Семинар

Экстремум функции нескольких переменных

Опред. Ф-ция $u = f(P)$ имеет максимум (минимум) в т-ке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если $\exists$ такая окрестность т-ки P_0, для всех точек $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которой, отличных от т-ки P_0, выполняется нер-во $f(P_0) > f(P)$ ($f(P_0) < f(P)$)

Максимум или минимум ф-ции называется ее экстремумом

Опред. Точка P_0 называется стационарной точкой ф-ции $u = f(P)$, если $f'_{x_k}(P_0) = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Необходимое усл. экстремума. Если P_0 – точка экстремума ф-ции $u = f(P)$, то либо P_0 – стационарная т-ка, либо в этой точке функция не дифференцируема

Достат. усл. экстремума. Пусть $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – стационарная точка ф-ции $y = f(P)$. Пусть ф-ция $y = f(P)$ дважды дифференцируема в некоторой окрест-ти т. P_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в т. P_0. Тогда

1) если $d^2u(P_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ как ф-ция $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ имеет постоянный знак при всевозможных наборах значений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, не равных одновременно нулю, то ф-ция $u = f(P)$ имеет в т. P_0 экстремум, причем имеет максимум при $d^2u(P_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) < 0$ и минимум при $d^2u(P_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) > 0$.

2) если $d^2u(P_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ явл. знакопеременной ф-цией $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, то т-ка P_0 не является т-кой экстремума для ф. $u = f(P)$

3) если $d^2u(P_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \geq 0$ или $d^2u(P_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \leq 0$, причем $\exists$ такие наборы значений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, не равных одновременно нулю, для которых значение второго дифференциала обращается в нуль, то ф-ция $u = f(P)$ в т-ке P_0 может иметь экстремум, а может и не иметь его (требуется дополнительное исследование).

Пусть $n = 2$, тогда ф-ция $z = f(x, y)$ - ф-ция двух переменных. Дост. условие в этом частном случае можно сформулировать след. образом: Пусть $P_0(x_0, y_0)$ - стационарная т-ка ф-ции $z = f(x, y)$. Пусть ф-ция $z = f(x, y)$ дважды диф-ма в некоторой окрестности т. P_0 и все её вторые частные производные непрерывны в т. P_0.

Обозначим
$$A = f''_{xx}(x_0, y_0)$$
$$B = f''_{xy}(x_0, y_0)$$
$$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

и $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда

1) если $D > 0$, то $P_0(x_0, y_0)$ - т-ка экстремума ф-ции $z = f(x, y)$, причем при $A < 0$ т-ка максимума, а при $A > 0$ точка минимума

2) если $D < 0$, то $P_0(x_0, y_0)$ - не явл. точкой

экстремума ф-ции $z = f(x, y)$

3) если $D = 0$, то требуются доп. исследования.

Найти экстремумы функций 2-х переменных:

Прим. 1 $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Решение:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$

$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$

2) Найдем стационарные т-ки

$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

$P_0(0; 3)$ - стационарная точка

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x + y - 3)'_x = 2 = A > 0$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (x + 2y - 6)'_x = 1 = B$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x + 2y - 6)'_y = 2 = C$

$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2; \quad D = 4 - 1 = 3 > 0$

4) $\left.\begin{matrix} D(P_0) > 0 \\ A(P_0) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $P_0(0; 3)$ - точка минимума

$z_{min} = z(P_0) = 9 - 18 = -9$

Ответ: $P_0(0; 3)$ точка минимума

$z_{min} = -9$

$d^2 z(P_0, dx, dy) = 2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 = 2\left(\left(dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 + \right.$
$\left. + \frac{3}{4}dy^2\right) > 0.$

Прим. 2 $\quad z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

Решение.

1) $z'_x = 6x - 3x^2$

$z'_y = 6y + 4$

2) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0 \\ 6y + 4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ 3y = -2 \end{cases}$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$P_1(0; -\frac{2}{3})$; $P_2(2; -\frac{2}{3})$ - стационарные точки.

3) $z''_{xx} = 6 - 6x$

$z''_{xy} = 0$

$z''_{yy} = 6$

$P_1(0; -\frac{2}{3})$; $\left.\begin{array}{l} A(P_1) = 6 - 6\cdot 0 = 6 > 0 \\ D(P_1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \end{array}\right] \Rightarrow,$

$P_1(0; -\frac{2}{3})$ - точка минимума

$z_{min} = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$

$P_2(2; -\frac{2}{3})$; $A(P_2) = 6 - 6\cdot 2 = -6 < 0$

$D(P_2) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0, \Rightarrow,$

$P_2(2; -\frac{2}{3})$ не явл. т-кой экстремума.

