Функции нескольких переменных

Область определения ФНП. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность ФНП.

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - точка n-мерного арифметического пр-ва $\mathbb{R}^n$.

Опред. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ - произвольное мн-во точек n-мерного арифм пр-ва. Если каждой т-ке $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действит. число $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то говорят, что на мн-ве D задана числовая ф-ция

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ от } n \text{ переменных } x_1, x_2, \dots, x_n$$

Мн-во D - область определения ф-ции $u = f(P)$

Мн-во $E = \{u \in R : u = f(P),\ P \in D\}$ - область значений ф-ции $u = f(P)$.

Частные случаи

- $n = 2$ $\quad z = f(x, y)$ - ф-ция двух переменных

Под Областью опред. для ф-ции 2-х переменных понимается совокупность точек (x, y) плоскости Oxy, в кот. данная ф-ция определена. Т.е. область определения ф-ции $z = f(x, y)$ представляет собой конечную или бесконечную часть координатной плоскости Oxy.

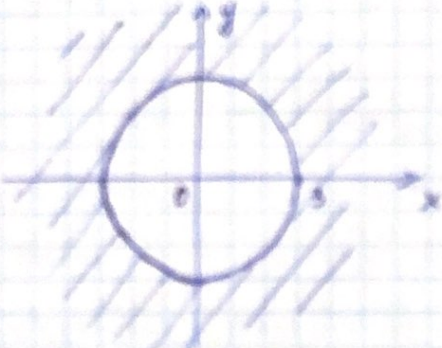
- $n = 3$ $\quad u = f(x, y, z)$ - ф-ция 3-х переменных

Область определения - некоторое тело пр-ва $Oxyz$.

Прим 1 Найти область определения ф-ции $z = \sqrt{x^2+y^2-9}$.

Решение $x^2+y^2-9 \ge 0$

$x^2+y^2 \ge 3^2$

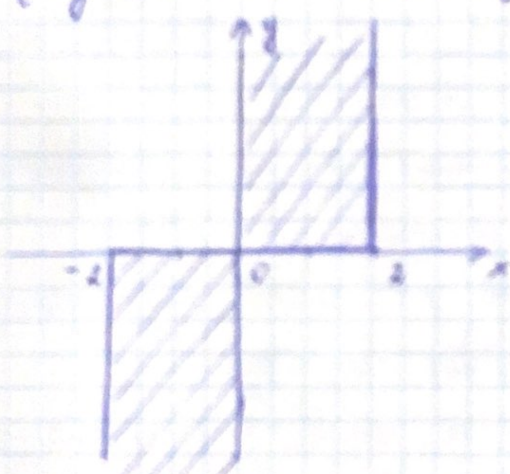


Внешность круга с центром в начале координат и $R=3$, включая границу - окружность с центром в начале координат и $R=3$

Прим 2 $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$

Решение $\begin{cases} -1 \le \frac{x}{2} \le 1 \\ xy \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ xy \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$



Опред. Линией уровня ф-ции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости Oxy, в точках которой ф-ция принимает одно и то же значение $z = C$

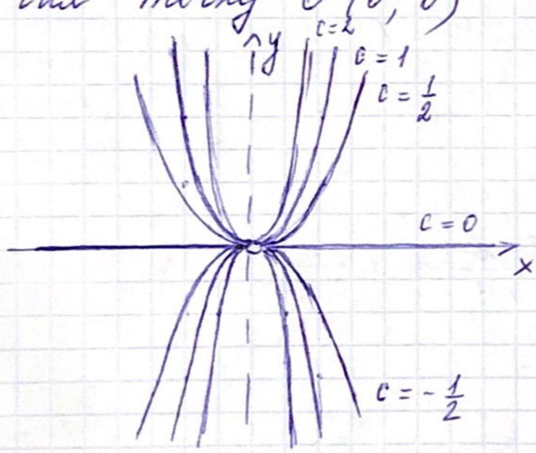
Поверхностью уровня ф-ции 3-х аргументов $u = f(x, y, z)$ назыв. такая пов-ть $f(x, y, z) = C$, в точках которой ф-ция принимает постоянное значение $u = C$.

Прим. 3 Найти область определения ф-ции $z = \frac{y}{x^2}$. Изобразить линии уровня

Решение. $x \neq 0$, $\Rightarrow$, Обл. определения – вся плоскость кроме оси ординат.

