Семинар 2

Частные производные 1-ого порядка. Частные производные высших порядков. Дифференциалы 1-ого и 2-ого порядка ФНП.

Опр. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - произвольная фиксир. точка из области определения функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Придадим значению переменной x_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ приращение Δx_k и рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

Этот предел назыв. частной производной 1-ого пор. данной функции по переменной x_k в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Обозн. $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Если $n = 2$, то ф-ция $z = f(x, y)$ - ф-ция от двух переменных.
Переменной x дадим приращение Δx, а переменную y оставим постоянной, тогда получаем: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y)$

Аналогично, переменной y дадим приращение Δy, а переменную x оставим постоянной, тогда получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta x) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y)$$

$f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ - частные производные 1-ого порядка ф-ции $z = f(x, y)$ по переменные x и y соответственно

Частные производные 2-ого порядка ф-ции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_1} = f''_{x_k x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_2} = f''_{x_k x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и т.д.}$$

Примеры: Найти частные производные 1-ого и 2-ого порядков от заданных ф-ций:

1. $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Решение: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(xy)'_x \cdot \sqrt{x^2+y^2} - (\sqrt{x^2+y^2})'_x \, xy}{x^2+y^2} =$

$= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$

$= \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = y^3 (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$

2) $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(xy)'_y \sqrt{x^2+y^2} - (\sqrt{x^2+y^2})'_y \cdot xy}{x^2+y^2} =$

$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2) - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} =$

$= \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = x^3 (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y^3 (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x = y^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x =$

$= -\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}$

4) $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\left(y^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y=$$

$$=3y^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+y^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y=$$

$$=\frac{3y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{3y^4}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{3y^2(x^2+y^2)-3y^4}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

5) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\left(x^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_x=$$

$$=3x^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+x^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x=$$

$$=\frac{3x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{3x^4}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{3x^2(x^2+y^2)-3x^4}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

6) $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\right)'_y=$$

$$=x^3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y=$$

$$=-\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ - смешанные частные производные 2-ого порядка.

Результат многократного диф-ние ф-ции по различным переменным не зависит от очередности диф-ния при условии, что возникающие при этом смешанные част. пр. непрерывны

2. $z = y^x$

Решение: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = (y^x)'_x = y^x \ln y \quad , y > 0.$

2) $\frac{\partial z}{\partial y} = (y^x)'_y = x y^{x-1}$

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = (y^x \ln y)'_x = (y^x)'_x \ln y = y^x \ln^2 y$

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y^x \ln y)'_y = (y^x)'_y \ln y + y^x (\ln y)'_y =$

$= x \cdot y^{x-1} \cdot \ln y + \frac{y^x}{y} = y^{x-1}(x \ln y + 1)$

5) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x y^{x-1})'_x = y^{x-1} + x y^{x-1} \ln y =$

$= y^{x-1}(1 + x \ln y)$

6) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x y^{x-1})'_y = x \cdot (y^{x-1})'_y = x(x-1) y^{x-2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Прим. 2 Найти $f'_x(3,2)$, $f'_y(3,2)$, $f''_{xx}(3,2)$, $f''_{xy}(3,2)$, $f''_{yy}(3,2)$, если

$$f(x,y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$$

Решение.

$$f'_x = 3x^2y + y^2 - 2$$

$$f'_y = x^3 + 2xy + 3$$

$$f''_{xx} = 6xy$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 3x^2 + 2y$$

$$f''_{yy} = 2x$$

$$f'_x(3,2) = 3\cdot 9\cdot 2 + 4 - 2 = 56$$

$$f'_y(3,2) = 27 + 12 + 3 = 42$$

$$f''_{xx}(3,2) = 6\cdot 3\cdot 2 = 36$$

$$f''_{xy}(3,2) = 3\cdot 9 + 4 = 31$$

$$f''_{yy}(3,2) = 6$$

Дифференциал функции

Рассм. ф-цию $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Опред. Полным приращением ф-ции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в т. $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ называется разность

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, ..., x_n + \Delta x_n) - $$
$$- f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Опред. Ф-ция $u = f(P)$ назыв. дифференцируемой в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$, если всюду в некот. окрестности этой т-ки полное приращ. ф-ции представимо в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + \bar{o}(\rho),$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ - некот. числа, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, а

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2}$$

Опред. Дифференциалом du 1-ого порядка ф-ции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется главная часть полного приращения этой ф-ции в рассматриваемой точке, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, т.е.

