Лекция 5

Несобственные интегралы.

Определённый интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где подынтегральная ф-ция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, назыв. собственным интегралом.

Несобственные интегралы, к изучению которых мы приступаем, бывают:

- 1-ого рода – от непрерывной ф-ции, но на бесконечном промежутке интегрирования;
- 2-ого рода – с конечным промежутком интегрирования, на котором подынтегральная ф-ция терпит бесконечный разрыв

Несобственные интегралы 1-ого рода

Опред. Пусть ф-ция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \le x < +\infty$. Тогда несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется след. образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

Опред. Если этот предел конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся, если же этот предел бесконечен или $\nexists$, то несобств. интеграл называют расходящимся.

Опред. Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегр-ния:

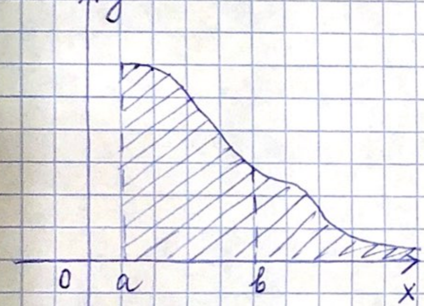
$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

Опред. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx$,

где c – произвольное действит. число.

Эта ф-ла определяет несобств. интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования при условии существования обоих интегралов в правой части формулы.

Геометр. смысл сходящегося несобственного интеграла 1-ого рода. Несобств. интеграл



$(f(x) \geq 0)$

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ выражает конечную площадь бесконечной области (криволин. трап.), ограниченной сверху гр-ком ф-ции $y = f(x)$, снизу осью Ox, слева прямой $x = a$.

Прим. 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\Big|_0^b =$

$\displaystyle= -\frac{1}{3}\left(\lim_{b\to+\infty} e^{-3b} - e^0\right) = -\frac{1}{3}\cdot(-1) = \frac{1}{3}$ – сходится

Прим. 2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b\frac{dx}{1+x^2} =$

$\displaystyle= \lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg} x)\Big|_a^c + \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} x)\Big|_c^b =$

$\displaystyle= \cancel{\operatorname{arctg} c} - \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b - \cancel{\operatorname{arctg} c} =$

$\displaystyle= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ – сходится

Прим. 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b$, но $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\sin b\ \nexists$, $\Rightarrow$ инт. расх-ся

Сходимость несобственных интегралов

Т-ма 1 (признак сх-ти по нер-ву для несобств. интегралов 1-ого рода). 1-ый признак сравнения.

Если ф-ции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в $[a;+\infty)$ и $\forall x \in [a;+\infty)$ выполняется нер-во $0 < f(x) \leq \varphi(x)$, тогда:

1) если сх-ся $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, то сх-ся и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

2) если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расх-ся и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Док-во: 1) По усл. $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сх-ся, $\xRightarrow{\text{по опр.}}$, $\exists$ конечный

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} \varphi(x)\,dx = M, \Rightarrow, \int\limits_a^{b} \varphi(x)\,dx \leq M$$

По усл. $0 < f(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in [a;+\infty)$, $\Rightarrow$,

$$0 < \int\limits_a^{b} f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{b} \varphi(x)\,dx \leq M, \Rightarrow, \int\limits_a^{b} f(x)\,dx \leq M$$

Рассм. $\int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{b_1} f(x)\,dx > \int\limits_a^{b} f(x)\,dx$, $\Rightarrow$,

ф-ция $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ возр. с возрастанием x, $\xRightarrow{\text{по т. Вейерштрасса}}$,

$\exists \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\,dx \leq M$, $\Rightarrow$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

2) (док-во методом от противного).

Предположим, что $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, тогда

сх-ся и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (доказано выше), что противоречит условию.

