Семинар
Условный экстремум

Опред. Ф-ция $u = f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет условный максимум (условный минимум) в т-ке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если $\exists$ такая окрестность т-ки P_0, для всех точек P которой ($P \neq P_0$), удовлетворяющих уравнениям связи $\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$, где $m < n$), выполняется нер-во $f(P_0) > f(P)$ $(f(P_0) < f(P))$.

Нахождение условного экстремума

1. Составить функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) =$$
$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

λ_k, где $k = 1, 2, \dots, m$ - множители Лагранжа

2. Исследовать ф-цию Лагранжа на обычный экстремум.

а) необх. усл. $\dfrac{\partial \mathcal{L}(P)}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\varphi_k(P) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

Составить сис-му из $n+m$ уравнений, решения которой $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$, где $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ - координаты точки, в которой возможен условный экстремум.

б) достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака 2-ого дифференциала функции Лагранжа,

• если $d^2 \mathcal{L}(P_0) < 0$, то $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – точка условного максимума

• если $d^2 \mathcal{L}(P_0) > 0$, то $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – точка условного минимума

<u>Частный случай</u>.

Пусть $z = f(x, y)$ – ф-ция двух переменных и $\varphi(x, y) = 0$ – одно ур-ние связи. Тогда

1. Ф-ция Лагранжа:

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

2. Необх. усл. экстремума:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases}$$ – система из 3-х уравнений. $(3 = 2 + 1 = n + m)$

Пусть (x_0, y_0, λ_0) – любое из решений этой сис-мы, т. е. $P_0(x_0, y_0)$ – точка, в которой возможен условный экстремум.

3. Дост. усл. экстремума:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P_0) & \varphi'_y(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & \mathcal{L}''_{xx}(P_0) & \mathcal{L}''_{xy}(P_0) \\ \varphi'_y(P_0) & \mathcal{L}''_{yx}(P_0) & \mathcal{L}''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}$$ – определитель 3-го порядка

• если $\Delta(P_0) < 0$, то $P_0(x_0, y_0)$ – точка условного максимума

• если $\Delta(P_0) > 0$, то $P_0(x_0, y_0)$ – точка условного минимума.

Найти условные экстремумы.

Прим. 1 $\quad z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$

Решение.

$\varphi(x, y) = x + y + 3$

1. Ф-ция Лагранжа

$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 + \lambda(x + y + 3)$

2.
$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 2x - y + 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2y - x + 1 + \lambda = 0 \\ \varphi(x, y) = x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda = -1 \\ -x + 2y + \lambda = -1 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -4,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1,5 \\ 0 & 1 & 0 & -1,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_0 = -1,5 \\ y_0 = -1,5 \\ \lambda_0 = 0,5 \end{cases}$$ – решение системы

$P_0(-1,5;\ 1,5)$ при $\lambda = 0,5$ – стационарная точка

3. $\mathcal{L}''_{xx} = 2$

$\mathcal{L}''_{xy} = -1$

$\mathcal{L}''_{yy} = 2$

$d^2\mathcal{L}(P_0) = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2 =$

$= 2(dx^2 - dxdy + dy^2) = 2\left(\left(dx - \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}dy^2\right) > 0.$

А можно dy выразить через dx, учитывая уравнение связи, т. е.

$x + y + 3 = 0$, $\Rightarrow$, $y = -x - 3$ и

$$dy = -dx$$

Подставим в выражение для 2-ого дифференциала: $d^2 L(P_0) = 2dx^2 - 2dx \cdot (-dx) + 2dx^2 =$

$$= \underline{6dx^2 > 0}$$

Или можно вычислить определитель:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1-1-2-2) = \underline{6 > 0}$$

Следовательно, $P_0(-1,5; -1,5)$ – точка условного минимума

$$Z_{усл.\ min.} = \frac{9}{4} + \cancel{\frac{9}{4}} - \cancel{\frac{9}{4}} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 4 = -\frac{19}{4} = -4,75.$$

Прим. 2 $\quad Z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$

Решение.

$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ – ур-ние связи.

1. $L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

2. $\begin{cases} L'_x = 2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases}$ $\quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ –

решения системы, тогда

$P_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5};\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ – стационарные точки.

3. $\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda$

$\mathcal{L}''_{xy} = 0$

$\mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda$

$$d^2\mathcal{L} = 2\lambda\, dx^2 + 2\lambda\, dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$$

$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $d^2\mathcal{L}(P_1) = -\sqrt{5}(dx^2 + dy^2) < 0$, $\Rightarrow$,

$P_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ – точка условного максимума

$z_{усл.\ max} = \sqrt{5}$

$\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $d^2\mathcal{L}(P_2) = 2\lambda(dx^2 + dy^2) = \sqrt{5}(dx^2 + dy^2) > 0$, $\Rightarrow$,

$P_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5};\ -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ – точка условного минимума

$z_{усл.\ min} = -\sqrt{5}$

2 способ (с помощью определителя)

$\varphi'_x = 2x$

$\varphi'_y = 2y$

$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $P_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\varphi'_x(P_1) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ $\qquad \mathcal{L}''_{xx}(P_1) = -\sqrt{5}$

$\varphi'_y(P_1) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\qquad \mathcal{L}''_{xy}(P_1) = 0$

$\qquad \mathcal{L}''_{yy}(P_1) = -\sqrt{5}$

$$\Delta(P_1) = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{4\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{4\sqrt{5}}{5} & -\sqrt{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = -4\sqrt{5} < 0, \Rightarrow, P_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) -$$

точка условного максимума

$z_{усл.\ max} = \sqrt{5}$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad P_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\varphi'_x(P_2) = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \qquad \mathcal{L}''_{xx}(P_2) = \sqrt{5}$$

$$\varphi'_y(P_2) = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \mathcal{L}''_{xy}(P_2) = 0$$

$$\mathcal{L}''_{yy}(P_2) = \sqrt{5}$$

$$\Delta(P_2) = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{4\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{4\sqrt{5}}{5} & \sqrt{5} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 4\sqrt{5} > 0, \Rightarrow, P_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

точка условного минимума

$$z_{усл.\,min} = -\sqrt{5}$$