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n$$

$dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, ..., dx_n = \Delta x_n$, т.к. дифференциалы независ. переменных по опред. равны их приращениям. Тогда

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

Прим. 3:

Найти дифференциалы след. ф-ций:

1. $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)$

Решение.

$$z'_x = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$z'_y = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dz = \frac{x\,dx + \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right) dy}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

2. $z = \ln\cos\frac{x}{y}$

Решение: $$z'_x = \frac{1}{\cos\frac{x}{y}} \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}{y}$$

$$z'_y = \frac{1}{\cos\frac{x}{y}} \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) =$$

$$= \frac{x\operatorname{tg}\frac{x}{y}}{y^2}$$

$$dz = -\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}{y}\,dx + \frac{x\operatorname{tg}\frac{x}{y}}{y^2}\,dy$$

$$dz = \operatorname{tg}\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{y}\,dx + \frac{x}{y^2}\,dy\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}{y^2}\left(x\,dy - y\,dx\right).$$

Прим. 4 Найти Δz и dz функции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 1,2.

Решение. $\Delta x = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$

$\Delta y = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$

$$z(x,y)\Big|_{\substack{x=2\\ y=1}} = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$z(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2 =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - xy - y\Delta x - x\Delta y - \Delta x\Delta y +$$
$$+ y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$$

$$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y) =$$
$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 - y\Delta x - x\Delta y - \Delta x\Delta y + 2y\Delta y + \Delta y^2 =$$
$$= (2x-y)\Delta x + (2y-x)\Delta y + \Delta x^2 - \Delta x\Delta y + \Delta y^2$$

$$\Delta z = (2\cdot 2 - 1)\cdot 0{,}1 + (2\cdot 1 - 2)\cdot 0{,}2 + 0{,}01 - 0{,}02 + 0{,}04 =$$
$$= 3\cdot 0{,}1 + 0{,}03 = 0{,}33$$

$$dz = (2x-y)dx + (2y-x)dy$$

$$dz\Big|_{\substack{x=2\\ y=1}} = 3\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 = 0{,}3.$$

Вывод: при достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$ имеют место приближенные равенства: $\Delta u \approx du$,

$$f(x_1+\Delta x_1, \ldots, x_n+\Delta x_n) \approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + df(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Прим. 5 Вычислить приближенно

$(2,01)^{3,03}$

Решение. $z = f(x,y) = x^y$

x изменяется от 2 до 2,01, $\Rightarrow$, $\Delta x = 0,01$

y изменяется от 3 до 3,03, $\Rightarrow \Delta y = 0,03$

$$f(x,y) = x^y \Big|_{\substack{x=2\\y=3}} = 2^3 = 8$$

$$f'_x = y \cdot x^{y-1}$$

$$f'_y = x^y \ln x$$

$$df = y \cdot x^{y-1} dx + x^y \ln x \, dy$$

$$df(x,y)\Big|_{\substack{x=2\\y=3}} = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,01 + 2^3 \ln 2 \cdot 0,03 =$$

$$= 12 \cdot 0,01 + 0,24 \ln 2 \approx 0,29$$

$$f(2,01;\, 3,03) \approx f(2;3) + df(2;3)$$

$$f(2,01;\, 3,03) \approx 8 + 0,29$$

$$(2,01)^{3,03} \approx 8,29$$

Дифференциал 2-ого порядка.

Опред. Дифференциалом 2-ого порядка d^2u функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назыв. дифференциал от её дифференциала 1-ого порядка, рассматриваемого как ф-цию переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$,

т.е. $d^2u = d(du)$

Аналогично $d^3u = d(d^2u)$ и

$$d^k u = d(d^{k-1}u)$$

Если ф-ция $z = f(x, y)$ - ф-ция 2-х переменных, то

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Прим. 6 Найти дифференциалы 1-ого и 2-ого порядков для функции $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$

Решение. $z'_x = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy}}$; $z'_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}}$

$$dz = \frac{(x+y)dx + x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}}$$

$$z''_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+2xy} - \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+2xy}}}{x^2+2xy} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + \cancel{2xy} - \cancel{x^2} - \cancel{2xy} - y^2}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}} = -\frac{y^2}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}}$$

$$z''_{xy} = \frac{\sqrt{x^2+2xy} - \frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+2xy}}}{x^2+2xy} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 2xy - \cancel{x^2} - xy}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}} = \frac{xy}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}}$$

$$z''_{yy} = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2+2xy}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2xy}} =$$

$$= -\frac{x^2}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}}$$

$$d^2z = \frac{-y^2dx^2 + 2xydxdy - x^2dy^2}{(x^2+2xy)\sqrt{x^2+2xy}}$$