Лекция

Интегрирование ЛНДУ методом вариации постоянных (метод Лагранжа)

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

ф-ции $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ непрерывны на $[a; b]$

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0 \quad \text{- соотв. ЛОДУ.} \quad (2)$$

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - известная ФСР ЛОДУ (2)

Будем искать решение ЛНДУ (1) в виде:

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x), \text{ где} \quad (3)$$

$C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ - новые неизв. ф-ции, которые определяем из сис-мы:

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 + \ldots + C_n'(x)\, y_n = 0 \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' + \ldots + C_n'(x)\, y_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-2)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)\, y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (4)$$

Определитель этой сис-мы есть определитель Вронского ФСР соотв. однородного ДУ и, $\Rightarrow$, отличен от нуля всюду на $[a; b]$. Поэтому сис-ма (4) однозначно разрешима относительно $C_i'(x)$, $i = \overline{1, n}$

Решая её, находим $C_i'(x) = \varphi_i(x)$, а затем интегрируем: $C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + C_i$, $i = \overline{1, n}$

Подставляем найденные выр-ния для $C_i(x)$ в решение (3) и получаем общее решение $y(x)$ исходного ЛНДУ (1):

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)\, dx, \text{ где}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные.

Рассм. ЛНДУ 2-ого пор.: $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$ (1*),

соотв. однород. ДУ $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ (2*),

ф-ции $p_1(x), p_2(x), f(x)$ непрерывны на $[a, b]$,

$y_1(x), y_2(x)$ – ФСР ЛОДУ (2*), тогда

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$ где C_1, C_2 – постоянные.

Решение ЛНДУ (1) будем искать в виде:

$$\underline{y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)},$$ где $C_1(x), C_2(x)$ – неизв. ф-ции от x (3*)

Для их нахождения необходимы два ур-ния, содержащие эти ф-ции.

$$y' = C_1'(x)\cdot y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) =$$
$$= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)$$

На ф-ции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ наложим доп. усл.:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0,$$ тогда (4*)

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) = C_1y_1' + C_2y_2'$$

$$y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$$

Подставим выр-ния для y, y', y'' в исходное ДУ (1*):

$$C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + (C_1y_1' + C_2y_2')p_1(x) +$$
$$+ (C_1y_1 + C_2y_2)\cdot p_2(x) = f(x)$$

$$C_1(x)\overbrace{\left(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\right)}^{=0 \text{ } y_1 \text{ - реш. ЛОДУ(2*)}} + C_2(x)\overbrace{\left(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\right)}^{=0 \text{ } y_2 \text{ - реш. ЛОДУ(2*)}}$$
$$+ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x),$$ тогда получаем:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x) + y_2'(x) = f(x)$$ (5*)

Значит, ф-ция $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ будет

(на обр. стороне).

решением ЛНДУ (1*), если ф-ции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ будут удовлетворять одновременно ур-ниям (4*) и (5*), т.е. сис-ме:

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

, определитель кот. есть определитель Вронского лин. незав. решений $y_1(x), y_2(x)$ ЛОДУ (2*) и, $\Rightarrow$, отличен от нуля $\forall x \in [a, b]$. Решаем эту сис-му как СЛАУ относительно $c_1'(x)$, $c_2'(x)$:

$$c_1'(x) = \varphi_1(x) \quad ; \quad c_2'(x) = \varphi_2(x)$$

Интегрируем: $c_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1$

$$c_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Итак, общее решение ЛНДУ (1*) получаем, подставив эти выр-ния в (3*):

$$y(x) = \left(\int \varphi_1(x)\,dx + C_1\right) y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x)\,dx + C_2\right) y_2(x) =$$

$$= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_1(x) \int \varphi_1(x)\,dx + y_2(x) \int \varphi_2(x)\,dx,$$

где C_1 и C_2 – произвольные пост.

Метод вариации постоянных – общий метод решения ЛНДУ.

Прим. Решить ЛНДУ

$$y''' + y' = \frac{1}{\sin x}$$

1) $y''' + y' = 0$

$k^3 + k = 0$; $k(k^2+1) = 0$ $\quad k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$

$y_{oo} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

$y_1 = 1$; $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$ – ФСР ЛОДУ.

2) $y_{o.н.} = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0 & |\cdot \sin x \\ C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \frac{1}{\sin x} & |\cdot \cos x \end{cases} +$$

$$-C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow C_2'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cos x + C_3'(x)\cdot \cos x = 0 \Rightarrow C_3'(x) = -1$$

$$C_1'(x) - \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x = 0 \Rightarrow C_1'(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} dx = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = \int \frac{d(\sin\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} - \int \frac{d(\cos\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C_1$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\ln|\sin x| + C_2$$

$$C_3(x) = -\int dx = -x + C_3$$

$$y_{o.н.} = \left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C_1\right) + (C_2 - \ln|\sin x|)\cos x +$$

$$+ (C_3 - x)\sin x =$$

$$= C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x + \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| - \cos x \cdot \ln|\sin x| - x\sin x.$$

В ол. ДУ с пост. коэф-тами част. реш. неоднород. ур-ния возможно найти методом подбора

