Лекция

ЛОДУ n-ого порядка с постоянными коэф-тами.

1. ЛОДУ n-ого пор. с пост. коэф. Характ. ур-ние ЛОДУ

Опред. ДУ вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0$, (1)

где $a_i = const$, назыв. ЛОДУ n-ого пор. с постоянными коэф.

Будем искать решение в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$

$y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$

Подставим решение в ДУ (1):

$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0$

$e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n) = 0$ $(e^{kx} \neq 0 \ \forall x)$, $\Rightarrow$,

$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ (2) – характеристическое ур-ние для ДУ(1)

Ур-ние (2) имеет n корней

2. Построение общего реш. ЛОДУ по корням характ. ур-ние (n = 2).

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (3), a_1, a_2 – const

Хар. ур-ние: $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ – квадратное ур-ние.

$D = a_1^2 - 4a_2$; $k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$

1) Корни характ. ур-ния действительны и различны $(D > 0)$

$k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{k_1 x} \\ y_2 &= e^{k_2 x} \end{aligned}\right\}$ – частные реш. ДУ (3)

Док-м, что они лин. независ.

$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} =$

$= \underset{\neq 0}{(k_2 - k_1)} \underset{\neq 0}{e^{(k_1+k_2)x}} \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$

Т.о. $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$ – лин. независ. частные реш. ДУ(3) и образуют ФСР

По т-ме о структуре общего реш. ЛОДУ.

$y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Прим $y'' + 5y' = 0$

$k^2 + 5k = 0$

$k(k+5) = 0$; $k_1 = 0$, $k_2 = -5$

ФСР: $y_1 = e^{0x} = 1$

$y_2 = e^{-5x}$

$y_{о.о} = C_1 + C_2 e^{-5x}$.

2) Корни характ. ур-ния действительны и равны ($D=0$)

$k = k_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \Leftrightarrow a_1 = -2k$

Первое част. реш. ДУ (3) $y_1 = e^{kx}$

Найдем 2-ое част. реш., лин. независ. с $y_1(x)$:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = e^{kx} \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2kx}} dx =$$

$$= e^{kx} \int \frac{e^{2kx}}{e^{2kx}} dx = x e^{kx} \Rightarrow y_2 = x \cdot e^{kx}$$

ФСР: $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x e^{kx}$

$y_{о.о} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$

Прим $y'' + 6y' + 9y = 0$

$k^2 + 6k + 9 = 0$

$(k+3)^2 = 0$; $k_{1,2} = -3$

ФСР: $y_1 = e^{-3x}$

$y_2 = x \cdot e^{-3x}$

$y_{о.о} = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

3) Корни характ. ур-ния комплексно-сопряженные ($D<0$).

$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

Рассм. $e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$ - ф-ла Эйлера

Выделим действит. и мнимую части решения:

$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot e^{2\alpha x}\cos\beta x \cdot \sin\beta x + \beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x - \alpha e^{2\alpha x}\cos\beta x \cdot \sin\beta x + \beta e^{2\alpha x}\sin^2\beta x$$

$= \beta \cdot e^{2\alpha x} \neq 0$ $\forall x \in [a; b]$, т.к. $\beta \neq 0$, $e^{\alpha x} \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$.

Прим $y'' + 4y' + 13y = 0$

$k^2 + 4k + 13 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 13 = -36$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$

ФСР: $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$, $y_2 = e^{-2x} \sin 3x$

$$y_{оо} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

3. Построение общего реш. ЛОДУ n-ого пор. по корням характ. ур-ния.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$ – ЛОДУ n-ого пор. с пост. коэф (1)

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$$ – соотв. характ. ур-ние. (2)

1) Характ. ур-ние (2) имеет n корней действит. и различных: $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ ($k_i \neq k_j$, если $i \neq j$)

Тогда ФСР имеет вид: $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n e^{k_n x}$

Прим. $y^{IV} - 13y''' + 36y = 0$

$k^4 - 13k^3 + 36 = 0$

$k_1 = -3;\ k_2 = 3;\ k_3 = -2;\ k_4 = 2$

ФСР: $y_1 = e^{-3x};\ y_2 = e^{3x};\ y_3 = e^{-2x};\ y_4 = e^{2x}$

2) Характ. ур-ние (2) имеет действит. корень кратности l, то часть ФСР ДУ(1), соответствующая этому корню имеет вид:

$y_1 = e^{kx};\ y_2 = xe^{kx};\ y_3 = x^2 e^{kx};\ \dots;\ y_l = x^{l-1} e^{kx}$.

3) а) Характ. ур-ние (2) имеет компл. – сопряженные корни $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности один, то лин. - незав. реш., соотв. этому корню, имеют вид:

$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$.

б) Характ. ур-ние (2) имеет компл. – сопрят. корни $\alpha \pm i\beta$ кратности m, тогда лин. - незав. реш., соотв. этой паре имеют вид:

$$\left.\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}\right\}$$ 2m лин. незав. решений.

