Семинар 10, 11

Вычисление длины дуги и площади поверхности вращения. Выч. объемов тел.

1. Пусть гладкая кривая задана ур-нием $y = f(x)$ на $[a, b]$, тогда длина l её дуги равна $l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, где a и b - абсциссы концов дуги.

Прим. 1. Найти длину дуги цепной линии $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ между прямыми $x=0$ и $x=2$

Решение.

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right) \text{ и}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{x}-2+e^{-x}\right)} = \sqrt{\frac{e^{x}+2+e^{-x}}{4}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx =$$

$$= \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\Big|_0^2 = e - \frac{1}{e}$$

Прим. 2 Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox.

Решение.

$\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} = 0 \quad (x \geq 0)$

$x_1 = 0$ или $x_2 = 3$

$$y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} = \sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{3}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}} = \sqrt{\frac{1+2x+x^2}{4x}} = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$$

$$l = \int_0^3 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left(\frac{x\sqrt{x}}{3}+\sqrt{x}\right)\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}$$

Прим. 3 $\quad y = \frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ от $x=\frac{1}{2}$ до $x=\frac{3}{2}$

Решение.

$$y' = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$$

$$l = \int_{\frac{1}{2}}^{3/2}\frac{dx}{\sin\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right|\Big|_{1/2}^{3/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}} = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}} = \frac{2}{\pi}\ln\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{8} = \frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8} = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$$

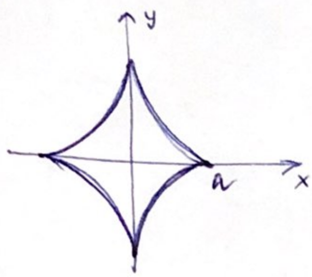
2. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ - непрерывно диф-мые ф-ции, $t_1 \le t \le t_2$, тогда дуги l вычисляется по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$$

Прим. 4 Найти длину дуги астроиды

$$x = a\cos^3 t$$
$$y = a\sin^3 t$$

Решение. Ввиду симметрии этой кривой достаточно найти длину одной четверти всей дуги.



Параметр t при этом изменится от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

$x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$

$y'_t = 3a \sin^2 t \cos t$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = 3a\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} =$$

$$= 3a\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3a \cos t \sin t = \frac{3}{2} a \sin 2t$$

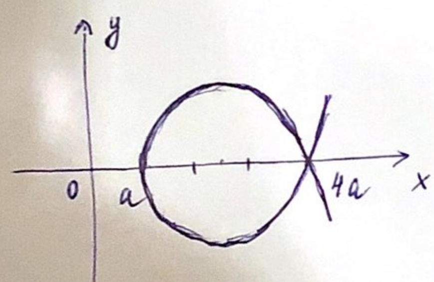
$$l = 4\int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} a \sin 2t \, dt = -3a\cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = -3a(-1-1) = 6a$$

Прим. 5 Найти длину петли кривой $(a>0)$

$x = a(t^2+1)$

$y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t)$

Решение.



Ввиду симметрии этой кривой достаточно найти длину половины всей петли.

$y = 0; \quad \frac{a}{3}(t^3 - 3t) = 0$

$t = 0$ или $t = \pm\sqrt{3}$.

$x'_t = 2at$

$y'_t = \frac{a}{3}(3t^2 - 3) = a(t^2 - 1)$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{4a^2t^2 + a^2(t^2-1)^2} = a\sqrt{(t^2+1)^2} = a(t^2+1)$$

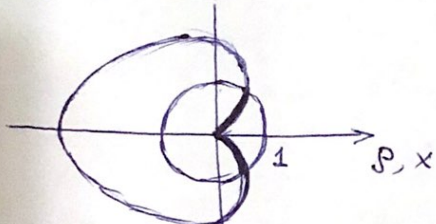
$$l = 2\int_0^{\sqrt{3}} a(t^2+1)\,dt = 2a\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2a \cdot 2\sqrt{3} = 4a\sqrt{3}$$

3. Пусть гладкая кривая задана ур-нием в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, тогда длина l дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi$$

Прим. 6 Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $\rho = 1$

Решение.



$$2(1-\cos\varphi) = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}; \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{3}; \ \varphi_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Ввиду симметрии кривой, достаточно найти длину половины дуги, тогда $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

$$\rho' = 2\sin\varphi$$

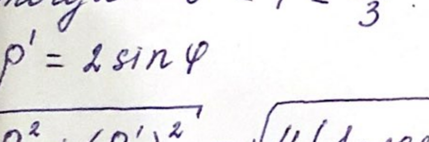
$$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{4(1-\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi} = 2\sqrt{2 - 2\cos\varphi} =$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 4\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$l = 2\int_0^{\pi/3} 4\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -16\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/3} = -16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 8(2-\sqrt{3})$$

Прим. 7 Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$

Решение



$$\rho' = a$$

$$\sqrt{a^2\varphi^2 + a^2} = a\sqrt{1+\varphi^2}$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

