# Семинар 1

## Дифференциальные ур-ния 1-ого порядка

1. $F(x, y, y') = 0$ или

$y' = f(x, y)$ – разрешенное относит-но $y'$.

$(x' = g(x, y))$

Решение д.у. 1-ого пор. – ф-ции вида

$y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, удовл. данному д.у.

Общий интеграл: $\Phi(x, y, C) = 0$, $C = const$.

2. Поле направлений

Опред. Совокупность направлений $tg\,\alpha = f(x, y)$ назыв. полем направлений д.у. $y' = f(x, y)$

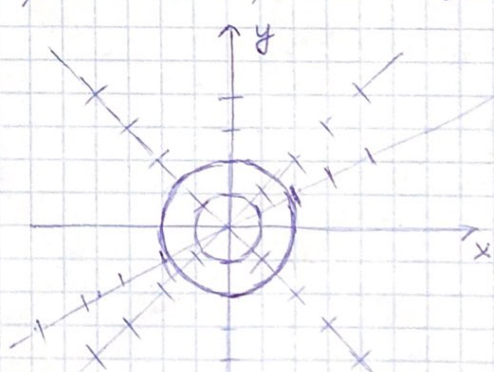
Обозн. черточки или стрелочки с углом наклона $\alpha$.

Опред. Кривые $f(x, y) = k$, в точках которых наклон поля имеет постоянное значение, равное $k$, называются изоклинами.

Построив изоклины и поле направлений, в простейших случаях можно приближенно нарисовать поле интегральных кривых.

Прим. Методом изоклин начертить (приблизит.) гр. решения д.у.

$$y' = -\frac{x}{y}$$




Изоклины: $-\frac{x}{y} = k$; $k = tg\,\alpha$

$$y = -\frac{x}{k}$$

$k = 0$; $x = 0$; $tg\,\alpha = 0$, $\Rightarrow$, $\alpha = 0$

$k = 1$; $y = -x$; $tg\,\alpha = 1$, $\Rightarrow$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$k = -1$; $y = x$ $tg\,\alpha = -1$, $\Rightarrow$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

$k = 2$; $y = -\frac{1}{2}x$; $tg\,\alpha = 2$; $\Rightarrow$, $\alpha = arctg\,2$

$k = -2$ $y = \frac{1}{2}x$; $tg\,\alpha = -2$, $\Rightarrow$, $\alpha = arctg(-2)$

$x^2 + y^2 = C$.

## ДУ с разделяющимися переменными.

$y' = f(x)\, g(y)$ или

$f_1(x)\, g_1(y) + f_2(x)\, g_2(y) = 0$.

Решить ДУ:

Прим. 1 $\quad tg\,x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x\, ctg\,y\, dy = 0 \mid : \sin^2 y \cdot \cos^2 x \neq 0$

$$\frac{tg\,x}{\cos^2 x}dx + \frac{ctg\,y}{\sin^2 y}dy = 0$$

$$\int \frac{tg\,x}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{ctg\,y}{\sin^2 y}\, dy = C$$

$$\frac{tg^2 x}{2} - \frac{ctg^2 y}{2} = C$$

$$tg^2 x - ctg^2 y = C$$

$ctg^2 y = tg^2 x + C$ – общий интеграл д. у.

Прим. 2 $\quad xyy' = 1 - x^2$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \mid \cdot dx$$

$$xy\,dy = (1 - x^2)\, dx \quad \mid : x \neq 0$$

$$y\,dy = \frac{1 - x^2}{x}\, dx$$

$$y\,dy = \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$$

$$\int y\,dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \ln|x| + \ln C$$

$$x^2 + y^2 = 2\ln|x| + \ln C$$

$$x^2 + y^2 = \ln x^2 + \ln C$$

$$x^2 + y^2 = \ln Cx^2$$

При делении на $x \neq 0$ могло быть потеряно решение $x = 0$, но $x = 0$ не явл. решением исходного д. у., т.к. $0 \cdot yy' = 1$ (неверно).

Прим 3 $\quad 3e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1-e^x)\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\,dy = 0 \quad | : \operatorname{tg} y \neq 0$

$$3e^x dx + (1-e^x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} y}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\,dy = 0 \quad | : (1-e^x)\neq 0$$

$$\frac{3e^x}{1-e^x}\,dx + \frac{1}{\operatorname{tg} y}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}\,dy = 0$$

$$-3\int\frac{d(1-e^x)}{1-e^x} + \int\frac{d(\operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} = 0$$

$$-3\ln|1-e^x| + \ln|\operatorname{tg} y| = \ln C$$

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(1-e^x)^3} = C$$

$\operatorname{tg} y = C(1-e^x)^3$ - общий интеграл д.у

$\operatorname{tg} y = 0$ - решение данного д.у, но оно описано общим интегралом при $c=0$.

$e^x = 1$, $x = 0$ - тоже решение данного д.у., но оно не описывается общим интегралом, поэтому $x=0$ - особое решение.

