Пример типового варианта домашнего задания

Уравнение (а) $9x_1^2-4x_1x_2+6x_2^2+16x_1-8x_2-2=0$ кривой второго порядка на плоскости Oxy и уравнение (б) $4x^2+y^2+4z^2-8xz+8\sqrt{2}x-2y+8\sqrt{2}z+17=0$ поверхности второго порядка в пространстве $Oxyz$ приведите к каноническому виду, указав:

1) одно из преобразований перехода от заданной прямоугольной декартовой системы координат к канонической системе координат (собственные числа ортогонального собственного преобразования расположите в порядке возрастания);
2) канонический вид уравнения кривой (а) и поверхности (б);
3) на плоскости Oxy построить каноническую систему координат и кривую (а);
4) в канонической системе координат построить поверхность (б), используя метод сечений.

Контрольное мероприятие считается выполненным, если за него студент получил оценку в баллах не ниже минимальной оценки, установленной программой дисциплины по данному мероприятию.

Результатом выполнения домашнего задания является правильно оформленное решение, которое включает в себя ответы на следующие пункты исследования:

1. Записать исходное уравнение кривой(а) или поверхности (б), выделив слагаемые, образующие квадратичную форму и линейную часть уравнения.
2. Выписать квадратичную форму $\varphi(x)=x^T Ax$, записать матрицу A квадратичной формы.
3. Найти собственные числа, решив характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$
4. Выписать координаты собственных векторов, соответствующих полученным собственным значениям. Из найденных собственных векторов построить ортонормированный базис.
5. Составить матрицу U перехода от исходного базиса к новому базису из ортонормированных собственных векторов. Этому преобразованию будет соответствовать поворот системы координат на плоскости, причем новыми базисными векторами будут являться ортонормированные собственные векторы. Убедиться, что найденный ортонормированный базис – правый, в противном случае произвести коррекцию.

6. Записать ортогональное преобразование координат $x = Ux'$. Выписать канонический вид квадратичной формы и вид линейной части в переменных x', используя формулы: $b^T x = b^T U x'$.
7. Записать уравнение кривой в новых переменных.
8. Выделить полные квадраты по каждой из переменных и записать преобразование параллельного переноса, введя новые переменные (канонические).
9. Записать каноническое уравнение кривой (а) или поверхности (б). Классифицировать ее.
10. Найти результирующее преобразование координат, записать уравнения, связывающие исходные и канонические переменные. Найти координаты начала канонической системы координат.
11. Построить кривую(а) в исходной системе координат или поверхность (б) в канонической системе координат.

Пример оформления решения задачи (а)

Привести кривую $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 + 16x_1 - 8x_2 - 2 = 0$ к каноническому виду, указав соответствующее преобразование координат (собственные числа ортогонального преобразования расположить в порядке возрастания). Построить кривую в исходной системе координат.

Решение:

1. Выпишем квадратичную форму $\varphi(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

   и вычислим $\det A = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 54 - 4 = 50 > 0$. Следовательно, кривая эллиптического типа.

2. Запишем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$. В нашем случае оно будет иметь вид: $\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Раскрывая определитель, получим $\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0$.

   Следовательно, собственными числами будут $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 10$. Найдем собственные векторы a_1 и a_2.

   Для $\lambda_1 = 5$: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Для $\lambda_2 = 10$: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Замечание: Координаты собственных векторов, соответствующих $\lambda_2 = 10$, можно было найти из условия ортогональности собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям.

3. Поскольку собственные значения $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 10$ различны, то им соответствуют не просто линейно независимые собственные векторы, но и ортогональные. Значит, достаточно подобрать C_1 и C_2 так, чтобы длины векторов были равны единице. Возьмем $C_1 = C_2 = {}^1\!/\!_{\sqrt{5}}$ и получим два ортогональных единичных собственных вектора $\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ и $\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

4. Составим матрицу перехода от исходного базиса к базису из собственных векторов (т.е. матрицу $\tilde{U}$ ортогонального преобразования). Столбцами этой матрицы являются столбцы координат векторов $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$: $\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Проверим, является ли этот базис правым. Поскольку $\det \tilde{U} = -1$, то выбранные нами векторы $\tilde{e}_1$ и $\tilde{e}_2$ образуют левый базис. Поскольку нам нужно получить правый ортонормированный базис, возьмем $e_1 = \tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $e_2 = -\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ и, следовательно, матрица перехода примет вид $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Поскольку U - матрица ортогонального преобразования, она же является матрицей поворота на угол φ: $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, т.е. в данном случае на угол $\varphi = \operatorname{arctg} 2$.