Найдем $I = \int \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1+\varphi^2} \\ du = \dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \\ dv = d\varphi \\ v = \varphi \end{array} \right| = \varphi\sqrt{1+\varphi^2} - \int \dfrac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} =$

$$= \varphi\sqrt{1+\varphi^2} - \int \frac{1+\varphi^2-1}{\sqrt{1+\varphi^2}}\,d\varphi = \varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} - \int\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi =$$

$$= \varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right) - I, \Rightarrow,$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right) + C$$

$$\int_0^{2\pi} a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a}{2}\cdot 2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right) = \pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$$

Площадь поверхности вращения

Площадь пов-ти, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, $a \le x \le b$, вычисляется по формуле:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Если дуга задана параметрическими ур-ниями $x = x(t)$, $y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Если дуга задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$Q_x = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi$$

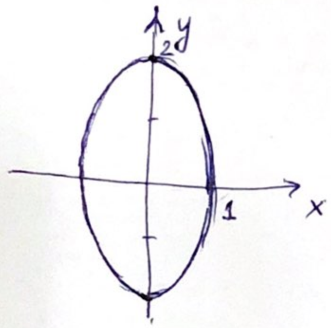
Если дуга кривой вращается вокруг произвольной оси, то

$$Q = 2\pi \int_A^B R\, dl,$$

R - рас-ние от т-ки на кривой до оси вращения, dl - дифференциал дуги, A и B - пределы интегрирования, соотв. концам дуги.

Прим 7 Найти площадь поверхности эллипсоида $4x^2+y^2=4$ вокруг оси Ox.

Решение. $4x^2+y^2=4 \mid :4$



$$x^2+\frac{y^2}{2^2}=1$$

$$y=\pm\sqrt{4-4x^2}$$

Ввиду симметричности кривой рассмотрим вращение четверти всей дуги, т.е.

$$y=\sqrt{4-4x^2}=2\sqrt{1-x^2}\,; \quad 0\le x\le 1$$

$$y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,; \quad (y')^2=\frac{4x^2}{1-x^2}$$

$$S=4\pi\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{1-x^2}}\,dx=8\pi\int_0^1\sqrt{1+3x^2}\,dx$$

$$I=\int_0^1\sqrt{1+3x^2}\,dx=x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{3x^2+1-1}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx$$

$$=x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+3x^2}}-I$$

$$2I=x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1+\frac{1}{\sqrt3}\ln\left|\sqrt3x+\sqrt{1+3x^2}\right|\Big|_0^1$$

$$2I=2+\frac{1}{\sqrt3}\ln(2+\sqrt3)$$

$$I=1+\frac{1}{2\sqrt3}\ln(2+\sqrt3).$$

$$S=8\pi\cdot I; \qquad S=8\pi+\frac{4\pi}{\sqrt3}\ln(2+\sqrt3)$$

Пример. Найти площадь пов-ти вращения вокруг оси Ox одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

Решение. $y'_t = a \sin t$

$x'_t = a(1-\cos t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$S_x = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3\frac{t}{2}\, dt = -2\cdot 8\pi a^2 \int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right) d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$= 16\pi a^2\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 16\pi a^2\left(-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{64\pi a^2}{3}$$

(кв. ед.)

Вычисление объемов тел

1. $V = \int_a^b S(x)\,dx$, $S(x)$ - площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, непр. на $[a, b]$ ф-ция.

2. Криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вращается вокруг оси Ox, тогда

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$ объем тела вращения вычисляется по этой формуле.

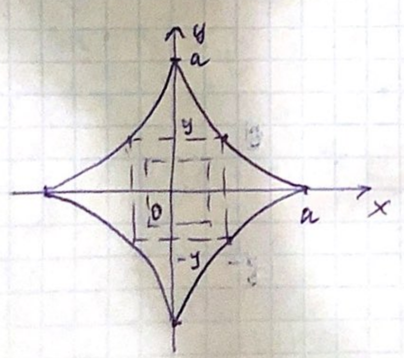
вокруг оси Oy: $V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot |f(x)|\,dx$, $a \ge 0$.

3. Криволинейный сектор, ограниченный кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, тогда объем тела вращения выч. по ф-ле:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi\, d\varphi$$

Прим. 1 Найти объем тела, основание которого — область плоскости Oxy, ограниченная астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, а сечение плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть квадрат.

Решение.



Ур-ние астроиды в декарт. координатах:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$$

$$y^2 = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 =$$

$$a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2$$

сторона квадрата $2|y|$; $-a \le x \le a$

Тогда $S = 4y^2$, т.е

$$S(x) = 4\left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) \quad и$$

$$V = 4\int_{-a}^{a}\left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right)dx =$$

$$= 4\left(a^2x - 3a^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} =$$

$$= 8\left(a^3 - \frac{9}{5}a^3 + \frac{9}{7}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{128}{105}a^3 \text{ (куб. ед.)}$$

