

Семинар

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть ур-ние поверхности имеет неявный вид $F(x, y, z) = 0$, тогда

уравнение касательной плоскости в т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Если поверхность задана в явной форме $z = f(x, y)$, то $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) -$

ур-ние касательной плоскости и

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \quad \text{— уравнение нормали}$$

Прим. 1

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cos y$ в точке $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$

Решение. 1) $z'_x = \cos x \cos y$
 $z'_x(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$$z'_y = -\sin x \sin y; \quad z'_y(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

Уравнение касат. пл-ти: $z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{4}) \quad | \cdot 2$

$$2z - 1 = x - \frac{\pi}{4} - y + \frac{\pi}{4}$$

$$\underline{x - y - 2z + 1 = 0}$$

Ур-ние нормали:

$$\frac{x - \frac{\pi}{4}}{1/2} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{-1/2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}; \quad \underline{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2}}$$

Прим. 2. Найти ур-ние касат. плоскости и ур-ние нормали к поверхности $x(y+z)(xy-z) + 8 = 0$ в точке $(2; 1; 3)$

Решение: $F(x, y, z) = x(y+z)(xy-z) + 8 =$
 $= (xy + xz)(xy - z) + 8 =$
 $= x^2y^2 + x^2yz - xyz - xz^2 + 8$

$$F'_x = 2xy^2 + 2xyz - yz - z^2 = (2xy - z)(y + z)$$

$$F'_y = 2x^2y + x^2z - xz$$

$$F'_z = x^2y - xy - 2xz$$

$$F'_x(2; 1; 3) = (4 - 3)(1 + 3) = 4$$

$$F'_y(2; 1; 3) = 8 + 12 - 6 = 14$$

$$F'_z(2; 1; 3) = 4 - 2 - 12 = -10$$

Ур-ние касательной плоскости:

$$4(x-2) + 14(y-1) - 10(z-3) = 0$$

$$4x - 8 + 14y - 14 - 10z + 30 = 0$$

$$4x + 14y - 10z + 8 = 0 \quad | : 2$$

$$\underline{2x + 7y - 5z + 4 = 0}$$

Ур-ние нормали: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-10} \quad | \cdot 2$

$$\underline{\underline{\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-5}}}$$

Прим. 3 Для поверхности $z = 4x - xy + y^2$
найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $4x + y + 2z + 9 = 0$

-3-

Решение.

$$z = 4x - xy + y^2$$
$$4x - xy + y^2 - z = 0$$

Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ - уравнение искомого касательной плоскости, тогда

$$\frac{4}{A} = \frac{1}{B} = \frac{2}{C}, \text{ т.к. она параллельна } 4x + y + 2z + 9 = 0$$

$$F(x, y, z) = 4x - xy + y^2 - z$$

$$F'_x = 4 - y; \quad F'_x(M_0) = 4 - y_0$$

$$F'_y = 2y - x; \quad F'_y(M_0) = 2y_0 - x_0$$

$$F'_z = -1; \quad F'_z(M_0) = -1, \quad \text{где } M_0(x_0, y_0, z_0) - \text{т.к. касание}$$

$$\text{Но } F'_x(M_0) = A, \quad F'_y(M_0) = B; \quad F'_z(M_0) = C,$$

$$\text{тогда } \frac{4}{4 - y_0} = \frac{1}{2y_0 - x_0} = \frac{2}{-1}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{4 - y_0} = -2 \\ \frac{1}{2y_0 - x_0} = -2 \end{cases}; \begin{cases} y_0 = 6 \\ x_0 = 12,5 \end{cases}$$

$$\text{Найдем } z_0: z_0 = 4 \cdot 12,5 - 12,5 \cdot 6 + 6^2 = 11, \Rightarrow M_0(12,5; 6; 11) \text{ и}$$

Ур-ние касательной плоскости:

$$(4 - 6)(x - 12,5) + (12 - 12,5)(y - 6) - 1(z - 11) = 0$$

$$-2x + 25 - 0,5y + 3 - z + 11 = 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$\underline{4x + y + 2z - 78 = 0}$$

- 4 -

Прим 4 Для поверхности $x^2 - z^2 - 2x + 6y = 4$
написать ур-ние нормали, параллельной
прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$

Решение.

1) $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$, \Rightarrow , направляющий вектор

$\vec{q} = (l, m, n)$ этой прямой $\vec{q} = (1; 3; 4)$,

т.е. $l = 1, m = 3, n = 4$.

2) Ур-ние нормали ко поверхности:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Пусть $F'_x(x_0, y_0, z_0) = l_1$

$$F'_y(x_0, y_0, z_0) = m_1$$

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) = n_1, \text{ тогда}$$

$$\frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}$$

3) $F(x, y, z) = x^2 - z^2 - 2x + 6y - 4$

$$F'_x = 2x - 2$$

$$F'_y = 6$$

$$F'_z = -2z$$

Имеем, $\frac{1}{2x_0 - 2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{-2z_0}$

$$\frac{1}{2x_0 - 2} = \frac{1}{2}, \Rightarrow, \begin{cases} x_0 = 2 \\ z_0 = -4 \\ y_0 = \frac{10}{3} \end{cases}; \Rightarrow, \begin{cases} l_1 = 2 \\ m_1 = 6 \\ n_1 = 8 \end{cases}$$

Ур-ние нормали: $\frac{x-2}{2} = \frac{y - \frac{10}{3}}{6} = \frac{z+4}{8} \quad | \cdot 2$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y - \frac{10}{3}}{3} = \frac{z+4}{4}$$