Ответ: $P_1(0; -\frac{2}{3})$ - точка минимума.

$z_{min} = -\frac{4}{3}$

$d^2z(P_1, dx, dy) = 6dx^2 + 6dy^2 > 0$

<u>Прим. 3</u> $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$

$(x>0,\ y>0)$

Решение

1) $z'_x = 2x - \frac{2}{x}$

$z'_y = 2y - \frac{18}{y}$

2) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - \frac{2}{x} = 0 \\ 2y - \frac{18}{y} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 18 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3 \end{cases}$

Учитывая условие $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$, имеем $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

$P_0(1;3)$ - стационарная точка.

3) $z''_{xx} = 2 + \frac{2}{x^2}$; $A(P_0) = 2 + \frac{2}{1} = 4 > 0$

$z''_{xy} = 0$; $B(P_0) = 0$

$z''_{yy} = 2 + \frac{18}{y^2}$; $C(P_0) = 2 + \frac{18}{9} = 4$

$D(P_0) = 16 - 0 = 16 > 0$, $\Rightarrow$,

$P_0(1;3)$ - точка минимума.

$z_{min} = 1 + 9 - 18\ln 3 = 10 - 18\ln 3$

Ответ: $P_0(1;3)$ точка минимума; $z_{min} = 10 - 18\ln 3$

<u>Прим. 4</u> $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

Решение

1) $z'_x = 6x^2 - y^2 + 10x$

$z'_y = -2xy + 2y$

2) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2xy + 2y = 0 \end{cases}$ $2y(1-x) = 0$

$y = 0$ или $x = 1$.

$y = 0$, $\Rightarrow$, $6x^2 + 10x = 0$, $\Rightarrow$, $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -5/3 \end{array}\right.$

$x = 1$, $\Rightarrow$, $6 - y^2 + 10 = 0$, $\Rightarrow$, $y = \pm 4$.

$P_1(0;0)$; $P_2(-\frac{5}{3}, 0)$; $P_3(1, 4)$; $P_4(1, -4)$ – стационарные точки.

3) $z''_{xx} = 12x + 10$

$z''_{xy} = -2y$

$z''_{yy} = -2x + 2$

$P_1(0;0)$ $\quad A(P_1) = 10 > 0$

$B = 0$

$C = 2$

$D(P_1) = 10 \cdot 2 - 0^2 = 20 > 0$, $\Rightarrow$, $P_1(0;0)$ – точка минимума

$z_{min}(P_1) = 0$ $\quad d^2z(P_1, dx, dy) = 10dx^2 + 2dy^2 > 0.$

$P_2(-\frac{5}{3}; 0)$ $\quad A(P_2) = -10 < 0$

$B = 0$

$C = \frac{16}{3}$

$D(P_2) = -10 \cdot \frac{16}{3} = -\frac{160}{3} < 0$, $\Rightarrow$, $P_2(-\frac{5}{3}, 0)$ не явл. точкой экстремума

$P_3(1, 4)$ $\quad A(P_3) = 22 > 0$

$B(P_3) = -8$

$C(P_3) = 0$

$D(P_3) = 0 - 64 = -64 < 0$, $\Rightarrow$, $P_3(1, 4)$ не явл. точкой экстремума

$P_4(1; -4)$ $\quad A(P_4) = 22$

$B(P_4) = 8$

$C(P_4) = 0$

$D(P_4) = 0 - 64 = -64 < 0$, $\Rightarrow$, $P_4(1; -4)$ не явл. точкой экстремума

Ответ: $P_1(0;0)$ точка минимума

$z_{min} = 0$

$d^2 z(P_2, dx, dy) = -10\,dx^2 + \frac{16}{3}dy^2$ – квадратичная форма dx и dy

Матрица $Q = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -10 < 0 \\ \Delta_2 = -\frac{160}{3} < 0 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$, квадратичная форма знаконеопределенная, $\Rightarrow$,

т. $P_2\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$ не явл. точкой экстремума

Аналогично рассматривается второй дифференциал в точках P_3 и P_4, и определяется его знак. В данном случае $d^2 z(P_3, dx, dy)$ и $d^2 z(P_4, dx, dy)$ явл. ф-циями знакопеременными, $\Rightarrow$, точки $P_3(1, 4)$ и $P_4(1, -4)$ не явл. точками экстремума.