Линии уровня: $\frac{y}{x^2} = C$

$y = Cx^2$ – параболы, исключая точку $O(0; 0)$

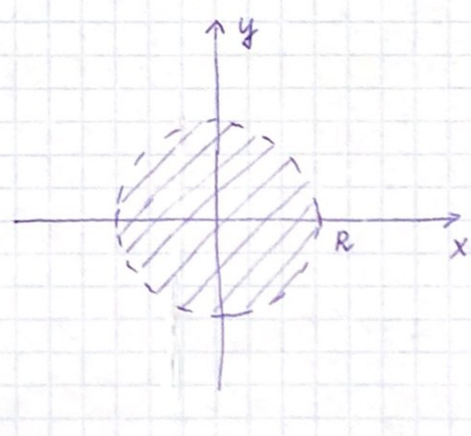


Прим. 4 $z = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$

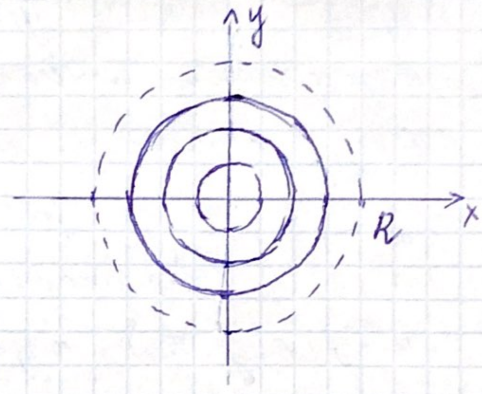
Решение.

Обл. опред: $R^2 - x^2 - y^2 > 0$

$x^2 + y^2 < R^2$



Линии уровня: $\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = C$



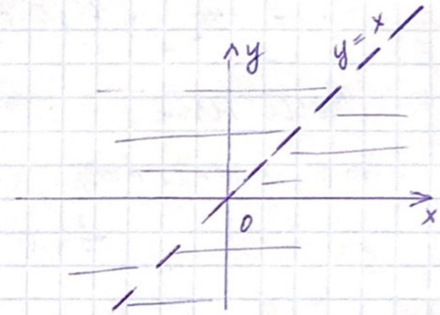
$$\sqrt{R^2-x^2-y^2} = \frac{1}{C}$$

$$R^2-x^2-y^2 = \frac{1}{C^2}$$

$$x^2+y^2 = R^2-\frac{1}{C^2} -$$

концентрические окружности с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt{R^2-\frac{1}{C^2}}$

<u>Прим. 5</u> $z = \frac{2x+3y-1}{x-y}$



Область определения: $x-y \neq 0$

$$x \neq y$$

Вся плоскость за исключением прямой $y=x$.

