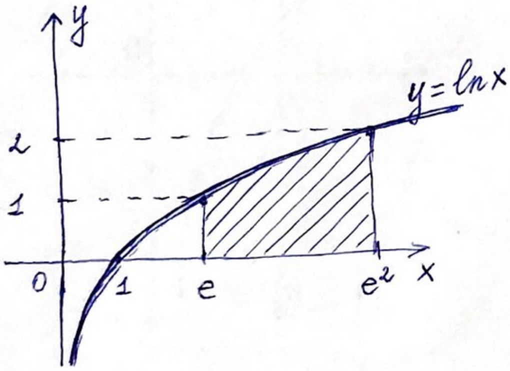
Семинар 9

Вычисление площадей плоских фигур

1. $S = \left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right|$ - формула для вычисления площади криволинейной трапеции (кривая задана в декарт. коорд.)

6.453 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$

Решение.



$$S = \int\limits_e^{e^2} \ln x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= v \cdot \ln x \Big|_e^{e^2} - \int\limits_e^{e^2} dx =$$

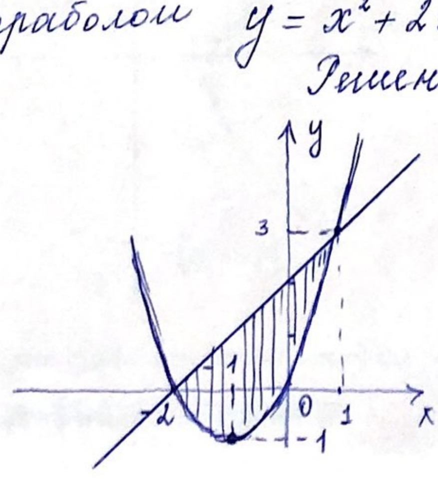
$$= (x \ln x - x)\Big|_e^{e^2} =$$

$$= x(\ln x - 1)\Big|_e^{e^2} = e^2 - 0 = e^2 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: e^2 (кв. ед.)

6.456 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.

Решение.



$$y = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$

Найдем абсцисс точек пересечения параболы и прямой:

$$x^2 + 2x = x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$S = \left| \int_a^b f_2(x) - f_1(x) \right|$$

$$S = \int_{-2}^{1} (x+2-x^2-2x)\,dx = \int_{-2}^{1} (2-x-x^2)\,dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}$$

Ответ: $\frac{9}{2}$

6.467 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в точке $x = e$ и осью Ox.

Решение

1) $y = \ln x$

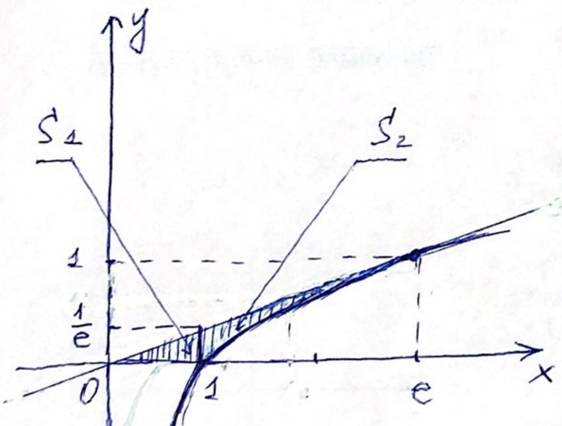
Найдем ур-ние касательной в т-ке $x = e$

$y' = \frac{1}{x}$; $y'(e) = \frac{1}{e}$; $y(e) = 1$

Ур-ние касательной: $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$

$y - 1 = \frac{1}{e}x - 1$

$y = \frac{1}{e}x$



2) $S = S_1 + S_2$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$S_2 = \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{e}\int_1^e x\,dx - \int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2e}\Bigg|_1^e - x\ln x\Bigg|_1^e + x\Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - \cancel{e} + \cancel{e} - 1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1$$

$$S = \cancel{\frac{1}{2e}} + \frac{e}{2} - \cancel{\frac{1}{2e}} - 1 = \frac{e}{2} - 1$$

2. Вычисление площади фигуры, заданной параметрически.

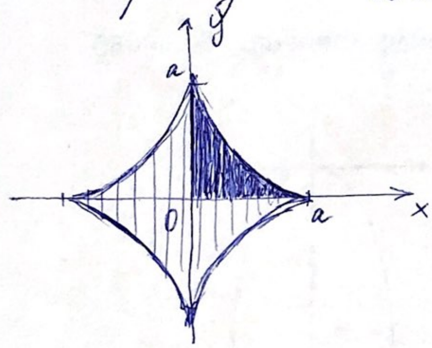
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ - параметр. ур-ние кривой,

прямые $x = a$, $x = b$ и ось Ox.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, dx(t), \text{ где}$$

$a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$

6.478 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$



$x_1 = 0$; $a\cos^3 t_1 = 0$; $t_1 = \frac{\pi}{2}$

$x_2 = a$; $a\cos^3 t_2 = a$; $t_2 = 0$

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\, d(a\cos^3 t) =$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\, dt = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t\, dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, \sin^2 t\, dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \cdot \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \cos 2t\, dt\right) =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\left(\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4t}{2}\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, d(\sin 2t)\right) =$$

$$= \frac{3}{4}a^2\left(\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \cos 4t\, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, d(\sin 2t)\right) =$$

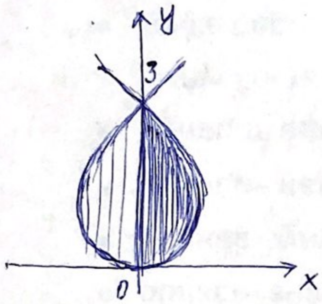
$$= \frac{3}{4}a^2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{\sin^3 2t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi a^2$$

Ответ: $\frac{3}{8}\pi a^2$

6.479 Найти площадь петли кривой

$$x = \frac{1}{3} t (3 - t^2) ; \quad y = t^2$$

Решение.