ЛНДУ n-ого пор. с постоянными коэф-тами

1. Метод подбора

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=f(x), \quad (1)$$

где a_i = const $(i=\overline{1,n})$

Пр. ч. $f(x)$ имеет спец. вид

$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$, где

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ - мн-ны от x ст. n и m соотв-но,

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Рассм. соотв. однород. ДУ

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+a_2 y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n y=0 \quad (2)$$

Сост. характ. ур-ние:

$$k^n+a_1 k^{n-1}+a_2 k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0. \quad (3)$$

$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.}$

Частное реш. неоднородного ДУ находим в виде:

$$y_{ч.н.}=x^r e^{\alpha x}\left(R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x\right) \quad (4)$$

r - кратность корней $\alpha\pm i\beta$ в характ. ур-нии (3)

$r=0$, если $\alpha\pm i\beta$ не явл. корнем характ. ур-ния

$s=\max(n,m)$, $R_s(x)$ и $T_s(x)$ - общий вид мн-нов степ. s.

Неопред. коэф-ты находим, подставляя решение (4) в ДУ (1)

Соответствие между видом пр. части неоднород. ДУ и видом его част. решения рассмотрим по таблице.

$f(x)$	$\alpha \pm \beta i$	s	$y_{ч.н.}$
1. $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$	$\alpha = 0$ $\beta = 0$	n	$x^r \cdot R_n(x) = x^r(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$ если 0 не явл. корнем характ. ур-ния, то $r=0$ и $A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$
2. $e^{\alpha x} \cdot P_n(x) = e^{\alpha x}(a_0 x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n)$	$\alpha \neq 0$ $\beta = 0$	n	$x^r R_n(x) \cdot e^{\alpha x} = x^r e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$ если α не явл. корнем характ. ур-ния, то $r = 0$ и $e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$
3. $e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$	$\alpha \pm \beta i$ $\begin{cases}\alpha \neq 0\\ \beta \neq 0\end{cases}$	$s = \max(m,n)$	$x^r e^{\alpha x}(R_s(x)\cos x + T_s(x)\sin x)$ если $\alpha \pm \beta i$ не явл. корнями хар. ур-ния, то $r = 0$ и $e^{\alpha x}(R_s(x)\cos x + T_s(x)\sin x)$

Прим. Указать вид общего решения ДУ, не выч. коэф.

$$y^{V} + 64y'' = x^5 - 12x\cos x - 3\sin x + x^2 e^{-4x} - x \cdot e^{2x}\sin 2\sqrt{3}x - 1$$

1) $y^{V} + 64y'' = 0$

$k^5 + 64k^2 = 0$

$k^2(k^3 + 64) = 0$

$k^2(k+4)(k^2 - 4k + 16) = 0$

$k_{1,2} = 0 \quad k_3 = -4 \quad D = 16 - 64 = -48 \quad k_{4,5} = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

ФСР: $y_1 = 1$; $y_2 = x$; $y_3 = e^{-4x}$;

$y_4 = e^{2x}\cos 2\sqrt{3}x$; $y_5 = e^{2x}\sin 2\sqrt{3}x$

$$y_{о.о} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-4x} + e^{2x}(C_4\cos 2\sqrt{3}x + C_5\sin 2\sqrt{3}x)$$

2) • $f_1(x) = x^5 - 1 = (x^5-1)\cdot e^{0x}$

$s = 5$ - степень мн-на

$\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 0$ - явл. корнем хар. ур-ния кратности 2.

$y_{r_1} = x^2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5)$

• $f_2(x) = -12x\cos x - 3\sin x = e^{0x}(-12x\cos x - 3\sin x)$

$\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = \pm i$ - не явл. корнем хар. ур-ния, $\Rightarrow r = 0$

$s = \max(1, 0) = 1$.

$y_{r_2} = x^0 e^{0\cdot x}((B_1 x + B_2)\cos x + (B_3 x + B_4)\sin x) =$

$= (B_1 x + B_2)\cos x + (B_3 x + B_4)\sin x$

• $f_3(x) = x^2 e^{-4x}$

$\left.\begin{matrix}\alpha=-4\\ \beta=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = -4$ - явл. корнем характ. ур-ния кратности 1, $\Rightarrow$, $r = 1$.

$s = 2$

$y_{r_3} = x e^{-4x}(C_0 + C_1 x + C_2 x^2)$

• $f_4(x) = -x \cdot e^{2x}\sin 2\sqrt{3}x$

$\left.\begin{matrix}\alpha=2\\ \beta=2\sqrt{3}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \pm \beta i = 2 \pm 2\sqrt{3}i$ - пара явл. корнями характ. ур-ния кратности 1, $\Rightarrow$, $r = 1$

$s = 1$

$y_{r_4} = x e^{2x}((D_1 x + D_2)\cos 2\sqrt{3}x + (D_3 x + D_4)\sin 2\sqrt{3}x)$

$y_{r.н.} = y_{r_1} + y_{r_2} + y_{r_3} + y_{r_4}$

$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{r.н.}$