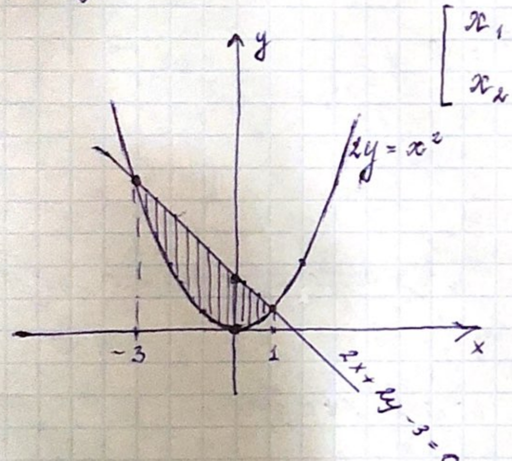
Прим. 2 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$

Решение:

Найдем абсциссы точек пересечения линий:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = -x + \frac{3}{2} \end{cases}; \quad \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0; \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$$



$$V_x = V_{1x} - V_{2x} =$$

$$= \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx - \pi\int_{-3}^{1}\frac{1}{4}x^4\,dx =$$

$$= \pi\int_{-3}^{1}\left(\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - \frac{1}{4}x^4\right)dx =$$

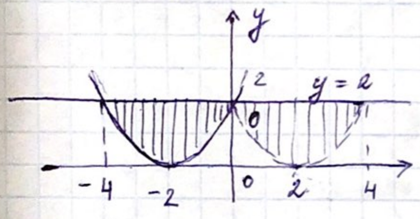
$$= \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{9}{4} - 3x + x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{272}{15}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

Прим. 3 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$

Решение: 1 способ:

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{2}(x+2)^2$$



Найдем коорд. точек пересечение линий:

$$\frac{x^2}{2} + 2x + 2 = 2$$

$$\frac{x^2}{2} + 2x = 0$$

$$x\left(\frac{x}{2} + 2\right) = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

$$V_{1y} = V_{\text{цилиндра}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi \text{ (куб. ед.)}$$

$$V_{2y} = 2\pi \int_0^4 x\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 2\right) dx =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left(\frac{x^3}{2} + 2x^2 + 2x\right) dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{8} + \frac{2x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_{-4}^{0} = \frac{32\pi}{3}$$

$$V_{\text{иск.}} = V_{1_y} - V_{2_y} = 32\pi - \frac{32\pi}{3} = \frac{64\pi}{3} \text{ (куб. ед.)}$$

2 способ

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$$

$$2y = (x+2)^2$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{2y}$$

$$x = \pm\sqrt{2y} - 2$$

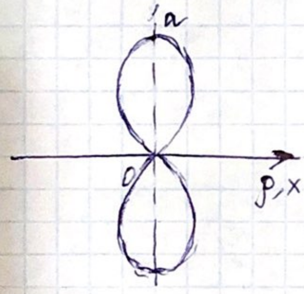
$$V_1 = \pi \int_0^2 (-\sqrt{2y} - 2)^2 dy = \pi \int_0^2 (2y + 4\sqrt{2}\sqrt{y} + 4)\, dy = \frac{68}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi\int_0^2 (\sqrt{2y}-2)^2\,dy = \pi\int_0^2 (2y - 4\sqrt{2}\sqrt{y} + 4)\,dy = \frac{4\pi}{3}$$

$$V_{иск.} = V_1 - V_2 = \frac{68}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{64\pi}{3} \text{ (куб. ед.)}$$

Прим 4 Найти объем тела, образованного вращением кривой $\rho = a\sin^2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение:



$$\rho = a\sin^2\varphi$$

$$\rho = \frac{a}{2}\,2\sin^2\varphi$$

$$\rho = \frac{a}{2}(1-\cos 2\varphi)$$

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3\sin\varphi\,d\varphi$$

$$V = 2\cdot\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi/2} a^3\sin^7\varphi\,d\varphi = -\frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^6\varphi\,d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi a^3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2\varphi)^3\,d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi a^3\int_0 (1 - 3\cos^2\varphi + 3\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\,d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi a^3\left(\cos\varphi - \cos^3\varphi + \frac{3}{5}\cos^5\varphi - \frac{1}{7}\cos^7\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\left(-\frac{16}{35}\right) = \frac{64}{105}\pi a^3 \text{ (куб. ед.)}$$

Если кривая задана параметрическими ур-ниями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$,

$\varphi(t_1) = a$ и $\varphi(t_2) = b$, тогда

объем тела, полученного в результате вращения криволин. трапеции, вокруг оси Ox вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

вокруг оси Oy: $V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\cdot\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$

или: $V_y = \pi \int_c^d x^2\,dy = \pi \int_{p_1}^{p_2} \varphi^2(t)\,\psi'(t)\,dt$, где

$c = \psi(p_1)$

$d = \psi(p_2)$

Прим. 5 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, огранич. кривой $x = a\cos t$, $y = a\sin 2t$, осью Ox $(0 \le x \le a)$

Решение.

$x = 0$; $a\cos t = 0$; $\cos t = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$

$x = a$; $a\cos t = a$; $\cos t = 1 \Rightarrow t_2 = 0$

$$V_x = -\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^2 2t \cdot a\sin t\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{\pi/2} 4\sin^3 t\cos^2 t\,dt = -4\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^2 t\,d(\cos t) =$$

$$= -4\pi a^3 \left(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -4\pi a^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi a^3$$

(куб. ед.)