Лекция

1. Структура общего решения ЛОДУ

Опред. Совокупность любых n линейно независимых частных решений ЛОДУ n-ого порядка назыв. его фундаментальной сис-мой решений (ФСР)

Утв. Определитель Вронского ФСР отличен от нуля на отрезке, где решения определены.

Рассм. $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+$
$$+p_n(x)y=0$$
или $L[y]=0$ (2)

Т-ма (о структуре общего решения ЛОДУ n-ого пор)

Общее решение на $[a;b]$ ЛОДУ n-ого порядка (2) с непр. $p_i(x)$ на $[a,b]$ ($i=\overline{1,n}$) ф-циями равно линейной комбинации ФСР с произвольными пост. коэф-тами: $y_{оо}=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ (**)

Док-во: 1) Док-м, что $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ — реш. ДУ(2).

Подставим его в ЛОДУ(2).

$L[y]=L[C_1y_1+C_2y_2+C_ny_n]=C_1L[y_1]+\ldots+C_nL[y_n]=$
$=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0+\ldots+C_n\cdot 0=0$

2) Док-м, что $y=C_1y_1+\ldots+C_ny_n$ — общее реш. ЛОДУ(2)

По усл. т-мы $p_i(x)$ непр. на $[a;b]$, $\Rightarrow$, выполнены усл. т-мы Коши $\exists$ и ! реш. ЛОДУ(2), но тогда решение (**) на $[a,b]$ будет общим, если найдутся $\forall C_i$ единств. образом при произвольно заданных нач условиях:

$y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y'_0$; $\ldots$; $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где x_0 — любая т-ка $[a,b]$

Требуем, чтобы решение и его производные удовл. этим нач. условиям:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\ldots+C_ny_n(x_0)=y_0 \\ \vdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

неоднор. сис-ма лин. алг. ур-ний

Определитель этой сис-мы есть определитель Вронского $W(x_0)$ линейно независ. сис-мы реш. однородного ур-ния и $W(x_0) \neq 0$.

Сл-но, $\exists$ единств. решение $c_1, c_2, \dots, c_n$ сис-мы ур-ний для произвольной т-ки $(x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)})$, $\overset{\text{опр.}}{\Rightarrow}$, решение $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ - есть общее решение ЛОДУ (2)

Из этой т-мы следует, что если известно n лин. незав. частных решений ЛОДУ n-ого порядка, то всякое другое реш. этого ур-ния представляется в виде лин. комбинаций этих частных решений и, значит, лин. зависимо с ними. Отсюда максимальное число лин. независ. решений ЛОДУ равно его порядку.

Т-ма. Максимальное число линейно независимых частных реш. ЛОДУ n-ого порядка с непр. на $[a; b]$ коэф-тами $p_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ равно n.

Док-во: По усл. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ - лин. независ. решения ЛОДУ (2). Пусть y_{n+1} - реш. ДУ (2), для кот. $\exists$ y_{n+1}', y_{n+1}'', ... и удовл. нач. усл. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

По т-ме о структуре общего решения:

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$. Т.к. коэф-ты $p_i(x)$ непр. на $[a, b]$, то справедлива т-ма Коши о $\exists$ и ! решения ЛОДУ (2):

$y = y_{n+1} = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$, $\Rightarrow$, y_{n+1} - лин. комб. $y_1, y_2, \dots, y_n$, $\Rightarrow$ $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ - лин. зависимы, т.е. dim пр-ва частных решений равен n

2. Фундаментальная система решений

~~Опред. Совокупность любых n лин. независимых частных решений ЛОДУ n-ого порядка назыв. ее фундаментальной сис-мой решений.~~ не надо

Т-ма: (о $\exists$ ФСР ЛОДУ 2-ого порядка)

У каждого ЛОДУ 2-ого пор. с непр. на $[a, b]$ коэф-тами $\exists$ ФСР (и даже бескон. мн-во ФСР).

Док-во: Рассм. ДУ $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$ непр. на $[a, b]$.

Пусть $x_0 \in [a, b]$, тогда исходное ДУ имеет решения $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, удовлетв. при $x = x_0$ нач. условием $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_1'(x_0) = y_{10}'$

$y_2(x_0) = y_{20}$ $y_2'(x_0) = y_{20}'$

Опред-ль Вронского в т-ке x_0 сис-мы решений $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ отличен от нуля, т.е

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} \neq 0, \Rightarrow,$$

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ лин. незав. на $[a; b]$, $\xRightarrow{\text{опр.}}$, явл. ФСР.

