# Лекция

## Линейные дифференциальные ур-ния n-ого порядка

### 1. Основные понятия

Опред. ЛДУ n-ого порядка назыв. ур-ние, линейное относительно неизвестной ф-ции и всех ее производных, т.е. ур-ние вида:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = g(x)$$

($a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), g(x)$ - заданные на неком. интервале ф-ции)

Если $g(x) \equiv 0$, то ур-ние назыв. однородным, в противном случае ур-ние назыв. неоднородным.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = g(x)$$

Разделим все члены этого ур-ния на $a_0(x) \neq 0$ на неком. интервале и получим:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x) \text{ - неоднор. ДУ (ЛНДУ)} \quad (1)$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \text{ - соотв. однород. ДУ (ЛОДУ)} \quad (2)$$

Задача Коши: Найти решение ДУ (1) или (2), удовлетворяющее нач. условием

$$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

Т-ма Коши (т-ма $\exists$ и ! решения)

Если ф-ции $p_1(x), p_2(x), p_n(x), f(x)$ непр. на $[a; b]$, то $\forall$ нач. условий (3) $\exists$ единственное решение $y = \varphi(x)$ ЛНДУ n-ого пор. (1)

### 2. Дифференциальный оператор $L[y]$ и его свойства

Опред. Диф. оператором $L[y]$ назыв. выражение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = L[y]$$

$L[y] = 0$ - ЛОДУ (2)

$L[y] = f(x)$ - ЛНДУ (1)

Прим. $y''' + xy' + 2y = x^3$ не надо в этот раз!

$$L[y] = y''' + xy' + 2y \Rightarrow L[y] = x^3$$

Т-ма Диф. оператор $L[y]$ является линейным оператором, т.е. 1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ (св-во аддитивности)

2) $L[Cy] = CL[y]$, где $C$ - постоянная (св-во однородности)

Док-во.

1) $L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)(y_1 + y_2) =$
$= \left(y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_1\right) +$
$+ \left(y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_2\right) = L[y_1] + L[y_2]$

2) $L[Cy] = (Cy)^{(n)} + p_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) Cy =$
$= C(y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y) = CL[y]$ ▲

## 3. Линейное пространство решений ЛОДУ

Установим некоторые св-ва решений ЛОДУ

Т-ма 1 Если ф-ция $y_0(x)$ явл. реш. ЛОДУ $L[y] = 0$, то ф-ция $Cy_0(x)$, где $C$ - произвольная постоянная, тоже явл. решением этого ДУ

Док-во: По усл., $L[y_0] = 0$

Найдем $L[Cy_0] = CL[y_0] = 0$, $\Rightarrow$, ф-ция $Cy_0(x)$ - есть решение ур-ния $L[y] = 0$ - ч.т.д. ▲

Т-ма 2 Если ф-ции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ явл. решениями ЛОДУ $L[y] = 0$, то сумма ф-ций $y_1(x) + y_2(x)$ также явл. решением этого ур-ния

Док-во: По усл., $L[y_1] = 0$ и $L[y_2] = 0$

$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0$, $\Rightarrow$, ф-ция $y_1 + y_2$ - есть реш. ДУ $L[y] = 0$ - ч.т.д. ▲

След. Линейная комбинация с произвольными пост. коэф-тами $\sum\limits_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$ решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ ЛОДУ $L[y] = 0$ явл. реш. этого же ур-ния

Док-во: $L[y_1]=0, \dots, L[y_m]=0$ - по усл.

$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + Cy_m] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \dots + CL[y_m] =$
$= 0$, $\Rightarrow$, лин. комб. - есть реш. ЛОДУ $L[y]=0$ - ч.т.д. ▲

Лин. однород. ДУ $L[y]=0$ всегда имеет тривиальное решени $y \equiv 0$. Из т. 1 и т. 2 получаем:

Т-ма Совокупность решений ЛОДУ $L[y]=0$ образует линейное пр-во, нулем которого является ф-ция $y \equiv 0$

## 4. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций

Опред. Ф-ции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ назыв. лин. зависим. на $[a, b]$, если $\exists$ постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что на этом отрезке вып. тождество

$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, причем хотя бы одно из чисел $\alpha_i$ отлично от нуля.

Если это тождество имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то ф-ции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ назыв. лин. независ. на $[a, b]$

Прим. Ф-ции $e^{2x}, e^{3x}$ - лин. независимы на $\forall [a, b] \in \mathbb{R}$,

Докажем это: $\alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{3x} \equiv 0$

$e^{2x}(\alpha_1 + \alpha_2 e^{x}) \equiv 0 \quad | : e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$

$\alpha_1 + \alpha_2 e^{x} = 0 \xRightarrow{\text{диф-м}} \alpha_2 e^{x} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$, тогда

$\alpha_1 + 0 \cdot e^{x} = 0$ при $\alpha_1 = 0$, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

## 5. Определитель Вронского

Опред. Определителем Вронского ф-ций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ назыв. определитель

$$W(x) = W[y_1(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

(Вронскиан)

Т-ма (о рав-ве нулю опред-ля Вронского сис-мы лин. завис. ф-ций).

Если ф-ции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лин зависимы на $[a, b]$, то опред-ль Вронского этих ф-ций равен 0 $\forall x \in [a, b]$

Док-во: По усл. ф-ции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ лин. зависимы, $\Rightarrow$, $\exists \alpha_i \neq 0$ такие, что

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad \text{продиф-м:} \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \dots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Получили сис-му лин. однород. алгебр. ур-ний с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и с отличным от нуля решением, т.к. $\exists \alpha_i \neq 0$. Это возможно лишь тогда, когда определитель сис-мы равен 0, но опред-лем сис-мы явл. опред-ль Вронского.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

▲

Утв. если хотя бы в одной т-ке $x_0 \in [a, b]$ $W(x_0) \neq 0$, то сис-ма ф-ций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ лин. незав. на $[a; b]$

Т-ма (о вронскиане сис-мы лин независ решений ЛОДУ)

Если лин. независимые на $[a, b]$ ф-ции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ явл. частными решениями ЛОДУ (2) с непрерывными на $[a, b]$ коэф-тами $p_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, то определитель Вронского этих ф-ций отличен от 0 $\forall x \in [a, b]$

Док-во: (методом от противного)

Предположим, что для какой-то т-ки $x_0 \in [a, b]$

$W(x_0) = 0$

Составим сис-му $n$ линейных однородных алгебр. ур-ний относит. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$(*)\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Определитель этой сис-мы $W(x_0)$ в силу допущения равен 0, поэтому сис-ма имеет ненулевое решение, т.е. $\exists \alpha_i \neq 0$.

Рассм. $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$

Она явл. лин. комбинацией част. реш. ЛОДУ (2), т.е. ф-ций $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$, и, значит, сама есть решение этого ур-ния, удовлетворяющая нулевым нач. условиям (в силу ур-ний (*))

$$y|_{x=x_0} = y(x_0) = 0;\ y'|_{x=x_0} = y'(x_0) = 0; \dots;\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = 0.$$

Но таким же нулевым нач. условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y \equiv 0$ ур-ния ЛОДУ(2) и, по т-ме единственности решения, только это решение.

Сл-но, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ на $[a; b]$, причем хотя бы одно из $\alpha_i$ отлично от нуля, т.е. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – лин. завис. решения, что противоречит условию теоремы.

Сл-но, наше предположение неверно, $W(x_0) \neq 0$, а, т.к. $x_0$ - произвольная т-ка $[a, b]$, то $W(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$

▲