Семинар 6

Квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису

Опред. Квадратич. формой назыв. однородный многочлен 2-ой степени от n переменных, т.е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

$A = (a_{ij})$ - симметрическая матрица пор. n, составленная из коэф-тов мн-на - матрица квадратич. формы, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

Определитель этой матрицы A наз. дискриминантом квадратич. формы. Если $|A| \neq 0$, то форма наз. невырожденной.

Ранг матрицы A квадрат. формы назыв. рангом этой квадратич. формы.

Прим. 1 Записать матрицу квадратич. формы $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Замеч. Между симметрическими матрицами и квадратич. формами $\exists$ взаимно однознач. соотв-вие

Опред. Квадратич. форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная в действит. лин. пр-ве L_n назыв. положительно (отрицательно) определенной, если $\forall x \in L_n$, $x \neq 0$,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \quad (f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0).$$

Пусть $A = (a_{ij})$ - матр. квадрат. формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ - главные миноры матр. A.

Критерий Сильвестра: Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является положительно определённой $\Leftrightarrow$ когда все главные миноры ее матрицы A были положительны, т.е. $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$

Утв Квадратич. форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ явл. отрицательно определённой $\Leftrightarrow$ когда знаки главных миноров ее матрицы A чередуются, начиная с „—", т.е. выполняется нер-во $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$

Определить, какие квадратич. формы явл. положительно или отриц. определёнными, а какие - нет.

4.218 $\quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$

Решение.

Матрица квадр. формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

Все главные миноры положит., $\Rightarrow$, данная квадратич. форма явл. положительно определённой.

4.220 $\quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

Решение.

Матр. квадрат. формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -15 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19 < 0$$

Квадратич. форма общего вида (знакопеременная).

4.221 $f(x_1, x_2, x_3) = 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix} -;$$

матрица квадр. формы

$\Delta_1 = -11 < 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 66 - 36 = 30 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -81 < 0$$

Знаки главных миноров чередуются, начиная с „–“, $\Rightarrow$, квадратич. форма отрицательно определенная.

4.224 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$ – матр. квадр. формы

$$\Delta_1 = 1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} \overset{IV-II}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

Глав. миноры положительны, $\Rightarrow$, квадр. форма положительно определенная.

Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Пусть дана квадратич. форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в лин. пр-ве L_n с фиксированным базисом $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

В этом базисе матр. A - есть матрица квадрат. формы.

Пусть $B' = (e_1', e_2', \dots, e_n')$ - другой базис в этом лин. пр-ве L_n и

U - матрица перехода от базиса B к базису B'

В базисе B' исходная квадратич. форма имеет другой вид и, $\Rightarrow$, другую матрицу A', причем

$$\boxed{A' = U^T A \cdot U}$$

Опред. Если в некотором базисе лин. пр-ва L_n квадратич. форма содержит только квадраты переменных $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + \dots + a_{nn} y_n^2$, то такой вид квадратичной формы назыв. КАНОНИЧЕСКИМ.

Матрица квадратич. формы, имеющей канонический вид, является диагональной.

Пример 2 Квадратич. форму $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$ преобразовать к новым переменным y_1, y_2, если $x_1 = y_1 - 2y_2$; $x_2 = y_1 + y_2$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ - матрица квадр. формы

$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица, соответствующая заданной замене переменных (линейная замена переменных), $|U| = 3 \neq 0$

$A' = U^T \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ - матр. кв. формы в новых переменных, а сама кв. форма будет иметь вид: $f(y_1, y_2) = 11y_1^2 - 4y_2^2 - 2y_1y_2$

Т-ма Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду при помощи невырожденного линейного преобразования $X = BY$, где X и Y - матрицы-столбцы и $|B| \neq 0$.

Замеч. Матрица B - не единственная.
Она удовлетворяет условию $B^T A B = \Lambda$, где Λ - диагональная матрица

В новых переменных Y квадратич. форма имеет канонический вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2$$, где n - ранг квадратич. формы.

Квадратичную форму можно привести к каноническому виду:

1) Непосредственным преобразованием, например, дополнением до полного квадрата
2) Ортогональным преобразованием, при котором преобразующая матрица B явл. ортогональной
3) Методом Лагранжа (последовательным выделением квадратов переменных).

Замеч. Очень удобно перед преобразованием найти ранг квадратич. формы, что позволяет определить число квадратов в каноническом виде квадр. формы.

Прим 3 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2 = (x_1 + 4x_2)^2 - 10x_2^2$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 4x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow, \quad f(y_1, y_2) = y_1^2 - 10y_2^2$$

Чтобы найти преобразующую матрицу, выразим x_1, x_2 через y_1, y_2: $\begin{cases} x_1 = y_1 - 4y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow,$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Прим 4</u> $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

Решение: заметим, что $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2$, тогда замена переменных имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Канонический вид: $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2$

Найдем матрицу преобразования B:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \Rightarrow, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$