Исследуем на сх-ть интеграл от степенной функции

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^m} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-m}}{1-m} - \frac{1}{1-m} = \begin{cases} \frac{1}{m-1}, \text{ если } 1-m<0, \ \underline{m>1} \\ +\infty, \text{ если } 1-m>0, \ \underline{m<1} \end{cases}$$

Если $m=1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty$$

Итак, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$ сходится, если $m>1$ и расходится, если $m\le 1$

Исследовать на сходимость.

Прим. 4

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2} \quad \forall x\in[1,+\infty) \\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ сх-ся, т.к. } m=2>1 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} < 1 \text{ (сх-ся)}.$$

Прим. 5 $\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{\sqrt{x^3}}\,dx$

$$\left.\begin{array}{l} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ расх-ся} \\ \frac{1+x}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{\sqrt{x^3}}\,dx \text{ расходится}.$$

Т-ма 2 Если ф-ции $f(x)>0$ и $g(x)>0$ непрерывные в $[a;+\infty)$ и $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda>0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся или расх-ся одновременно

Док-во: По усл. $\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda>0$, т.е. по опред.

$\forall\varepsilon>0\ \exists M=M(\varepsilon)>0:\ \forall x>M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda\right|<\varepsilon$

$$-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda<\varepsilon$$

$$\lambda-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\lambda+\varepsilon$$

$(\lambda-\varepsilon)g(x)<f(x)<(\lambda+\varepsilon)g(x)\quad \forall x>M$

Пусть $a>M$. Подберем ε так, что $\lambda-\varepsilon>0$

1) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, тогда, т.к.

$(\lambda-\varepsilon)g(x)<f(x)$, $\Rightarrow$, $\int\limits_a^{+\infty}(\lambda-\varepsilon)g(x)\,dx<\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$,

а, $\Rightarrow$, $\int\limits_a^{+\infty}(\lambda-\varepsilon)g(x)\,dx$ сх-ся (по т. 1), и, $\Rightarrow$,

$\int\limits_a^{+\infty}g(x)\,dx$ тоже сх-ся (по св-ву линейности)

Св-во линейности сх-ся несобств. интегралов

Если сх-ся несобств. интегралы

$\int\limits_a^{+\infty}f_1(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}f_2(x)\,dx$, то сх-ся и несобств. интегралы от ф-ции $\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)$, т.е. сх-ся

$\int\limits_a^{+\infty}(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))\,dx$, причем

$$\int\limits_a^{+\infty}(\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x))\,dx=\lambda_1\int\limits_a^{+\infty}f_1(x)+\lambda_2\int\limits_a^{+\infty}f_2(x)\,dx$$

2) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся, $\overset{\text{по св. лин.}}{\Rightarrow}$, $(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

тоже сх-ся.

$f(x) < (\lambda+\varepsilon)\, g(x)$, $\Rightarrow$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

3) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх-ся, $f(x) < (\lambda+\varepsilon)\, g(x)$, $\Rightarrow$,

$(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже расх-ся, $\overset{\text{св. лин.}}{\Rightarrow}$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расх-ся

4) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расх-ся, $\overset{\text{св-во лин.}}{\Rightarrow}$ $(\lambda-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

расх-ся, $(\lambda-\varepsilon)\, g(x) < f(x)$, $\Rightarrow$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх-ся. $\blacktriangle$

Прим Ис-ть на сходимость $\int^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{5x^3-1}\,dx$

$f(x) = \frac{x \operatorname{arctg} x}{5x^3-1}$ сравним с $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\left.\begin{matrix} \forall x \in [1;+\infty)\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x \operatorname{arctg} x}{(5x^3-1)\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\,\pi/2}{5x^3-1} = \dfrac{\pi}{10} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ сх-ся} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ исх. интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{5x^3-1}\,dx$ сх-ся.

Абсолютная и условная сх-ть несобственных интегралов

Опред Пусть $I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $f(x)$ – непр. и знакопеременная ф-ция в $[a;+\infty)$

$\tilde{I} = \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$

Если сх-ся интеграл $\tilde{I}$, то интеграл I назыв. абсолютно сх-ся.

Если $\tilde{I}$ расх-ся, но интеграл I сх-ся, то он назыв. условно сх-ся.

