrt{uv}$

$xu'v + u(xv' - v) = x^2 \sqrt{uv}$

$$\begin{cases} xv' - v = 0 \\ xu'v = x^2 \sqrt{uv} \end{cases}$$

1) $xv' = v$

$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$

$v = x$

2) $x^2 u' = x^2 \sqrt{uv}$

$u' = \sqrt{uv}$

$u = \left(\frac{x\sqrt{x}}{3} + C\right)^2$

3) $y = u \cdot v$

$y = x\left(\frac{x\sqrt{x}}{3} + C\right)^2$

4) $y = 0$ – также реш. д.у. (особое реш.)