Т-ки пересечения с осями координат

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow t = \pm\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

Движение по кривой осуществляется по часовой стрелке, поэтому $t_1 = \sqrt{3}$, а $t_2 = 0$.

$$S = 2 \int_{\sqrt{3}}^{0} t^2 \, d\left(\frac{1}{3} t (3 - t^2)\right) = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{3}}^{0} t^2 (3 - 3t^2) \, dt =$$

$$= 2 \int_{\sqrt{3}}^{0} (t^2 - t^4) \, dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{0} = \frac{2 \cdot 9\sqrt{3}}{5} - \frac{2\,3\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \frac{18\sqrt{3}}{5} - \frac{10\sqrt{3}}{5} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

3. Вычисление площадей фигур в полярных координатах.

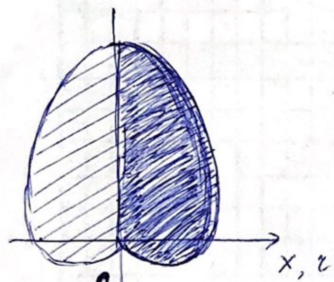
Кривая задана непр. ф-цией $r = r(\varphi)$

Лучи: $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$, где φ, r - поляр. координаты

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi \quad ; \quad \alpha \le \varphi \le \beta .$$

6.483 Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой
$r = a(1 + \sin\varphi)$

Решение.



$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{3\pi/2} a^2(1+\sin\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\varphi + 2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\varphi + 2a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\varphi\, d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\varphi - \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} - 2a^2\cos\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\cdot\pi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Ответ: $\frac{3}{2}\pi a^2$

6.486 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a\,tg\varphi \sec\varphi$,
$r = 2a\cos\varphi$ и полярной осью.

Решение.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$ - связь между декартовыми и полярными координатами

$tg\varphi = \frac{y}{x}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

1) $r = a\,tg\varphi \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$

$r = a \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{r}{x}$

$ay = x^2$ или $x^2 = ay$ - парабола с вершиной в т. $O(0;0)$

2) $r = 2a\cos\varphi \quad | \cdot r$

$r^2 = 2ar\cos\varphi$

$x^2+y^2 = 2ax$

$(x-a)^2+y^2 = a^2$ - окружность с центром в т. $A(a,0)$ и $R = a$

3) Найдем т-ки пересечения кривых

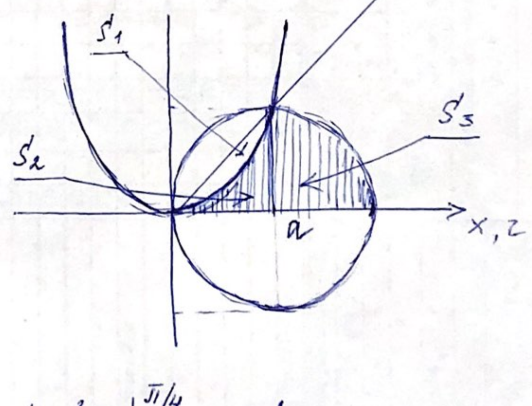
$a\,tg\varphi \cdot \frac{1}{\cos\varphi} = 2a\cos\varphi \quad | \cdot \frac{1}{a}\ ;\ a \neq 0.$

$tg\varphi = 2\cos^2\varphi$

$tg\varphi = \frac{2}{1+tg^2\varphi}$

$tg^3\varphi + tg\varphi - 2 = 0$

$tg\varphi = \frac{\pi}{4}$ (I четв.)

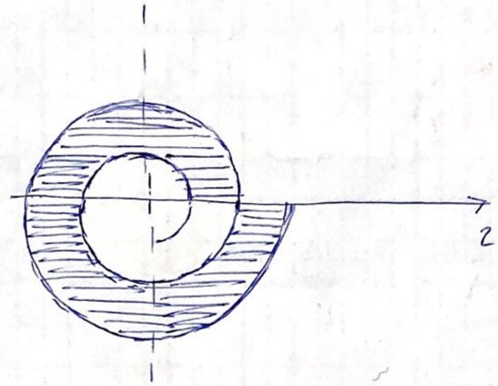


4) $S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2 tg^2\varphi \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{tg^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{6}$

$S_2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3}\ ;\quad S_3 = \frac{\pi a^2}{4}$

$S = S_2 + S_3 = \frac{a^2}{3} + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{4a^2+3\pi a^2}{12} = \frac{a^2}{12}(4+3\pi)$

6.488 Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными ветвями логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$, начиная с $\varphi = 0$.



$$S = \frac{1}{2}\left(\int_{2\pi}^{4\pi} e^{2\varphi} d\varphi - \int_{0}^{2\pi} e^{2\varphi} d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2\varphi}\Big|_{2\pi}^{4\pi} - e^{2\varphi}\Big|_{0}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{8\pi} - e^{4\pi} - e^{4\pi} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{8\pi} - 2e^{4\pi} + 1\right) = \frac{1}{4}\left(e^{4\pi} - 1\right)^2$$