Семинар

Производная сложной и неявной ФНП

1. Сложные функции

Пусть $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - дифференцируемая ф-ция n переменных, которые сами являются дифференцируемыми ф-циями независимой переменной t: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, тогда производная сложной функции $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ выч. по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

Если t совпадает с переменной, например, с x_1, то „полная" производная ф-ции u по x_1 вычисляется по формуле:

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1}$$

Прим 1 Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x-3y}$

$x = tg\, t$

$y = t^2 - t$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x-3y} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3e^{2x-3y} \qquad \frac{dy}{dt} = 2t - 1$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2x-3y}}{\cos^2 t} - 3(2t-1)e^{2x-3y} =$$

$$= e^{2tg\,t - 3(t^2-t)}\left(\frac{2}{\cos^2 t} - 3(2t-1)\right)$$

Прим. 2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}, \text{ где } y = e^{(x+1)^2}$$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}\left(y^2+(x+1)^2\right)} = \frac{y}{y^2+(x+1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\cancel{y^2}}{y^2+(x+1)^2}\cdot\left(-\frac{x+1}{\cancel{y^2}}\right) = -\frac{x+1}{y^2+(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+1)\,e^{(x+1)^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{y^2+(x+1)^2} - \frac{2(x+1)^2\,e^{(x+1)^2}}{y^2+(x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{(x+1)^2}\left(1-2(x+1)^2\right)}{e^{2(x+1)^2}+(x+1)^2}$$

Пусть $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m),$$
$$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m), \text{ где}$$

$t_1, t_2, \ldots, t_m$ – независимые переменные,

тогда
$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

Прим. 3 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$

$$u = \frac{2y}{x+y}$$
$$v = x^2 - 3y$$

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(x+y) - 2y}{(x+y)^2} = \frac{2x}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -f'_u(u,v) \cdot \frac{2y}{(x+y)^2} + f'_v(u,v) \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_u(u,v) \cdot \frac{2x}{(x+y)^2} - 3 f'_v(u,v)$$

Прим. 3 Показать, что функция $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 y^2$ удовлетворяет ур-нию $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot f'_x\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) - 2x =$$

$$= f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot f'_x\left(\frac{y}{x}\right) - 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot f'_y\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} - 2y = f'_y\left(\frac{y}{x}\right) - 2y$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \cdot f'_x\left(\frac{y}{x}\right) - 2x\right) +$$

$$+ y\left(f'_y\left(\frac{y}{x}\right) - 2y\right) =$$

$$= x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) \cancel{- y f'_x\left(\frac{y}{x}\right)} - 2x^2 \cancel{+ y \cdot f'_y\left(\frac{y}{x}\right)} - 2y^2 =$$

$= z - x^2 - y^2$ – ч. т. д. $\left(f'_x\left(\frac{y}{x}\right) = f'_y\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ – производные от внешней ф-ции).

2 Неявные функции

Пусть $f(x, y) = 0$, где f - дифференцируемая ф-ция переменных x и y, а y - функция от x, тогда

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)},$$ где

$f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ и $y_0 = y(x_0)$, $f(x_0, y_0) = 0$.

Прим 4 Найти $\frac{dy}{dx}$, если

$$y \sin x - \cos(x-y) = 0$$

Решение

$$f(x, y) = y \sin x - \cos(x-y)$$

$$f'_x(x, y) = y \cos x + \sin(x-y)$$

$$f'_y(x, y) = \sin x - \sin(x-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin x - \sin(x-y)} = \frac{y \cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$$

Пусть $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$, где F - дифференцируемая ф-ция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, u$;

u - ф-ция независимых перем $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M=M_0} = -\frac{F'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0)}{F'_u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0)}$$

$(k = 1, 2, \dots, n)$, где $u^0 = u(M_0)$ и

$F(M_0, u^0) = 0$

Прим. 5 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(1; -2; 2)$, если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$

Решение.

1 способ. $F(x, y, z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4$

$F'_x = -4z$

$F'_y = 2y$

$F'_z = 3z^2 - 4x$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=-2\\ z=2}} = 1$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2 - 4x}$; $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=-2\\ z=2}} = \frac{1}{2}$

2 способ $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$

$$-4z\,dx + 2y\,dy + (3z^2 - 4x)dz = 0$$

$\Rightarrow$, $dz = \frac{4z}{3z^2 - 4x}dx - \frac{2y}{3z^2 - 4x}dy$, но

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \Rightarrow,$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x}$, а $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2 - 4x}$

Прим. 6 $x + y + z = e^z$.

Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$F(x, y, z) = x + y + z - e^z$

$F'_x = 1$; $F'_y = 1$; $F'_z = 1 - e^z$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^z - 1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{(e^z-1)^2} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{(e^z-1)^2} = -\frac{e^z}{(e^z-1)^3} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$$

3. Градиент функции

Опред. Градиентом ф-ции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор

$$\text{grad}\, u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cdot \bar{k}$$

или $\text{grad}\, u(M_0) = (u'_x(M_0), u'_y(M_0), u'_z(M_0))$

Пример 7. Для функции $z = \cos(3x - 5y)$ найти градиент в точке $M_0(1, 0)$

Решение.

$z'_x = -3\sin(3x - 5y)$; $z'_x(M_0) = -3\sin 3$

$z'_y = 5\sin(3x - 5y)$; $z'_y(M_0) = 5\sin 3$

$$\text{grad}\, z(M_0) = (-3\sin 3;\ 5\sin 3)$$

4. Производная функции в данном направлении.

$u = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α, β, γ - углы между направлением l и соответствующими координатными осями.

Прим 8 $z = 2x^2y - 3xy^2$

найти производную заданной ф-ции в т-ке $M_0(-1; 3)$ в направлении в-ра $\ell = 3i + 4j$

Решение

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy - 3y^2$; $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = -39$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 6xy$; $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 20$

$|\ell| = \sqrt{9+16} = 5$, $\Rightarrow$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

$\frac{\partial z}{\partial \ell}(M_0) = -39 \cdot \frac{3}{5} + 20 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{37}{5}$