5. С помощью матрицы U запишем формулы преобразования координат при переходе от исходного ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису из собственных векторов $e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_1'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_2'' \\ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_1'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_2'' \end{cases}.$$

Квадратичная форма при таком преобразовании переменных приобретает канонический вид $\varphi(x_1', x_2') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 = 5x_1'^2 + 10x_2'^2$, а линейная часть преобразуется следующим образом:

$$b^T x = 16x_1 - 8x_2 = b^T U x' = \begin{pmatrix} 16 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{40}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = -\frac{40}{\sqrt{5}} x_2'.$$

6. Запишем уравнение кривой в новых координатах x_1' и x_2':

$$5x_1'^2 + 10x_2'^2 - \frac{40}{\sqrt{5}} x_2' - 2 = 0.$$

7. Выделим полный квадрат по переменной x_2':

$$5x_1'^2 + 10(x_2'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}} x_2' + \frac{4}{5}) - \frac{40}{5} - 2 = 0;$$

$$5x_1'^2 + 10(x_2' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 = 10.$$

На этом этапе уже очевидно, что это уравнение эллипса со смещенным центром

$$\frac{x_1'^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{(x_2' - 2/\sqrt{5})^2}{1^2} = 1.$$

Сделаем еще одну замену переменных, соответствующую параллельному переносу начала системы координат $\begin{cases} x_1'' = x_1' \\ x_2'' = x_2' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$,

8. В результате получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x_1''}{(\sqrt{2})^2} + \frac{x_2''^2}{1^2} = 1.$$

9. Найдем результирующее преобразование координат:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_1'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} (x_2'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}) \\ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_1'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} (x_2'' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_1'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_2'' - \dfrac{4}{5} \\ x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} x_1'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} x_2'' + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Координаты начала O' канонической системы координат получим из уравнений системы при $x_1''=x_2''=0$, ортами осей $O'x_1''$ и $O'x_2''$ являются векторы e_1 и e_2 соответственно.

Таким образом, получили каноническую систему координат

$$(O', e_1, e_2): \begin{cases} O'(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}) \\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} i + \frac{2}{\sqrt{5}} j \\ e_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} i + \frac{1}{\sqrt{5}} j \end{cases}.$$

Построим кривую. Для этого построим на координатной плоскости Oxy собственные векторы e_1 и e_2. Они являются новыми базисными векторами повернутой системы координат $Ox_1'x_2'$. Затем построим каноническую систему координат $Ox_1''x_2''$. Она получается из системы координат $Ox_1'x_2'$ в результате преобразования параллельного переноса в точку O'. Следовательно, из точки $O'(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5})$ проведем оси Ox_1'' и Ox_2'', параллельно осям Ox_1 и Oy_1. Затем построим нашу кривую в полученной канонической системе координат. (Рис. 1).

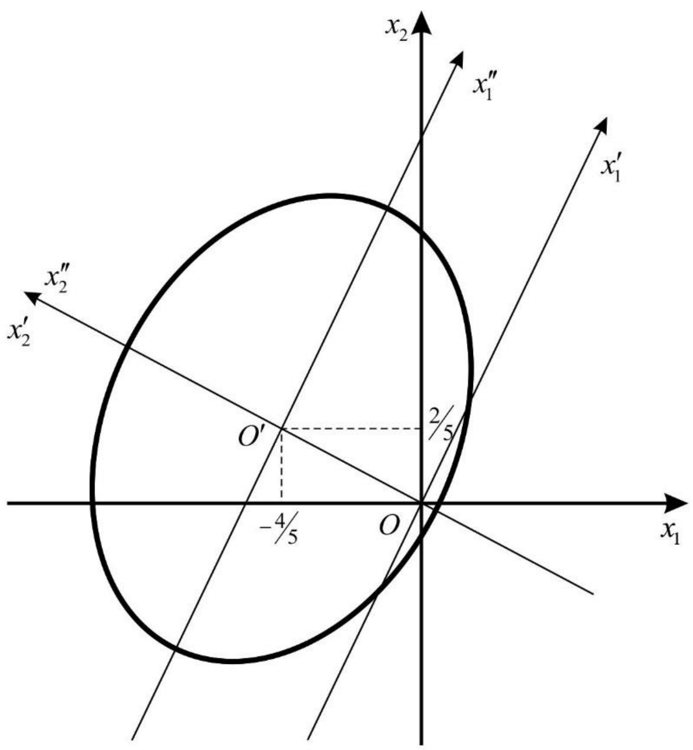

Рис. 1. График кривой $9x_1^2-4x_1x_2+6x_2^2+16x_1-8x_2-2=0$

Пример оформления решения задачи (б)

Построить поверхность, заданную уравнением

$x_1^{\,2} + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_3 + 1 = 0$ в канонической системе координат, указав соответствующее невырожденное линейное преобразование.

