Семинар 7.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и ортогональным преобразованием.

1. Метод Лагранжа (метод выделения квадратов)

Прим. 1 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \overset{II-4I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \Rightarrow, Rg A = 2, \Rightarrow,$$

канонический вид будет содержать два квадрата

1) Дополним до квадрата слагаемые, которые содержат x_1 и получим:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot 4x_2 + (4x_2)^2 - (4x_2)^2 + 6x_2^2 = $$
$$= (x_1 + 4x_2)^2 - 10x_2^2$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 4x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}, \text{ тогда } f(y_1, y_2) = y_1^2 - 10y_2^2 \text{ - канон. вид}$$

Найдем матрицу соответствующего преобразования

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 4x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = y_1 - 4y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases}, \Rightarrow, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \Rightarrow,$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } |U| = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{невырожд.}$$

2) Дополним до квадрата слагаемые, которые содержат x_2 и получим:

$$f(x_1, x_2) = 6\left(x_2^2 + 2x_2 \cdot \frac{2}{3}x_1 + \left(\frac{2}{3}x_1\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x_1\right)^2\right) + x_1^2 =$$
$$= 6\left(\frac{2}{3}x_1 + x_2\right)^2 - \frac{5}{3}x_1^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{2}{3}x_1 + x_2 \\ z_2 = x_1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = z_2 \\ x_2 = z_1 - \frac{2}{3}z_2 \end{cases}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \Rightarrow,$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Итак, данный пример наглядно иллюстрирует закон инерции квадратичных форм:

Для любых двух видов $f(y_1, y_2) = y_1^2 - 10y_2^2$ и $f(z_1, z_2) = 6z_1^2 - \frac{5}{3}z_2^2$ исходной квадратичной формы $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 6x_2^2$:

1) Общее число слагаемых в канон. виде (2) совпадает с рангом квадратич. формы (2)
2) одинаковое число положительных коэф-тов в различных канон. видах (1).
3) одинаковое число отрицательных коэф-тов в различных канон. видах (1).

Прим. 2 $\quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \det A = \frac{1}{4} \neq 0, \Rightarrow, Rg\, A = 3, \Rightarrow,$$ канон. вид содержит три квадрата

Т.к. квадратичная форма не содержит ни одного квадрата, то 1-ый шаг – невырожд. лин. преобразование:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$ где $\det V_{x\to y} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

В результате этого преобр-ния появятся квадраты переменных:

$$f(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 =$$
$$= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + \cancel{y_2y_3} + y_1y_3 - \cancel{y_2y_3} =$$
$$= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

Замена:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}; \quad \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad U_{y\to z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, $f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ - канон. вид

Найдем матрицу итогового невырожденного лин. преобразования:

$$U_{x\to z} = U_{x\to y} \cdot U_{y\to z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det U_{x\to z} = -2 \neq 0.$

Она соответствует замене переменных:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

Проверка: $f(z_1, z_2, z_3) =$

$$= (z_1 + z_2 - z_3)(z_1 - z_2 - z_3) + (z_1 + z_2 - z_3) z_3 + (z_1 - z_2 - z_3) z_3 =$$

$$= z_1^2 + \cancel{z_1 z_2} - \cancel{z_1 z_3} - \cancel{z_1 z_2} - z_2^2 + \cancel{z_2 z_3} - \cancel{z_1 z_3} - \cancel{z_2 z_3} + \cancel{z_3^2} +$$

$$+ \cancel{z_1 z_3} + \cancel{z_2 z_3} - \cancel{z_3^2} + \cancel{z_1 z_3} - \cancel{z_2 z_3} - z_3^2 =$$

$$= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 \text{ (верно)}.$$

2. Ортогональное преобразование

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

$$4\lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0, \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 1 \end{array}\right.$$

Сл-но, канонический вид $f(y_1, y_2, y_3) = -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2$

Найдем соответствующее преобразование координат.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ Найдем собственные в-ры, решив СЛАУ $(A - \lambda_{1,2}E)X = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 - x_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ C_1^2 + C_2^2 \neq 0.$$

Нормальная ФСР $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образует базис в мн-ве собств. векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$.

Применим к ней процесс ортогонализации Грама - Шмидта

Обозначим $a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} \cdot b_1 = a_2 - \frac{1+0+0}{1+1+0} b_1 = a_2 - \frac{1}{2} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем:

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{2}{\sqrt{6}} b_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 1$. Найдем соответствующий собственный вектор, решив СЛАУ $(A - \lambda_3 E) X = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II - 2I \\ III - I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{III - II}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{II + I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{II + I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right), \Rightarrow,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}, \ c \neq 0.$$

ФСР, решение $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - базис в мн-ве собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda = 1$.

Нормируем: $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$E = (e_1, e_2, e_3)$ – ортонормированный собственный базис.

Матрица перехода от исходного базиса к построенному собственному

$$U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

является ортогональной ($\det U = 1$, ее столбцы - координатные столбцы векторов ортонормир. базиса)

Она является матрицей ортогонального оператора в ортонормированном базисе.

Соответствующее преобразование координат.

$$X = UY \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \end{cases}$$

переводит исходную квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$ в канонический вид $f(y_1, y_2, y_3) = -\frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + y_3^2$

Итак, любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования. Таких преобразований много, но ортогональные преобразования не меняют метрику пространства (норму и углы).