4) Общий случай: характ. ур-ние (2) имеет r действит. корней $k_1, k_2, \dots, k_r$ с соотв. кратностями

$l_1, l_2, \dots, l_r$

и S пар комплексно-сопрят. корней:

$\alpha_1 \pm i\beta_1;\ \alpha_2 \pm i\beta_2;\ \dots;\ \alpha_s \pm i\beta_s$ с соотв. кратностями

$m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_s$, где

$l_1 + l_2 + \ldots + l_r + 2(m_1 + m_2 + \ldots + m_s) = n$, то общее реш. ДУ (1) имеет вид:

$$y_{oo} = P_{l_1-1}(x)e^{k_1 x} + \ldots + P_{l_r-1}(x)e^{k_r x} + e^{\alpha_1 x}(Q_{m_1-1}(x)\cos\beta x + R_{m_1-1}(x)\sin\beta x) + \ldots + e^{\alpha_s x}(Q_{m_s-1}(x)\cos\beta x + R_{m_s-1}(x)\sin\beta x),$$ где

$P_{l_1-1}(x)$ - мн-н степени $l_1 - 1$

$P_{l_r-1}(x)$ - мн-н степени $l_r - 1$

$Q_{m_1-1}(x)$, $R_{m_1-1}(x)$ — " — $m_1 - 1$

$Q_{m_s-1}(x)$, $R_{m_s-1}(x)$ — " — $m_s - 1$.

Прим. 1) $y^{V} + 4y^{IV} + 13y''' = 0$

$$k^5 + 4k^4 + 13k^3 = 0$$

$$k^3(k^2 + 4k + 13) = 0$$

$$k_{1,2,3} = 0 \qquad k_{4,5} = -2 \pm 3i$$

ФСР: $y_1 = e^{0x} = 1$; $y_2 = x$; $y_3 = x^2$

$y_4 = e^{-2x}\cos 3x$; $y_5 = e^{-2x}\sin 3x$

$$y_{o.o.} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-2x}(C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x).$$

2) $y^{IV} + 4y'' + 4y = 0$

$$k^4 + 4k^2 + 4 = 0$$

$$(k^2 + 2)^2 = 0$$

$$k_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2}i$$

ФСР: $y_1 = \cos\sqrt{2}x$; $y_3 = x \cdot \cos\sqrt{2}x$; $y_2 = \sin\sqrt{2}x$; $y_4 = x\sin\sqrt{2}x$

$$y_{o.o.} = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + x(C_3\cos\sqrt{2}x + C_4\sin\sqrt{2}x)$$

Линейные неоднородные ДУ n-ого порядка

1. Структура общего решения ЛНДУ n-ого пор.

Рассм ДУ $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x)$, (1*)

$a \le x \le b$, где $p_i(x)$, $f(x)$ — непр. на $[a, b]$ ф-ции $(i = \overline{1,n})$

Задача Коши: Найти реш. неоднор. ДУ, удовл

нач. условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ (3*)

Соотв. ОДУ $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$ (2*)

Т-ма (о структуре общего решения ЛНДУ)

Общее решение ЛНДУ n-ого пор. с непр. на $[a, b]$ коэф-тами $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, и непр. на $[a, b]$ ф-цией $f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего однородного д.у. и какого-либо частного реш. неоднород. ДУ.

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$$

Док-во:

1) Док-м, что $y_{о.н.}$ есть решение ДУ (1*)

По усл. $L[y_{ч.н.}] \equiv f(x)$, $L[y_{о.о.}] \equiv 0$

$L[y_{о.н.}] = L[y_{о.о.} + y_{ч.н.}] = L[y_{о.о.}] + L[y_{ч.н.}] =$

$\equiv 0 + f(x) = f(x)$, $\Longrightarrow$, $y_{о.н.}$ — решение ДУ (1*)

2) Докажем, что $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н.}$ — общее реш ДУ (1*)

$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + y_{ч.н}$ = (по т-ме о структуре общего ЛОДУ)

$= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_{ч.н}$, где

$y_1, y_2, \dots, y_n$ — лин. независ. част. реш соотв. ЛОДУ (2*),

причем $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ne 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Т.к. $p_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ непр. и $f(x)$ непр. на $[a, b]$, то по т-ме

(продолжение на обр. стороне)

Коши $\exists$ и ! решение задачи Коши

$\exists$ единств. реш. ДУ (1^*), удовл. заданным нач. усл.

Сл-ю, надо док-ть, что если решение

$y_{он} = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_{ч.н.}$ и его производные

удовл. заданным нач. усл. (3^*), то из этих

условий можно единственным образом определить

$c_1, c_2, \dots, c_n$. , $x_0 \in [a; b]$.

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = y_0 - y_{ч.н.}(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{ч.н.}'(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{ч.н.}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$ –

СЛАУ с определителем $W(x_0) \neq 0$; $x_0 \in [a, b]$, $\Rightarrow$,

$\exists$ и ! $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, ..., $C_n = C_n^0$

$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) + y_{ч.н.}$ –

частное реш.

Итак, $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$

Т-ма: (принцип суперпозиции или наложения)

если $y_1(x)$ есть решение ур-ния $L[y] = f_1(x)$, а

$y_2(x)$ есть реш. ур-ния $L[y] = f_2(x)$, то ф-ция

$y_1(x) + y_2(x)$ есть реш. ур-ния $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$

Док-во: По усл. $L[y_1] \equiv f_1(x)$, $L[y_2] \equiv f_2(x)$

$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv f_1(x) + f_2(x)$, $\Rightarrow$,

ф-ция $y_1(x) + y_2(x)$ есть реш. ур-ния

$L[y] = f_1(x) + f_2(x)$

▲