Решение:

1. В исходном уравнении выделим слагаемые, образующие квадратичную форму

   $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\,2} + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = (x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ равен единице, это означает, что в каноническом виде содержится квадрат только одной переменной.

2. Найдем корни характеристического уравнения

   $$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 6 \end{array}\right..$$

3. Найдем линейное ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, для этого найдем все собственные векторы (удобнее начинать с простых собственных чисел).

   Для $\lambda_3 = 6$:

   $$(A - \lambda E) = (A - 6E) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 0 \\ \qquad 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = C \\ x_3 = 2C \end{cases}$$

   Находим единичный собственный вектор $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Для $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$:

$$(A-\lambda E)=(A-0\cdot E)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow x_1+x_2+2x_3=0\Rightarrow x_1=-x_2-2x_3.$$

Из этого уравнения найдем единичный вектор $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ - один из двух собственных векторов, соответствующих $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Второй собственный вектор e_2 найдем из условия его ортогональности к векторам e_1 и e_3, используя свойства векторного произведения $e_2=e_3\times e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Поскольку тройка векторов $\left(e_3,e_1,e_2\right)$ - правая, то и тройка $\left(e_1,e_2,e_3\right)$ тоже правая.

4. Составим $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ - матрицу перехода от исходного базиса к построенному ортонормированному базису из собственных векторов (мы уже проверили, что он будет правый). Запишем формулы преобразования координат $x=Ux'$.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_3'\\x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{3}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_3'\\x_3=-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2'+\frac{2}{\sqrt{6}}x_3'\end{cases}.$$

5. В новых переменных квадратичная и линейная формы примут вид:

$\varphi\left(x_1',x_2',x_3'\right)=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2+\lambda_3x_3'^2=6x_3'^2$,

$$b^Tx=-6x_3=b^TUx'=\begin{pmatrix}0&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=2\sqrt{3}x_2'-2\sqrt{6}x_3'.$$

6. Запишем уравнение поверхности в системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$:

$6x_3'^2+2\sqrt{3}x_2'-2\sqrt{6}x_3'+1=0$.

7. Выделим полный квадрат по переменной x_3' и запишем уравнение в виде: $\left(x_3' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_2'$.

   Чтобы получить каноническое уравнение поверхности, нужно сделать еще одну замену координат $\begin{cases} x_1'' = x_1' \\ x_2'' = x_2' \\ x_3'' = x_3' - \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$.

8. Запишем каноническое уравнение поверхности $\left(x_3''\right)^2 = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} x_2''$. Это параболический цилиндр.
9. Найдем результирующее преобразование координат, связывающие исходные и канонические координаты:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1'' + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2'' + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(x_3'' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1'' + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2'' + \frac{1}{\sqrt{6}}\left(x_3'' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} x_2'' + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(x_3'' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 + \frac{1}{6} \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} z_3 + \frac{1}{6} \\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} z_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} z_3 + \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Найдем координаты начала канонической системы координат $O'(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$ и построим поверхность в канонической системе координат $O'x_1''x_2''x_3''$ (Рис. 3).

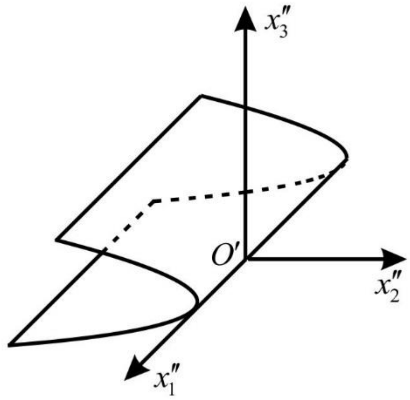

Рис. 3. Чертеж поверхности $\left(x_3''\right)^2 = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} x_2''$

Классификация поверхностей второго порядка.

№	Уравнение	Название	Ранг квадратичной формы
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	эллипсоид	3
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	точка	3
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	мнимый эллипсоид	3
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	однополостный гиперболоид	3
5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	конус	3
6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	двуполостный гиперболоид	3
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллиптический цилиндр	2
8	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	прямая	2
9	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллиптический цилиндр	2
10	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гиперболический цилиндр	2
11	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	пара пересекающихся плоскостей	2
12	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	эллиптический параболоид	2

13	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	гиперболический параболоид	2
14	$x^2=a^2,\, a\neq 0$	пара пересекающихся плоскостей	1
15	$x^2=0$	плоскость (пара совпадающих плоскостей)	1
16	$x^2=-a^2,\, a\neq 0$	пара мнимых плоскостей	1
17	$x^2=2py,\ p\neq 0$	параболический цилиндр	1

Примечание: возможны другие сочетания знаков и другие сочетания переменных.