Т-ма: (признак абсолютной сходимости для несобств. интегралов 1-ого рода)

Если ф-ция $y = f(x)$ непр. и знакопеременная в $[a; +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

Док-во: По усл. $f(x)$ непр. в $[a; +\infty)$, $\Rightarrow$, $\forall x \in [a; +\infty)$ справедливо нер-во:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \Rightarrow, f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$$

По усл. $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сх-ся, $\xRightarrow{\text{по св. лин.}}$ $2\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сх-ся, $\Rightarrow$, (по признаку сх-ти по нер-ву) $\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx$ сх-ся, $\Rightarrow$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx}_{\text{сх-ся}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx}_{\text{сх-ся по усл.}} \text{ сходится абсолютно.}$$

Прим. 1 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ ис-ть на абс. и усл. сх-ть: $\frac{\sin x}{x^3}$ - знакопеременная на $[1; +\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{|\sin x|}{x^3} \le \frac{1}{x^3} \quad \forall x \in [1; +\infty) \\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \text{ сх-ся } (m = 3 > 1) \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{т. 1}} \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx \text{ сх-ся}, \Rightarrow,$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}$ сх-ся абсолютно.

Прим. 2 (дома!) а) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ (док-ть, что эти интегралы сх-ся условно)

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-1} \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^{-1} & dv = \sin x\,dx \\ du = -\frac{dx}{x^2} & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{\cos x}{x} \Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right] = -\lim_{b \to +\infty} \frac{\cos b}{b} + \cos 1 - \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx =$$

$$= \cos 1 - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{сх-ся абс.}}, \Rightarrow, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ сх-ся, но !}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx > \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}}_{\text{сх-ся}}, \Longrightarrow, \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \text{ расх-ся}.$$

Итак, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сх-ся условно.

Лекция 6
Несобственные интегралы 2-ого рода

Опред. 1 Несобств. интегралом 2-го рода от ф-ции, имеющей разрыв в правом конце отрезка, назыв. предел определенного интеграла

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon) - F(a),$$ где $f(b)=\infty$

Если $f(x)$ имеет разрыв в левом конце отрезка $[a, b]$,

2) то $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon),$$ где $f(a)=\infty$.

Если $f(x)$ имеет разрыв внутри отрезка $[a, b]$, то

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$ где $f(c)=\infty$, $a<c<b$

Прим: $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{2-x}\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$ Вычислить.

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{2-2+\varepsilon} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\Big|_{x=2} = \infty\right).$$

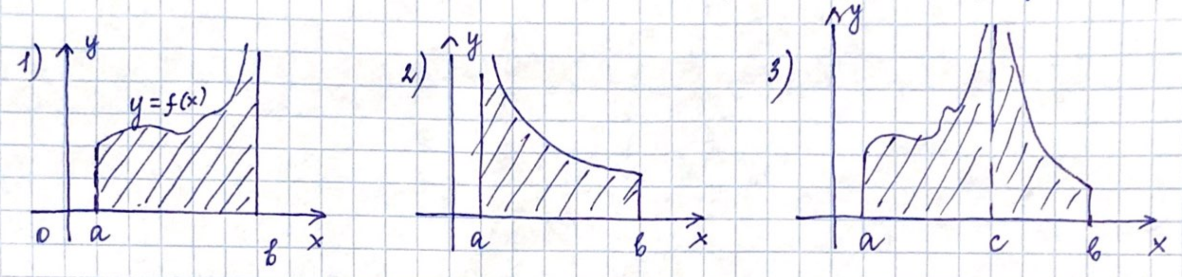
Опред. 2 Если $\exists$ и конечен предел в правой части формул 1) и 2), то несобств. интеграл назыв. сх-ся, если этот предел $\nexists$ (в частности $=\infty$), то интеграл назыв. расх-ся.

Если $\exists$ и конечны оба предела в правой части ф-лы 3), то несобств. интеграл 2-ого рода назыв. сходящимся. Если хотя бы один из пределов $\nexists$ (в частности $=\infty$), то несобств. интеграл 3) назыв. расх-ся.