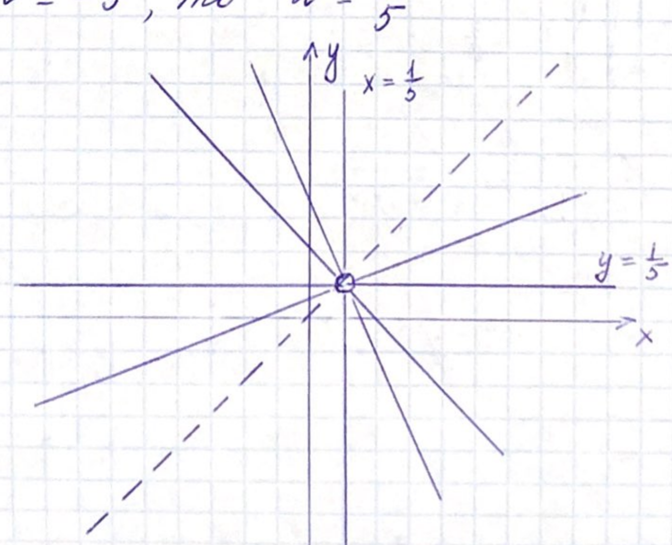
Линии уровня: $\frac{2x+3y-1}{x-y} = C$

$$2x+3y-1 = Cx - Cy$$

$$(3+C)y = (C-2)x + 1$$

Если $C \neq -3$, то $y = \frac{C-2}{C+3}x + \frac{1}{C+3}$

Если $C = -3$, то $x = \frac{1}{5}$



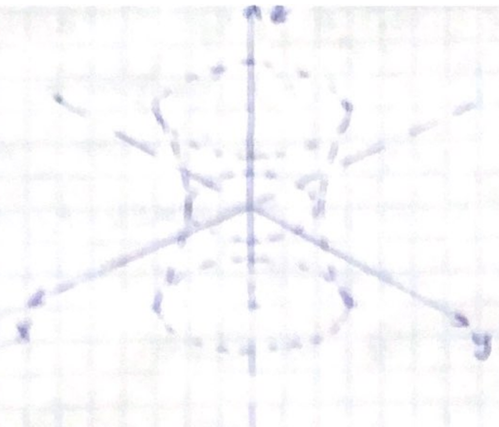
Прим 6

$u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2)$

область определения

$1 - x^2 - y^2 + z^2 > 0$

$x^2 + y^2 - z^2 < 1$ - внутренность однополостного гиперболоида



Предел и непрерывность функции

Опр Число A называется пределом функции $u = f(P)$ при $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to P_0(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0})$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что из условия

$$0 < \rho(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - x_{1_0})^2 + \ldots + (x_n - x_{n_0})^2} < \delta$$

следует $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon$

Обозн $A = \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_{1_0} \\ \ldots \\ x_n \to x_{n_0}}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Опред. Ф-ция $y = f(P)$ назыв непрерывной в т-ке P_0, если 1) ф-ция $y = f(P)$ определена в т-ке P_0

2) $\exists \lim\limits_{P \to P_0} f(P)$

3) $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

Опред Ф-ция называется непрерывной в области, если она непр-на в каждой точке этой области

Если в т-ке P_0 хотя бы одно из условий 1) - 3) нарушено, то P_0 назыв т-кой разрыва ф-ции $y = f(P)$. Т-ки разрыва могут быть изолированными и образовывать линии разрыва, пов-ти разрыва и т.д.

Замеч. Из определения предела ф-ции $u = f(P)$ следует, что если предел $\exists$, то он не зависит от пути, по которому т-ка P стремится к P_0. Число таких направлений бесконечно.

Найти пределы.

Прим 7
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{3-\sqrt{xy+9}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}{9-xy-9} =$$
$$= -\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(3+\sqrt{xy+9}\right) = -6$$

Прим 8
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 1$$

Прим 9
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = e$$

Прим 10
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = 2$$

Прим 11
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Будем приближаться к $O(0;0)$ по прямой $y = kx$, где k - некот. число, тогда
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} =$$
$= \frac{1-k^2}{1+k^2}$ - при разных значениях k предел ф-ции не одинаков, $\Rightarrow$, ф-ция в т. $O(0;0)$ предела не имеет.

Прим. 12 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$

Пусть $(x,y)\to(0;0)$ по оси Ox, тогда $y=0$

и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = 1$

Пусть $(x,y)\to(0;0)$ по оси Oy, тогда $x=0$

и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y} = -1$

Пусть $(x,y)\to(0;0)$ по прямой $y=kx$, тогда

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k}$ – при различных знач. k получаем различ. рез-ты,

$\Rightarrow$, ф-ция в т. $O(0;0)$ предела не имеет.

Прим. 13 Выяснить, имеет ли ф-ция

$f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ предел при $x\to\infty$ и $y\to\infty$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y=kx}} \frac{x^2+k^4x^4}{x^4+k^2x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = k^4,$$

$\Rightarrow$, предел $\nexists$.

Прим. 14 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{если } x=y=0 \end{cases}$

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx^3}{x^2(x^2+k^2)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0, \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0;0) = 0.$$

или: при $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$ $(0\le t<+\infty)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} = 0, \Rightarrow,$$

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha) = f(0;0) = 0,$$ т.е

ф-ция в т. $O(0;0)$ непрерывна вдоль каждого луча $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, прох. через эту т-ку,

НО! вычислим предел по кривой $y = x^2$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}, \Rightarrow,$$

предел ф-ции в т. $O(0;0)$ $\nexists$, т.е ф-ция не явл. непрерывной в самой т-ке $O(0;0)$

Прим. 15 Доказать, что в т. $(0;0)$ след. ф-ция непрерывна по каждой из переменных x и y, но разрывна по совокупности переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = y = 0 \end{cases}$$

Решение. В каждой т-ке прямой $y = kx$, где k - любое число, ф-ция принимает пост. знач.

$$f(x,y) = \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

если т-ка $(x,y) \to (0;0)$ по прямой $y = kx$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \dfrac{k}{1+k^2}$ - при различ. знач. k получаем различ. результаты, $\Rightarrow$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ $\nexists$, хотя ф-ция явл. непр по каждой из переменных, она разрывна по совокупности переменных