Выбор нач. усл. обеспечил построение одной ФСР.

За нач. данные в т. x_0 можно взять любую сис-му чисел: $y_1(x_0) = a_{11}$, $y_1'(x_0) = a_{21}$, $y_2(x_0) = a_{12}$, $y_2'(x_0) = a_{22}$ лишь бы опред-ль Вронского

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ был отличен от нуля.

Очевидно, что таких сис-м чисел можно подобрать бесконечно много и постр. бесконечно много ФСР для данного ДУ.

Т-ма (о $\exists$ ФСР у ЛОДУ n-ого порядка)

У каждого ЛОДУ n-ого пор. $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$ с непр. коэф-тами $p_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ $\exists$ ФСР (и даже бескон. мн-во ФСР)

Док-во: (аналогично док-ву для $n = 2$)

Задается n^2 нач. усл.

Для постр. ФСР зададим произвольные n^2 чисел

$$\begin{matrix} y_1(x_0) = y_{10} & y_1'(x_0) = y_{10}', & \ldots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)} \\ y_2(x_0) = y_{20} & y_2'(x_0) = y_{20}', & \ldots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n(x_0) = y_{n0} & y_n'(x_0) = y_{n0}' & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)} \end{matrix} \quad (*)$$

таких, что опред-ль $\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \ldots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & & y_{n0}' \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$

где произвольная т-ка $x_0 \in [a, b]$, тогда решения $y_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$, удовл. нач. усл. $(*)$, с вронскианом $W(x_0) \neq 0$, $x_0 \in [a, b]$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – лин. незав. реш., т.е. ФСР ▲

3. Формула Остроградского – Лиувилля

Вывод ф-лы рассм. для ЛОДУ 2-ого пор.

Пусть дано ДУ $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$

Предположим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения этого ЛОДУ, сл-но,

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x) y_1' + p_2(x) y_1 = 0 & \mid \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p_1(x) y_2' + p_2(x) y_2 = 0 & \mid \cdot y_1 \end{cases} +$$

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p_1(x) (y_1 y_2' - y_2 y') = 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$\frac{dW(x)}{dx} = \cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - \cancel{y_2'y_1'} - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1''$$

$$\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)\,W(x) = 0$$ – ДУ с разд. переменными

$$\frac{dW(x)}{dx} = -p_1(x)\,W(x)\ ;\quad \frac{dW(x)}{W(x)} = -p_1(x)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dW(x)}{W(x)} = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx\ ;\quad \ln|W(x)| - \ln W(x_0) = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx$$

$$\underline{W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}}$$ – ф-ла Остроградского-Лиувилля

Для ДУ n-ого пор. $y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\,y = 0$ ф-ла О-Л. имеет тот же вид: $W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}$, где $p_1(x)$ – коэф-т, стоящий перед $(n-1)$-ой производной.

Сл-д. (Нахождение общего решения ЛОДУ 2-ого порядка при известном частном решении)

Пусть дано ЛОДУ 2-ого пор. $y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$

y_1 – известное реш. этого ур-ния. Найдем второе част. реш., лин. независ. с y_1

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 \quad (W \neq 0)$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2},\ \Rightarrow,$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx,\ \Rightarrow,\ y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

Док-м, что найденное 2-ое част. реш. y_2 исходного ДУ лин. независ. с y_1

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \\ y_1' & y_1' \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2} + y_1 \cdot \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2} \end{vmatrix} =$$

$$= y_1 \cdot y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2} + y_1^2 \cdot \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2} - y_1y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx =$$

$$= e^{-\int p_1(x)\,dx} \neq 0\ \ \forall x,\ \Rightarrow,$$ y_1 и y_2 – лин. независ.

продолж. на обр. стороне →

Общее решение ЛОДУ 2-ого порядка:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$$

Прим. Найти общее реш. ДУ $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$, если $y_1 = \frac{1}{x}$

$$y_2 = \frac{1}{x}\int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{x}\int \frac{x^2}{e^{\ln x}}\,dx = \frac{1}{x}\int x\,dx = \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$$

$y_2 = x$; $\quad y_{oo} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 x$

Замеч. Если при интегрировании брать произвольные const-ты, то сразу получается общее решение ДУ.