Прим. $$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{3}\frac{d(x-1)}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x-1|\Big|_{1+\varepsilon}^{3} =$$

$$= \ln 2 - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|1+\varepsilon-1| = \ln 2 + \infty = +\infty \Rightarrow \text{расх-ся.}$$

Геометр. смысл несобств. интеграла 2-ого рода



если $f(x)>0$, то сх-ся несобств интеграл будет равен площади бесконечной криволин. трапеции

Признаки сх-ти и расх-ти несобств. интегралов 2-ого рода

Аналогичны признакам сх-ти и расх-ти несобств. интегралов 1-ого рода

Т-ма 1 если ф-ции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непр-ны в $[a; b)$ и $f(b)=\infty$, $\varphi(b)=\infty$; и если $\forall x\in[a; b)$ $0<f(x)\leq\varphi(x)$ и несобств. интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ сх-ся, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сх-ся, причем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

2) если несобств. интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расх-ся, то расх-ся и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.

Для сравнения берут интегралы от ф-ций:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \quad и \quad \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \quad (\lambda>0)$$

при $\lambda<1$ эти интегралы сх-ся и при $\lambda\geq1$ - расх-ся.

Прим. 1 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+6x^2}$ ис-ть на сх-ть. $\left.\frac{1}{\sqrt{x}+6x^2}\right|_{x=0}=\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{x}+6x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ сх-ся } \left(\lambda=\frac{1}{2}<1\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+6x^2} \text{ сх-ся}$$

Прим. 2 $\int_0^1 \frac{x+1}{x^3}dx$; $0 < x \le 1$; $\left.\frac{x+1}{x^3}\right|_{x=0} = \infty$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x+1}{x^3} > \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in (0;1] \\ &\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \text{ расх-ся } (\lambda = 2 > 1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x+1}{x^3}dx \text{ расх-ся.}$$

Т-ма 2 Если ф-ции $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ непр-ны в $[a, b)$ и $f(b) = \infty$, $g(b) = \infty$ и $\exists$ конечный $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сх-ся или расх-ся одновременно.

Прим. 1 $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x - 1}dx$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&\ln(1+\sqrt[3]{x^2}) \sim \sqrt[3]{x^2} \ (x\to 0) \\ &e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} \sim \frac{x^{2/3}}{x} = \frac{1}{x^{1/3}} \\ &\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \text{ сх-ся}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}dx \text{ сх-ся}$$

Прим 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\sqrt{1-x}\right|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-1+\varepsilon} - 1\right) = 2 \text{ — сх-ся}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

тоже сходится!

Прим. 3 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{tg x - x}$

$$\frac{1}{tg x - x}\Bigg|_{x=0} = \infty$$

$$\frac{1}{tg x - x} > \frac{1}{tg x} \quad \forall x \in (0; 1]$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{tg x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|\sin x| \Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= \ln|\sin 1| - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|\sin \varepsilon| = +\infty \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{tg x} \text{ расх-ся},$$

$$\Rightarrow, \int\limits_0^1 \frac{dx}{tg x - x} \text{ тоже расх-ся.}$$

Т-ма 3 Если ф-ция $f(x)$ непр. и знакопеременная в $[a, b)$ $\exists\, f(b)=\infty$ и $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ сх-ся, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сх-ся абсолютно

Прим $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\pi - x}}$; ис-ть на абс. и усл. сх-ть: $\left.\frac{\cos x}{\sqrt{\pi - x}}\right|_{x=\pi} = \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{|\cos x|}{\sqrt{\pi-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi - x}} \\ \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{(\pi - x)^{1/2}} \text{ сх-ся} \end{array}\right\} \Longrightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{|\cos x|\,dx}{\sqrt{\pi - x}} \text{ сх-ся}, \Longrightarrow,$$

$$\Longrightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\pi - x}}\,dx \text{ - сх-ся абсолютно.}$$