Ответ: $\operatorname{tg} y = c(1-e^x)^3$; $x = 0$.

Прим 4 $\quad (1+e^x)yy' = e^x$; $y(0)=1$ - найти част. реш. или част. интеграл д.у.

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$(1+e^x)y\,dy = e^x dx$$

$$y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\int y\,dy = \int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \ln C$$

$$y^2 = \ln(1+e^x)^2 + \ln C$$

$y^2 = \ln\left(C(1+e^x)^2\right)$ - общий интеграл д.у

$$y(0) = 1$$

$$1^2 = \ln\left(C(1+e^0)^2\right)$$

$$1 = \ln 4C$$

$$4C = e$$

$$c = \frac{e}{4}.$$

$y^2 = \ln\left(\frac{e}{4}(1+e^x)^2\right)$ - частный интеграл д.у.

Прим. 5 $y' \sin x = y \ln y$ ; $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y$$

$$\sin x \, dy = y \ln y \, dx$$

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$$

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$$

$$\ln |\ln y| = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + \ln C$$

$\ln y = C \, tg \frac{x}{2}$ – общий интеграл д.у.

$y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ; $\ln 1 = C \cdot tg \frac{\pi}{4}$

$0 = C$, $\Rightarrow$, частный интеграл имеет вид: $\ln y = 0$ или $\underline{y = 1}$

Прим. 6 $xy \, dx + (x+1) \, dy = 0$

$(x+1) \, dy = -xy \, dx \quad | : y(x+1) \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x+1} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x+1-1}{x+1} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1} - \int dx$$

$$\ln |y| = \ln |x+1| - x + \ln C$$

$$\ln |y| = \ln C |x+1| - \ln e^x$$

$$\ln |y| = \ln \frac{C(x+1)}{e^x}$$

$y = C(x+1) \cdot e^{-x}$ – общее реш. д.у.

$y = 0$ – реш., но оно описано общим реш. д.у. при $C = 0$

$x + 1 = 0$ – реш., но при $x = -1$ $y = 0$

Ответ: $y = C(x+1) e^{-x}$

Ур-ния вида $y' = f(ax + by + c)$ приводятся к ур-ниям с разд. переменными заменой $z = ax + by + c$.

Прим. 7

$$y' = (8x + 2y + 1)^2$$

$$z = 8x + 2y + 1$$

$$z' = 8 + 2y' \Rightarrow y' = \frac{z' - 8}{2}$$

$$\frac{z' - 8}{2} = z^2$$

$$z' - 8 = 2z^2$$

$$z' = 2(z^2 + 4)$$

$$\frac{dz}{dx} = 2(z^2 + 4)$$

$$\frac{dz}{z^2 + 4} = 2dx$$

$$\int \frac{dz}{4 + z^2} = 2\int dx$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{2} = 2x + C$$

$$\operatorname{arctg} \frac{z}{2} = 4x + C$$

$$\frac{z}{2} = \operatorname{tg}(4x + C)$$

$$z = 2\operatorname{tg}(4x + C)$$

$8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}(4x + C)$ - общий интеграл д.у.

## Однородные дифференциальные ур-ния

Опред Д.у. вида $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ (1) назыв. однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - однородные ф-ции одной и той же ст.
Д.у. (1) может быть приведено к виду
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
Подстановка $y = xu$, где $u$ - неизвест. ф-ция
$$y' = u + xu'$$
Исходное д.у. преобразуется в д.у. с разделяющимися переменными.
Можно применять подстановку
$x = yu$

Прим 8 $\quad (x-y)\,y\,dx - x^2\,dy = 0 \quad | : x^2 \neq 0$

$$\left(1-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}\,dx - dy = 0$$

$$dy = \left(1-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$

$$y' = \left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$

Подстановка: $y = xu$
$$y' = u + xu'$$

$$u + xu' = (1-u)\,u$$

$$u + xu' = u - u^2$$

$$xu' = -u^2$$

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$$

$$\frac{1}{u} = \ln Cx$$

$$\frac{x}{y} = \ln Cx$$

$$Cx = e^{\frac{x}{y}}$$

$$x = C e^{\frac{x}{y}}$$ – общий интеграл д.у.

Прим. 9 $\quad y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0 \quad | : x \neq 0$

$$\frac{y}{x}dx + \left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right)dy = 0$$

$$\frac{y}{x} + \left(2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1\right)y' = 0$$

$$y' = \frac{y/x}{1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$y = xu, \quad u = \frac{y}{x}$

$y' = u + xu'$

$$u + xu' = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}}$$

$$xu' = \frac{u}{1 - 2\sqrt{u}} - u$$

$$xu' = \frac{2u\sqrt{u}}{1 - 2\sqrt{u}}$$

$$\frac{1 - 2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1 - 2\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u}} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$C - \frac{1}{\sqrt{u}} - \ln|u| = \ln|x|$

$\ln|ux| = C - \frac{1}{\sqrt{u}}$

$\ln|y| = C - \sqrt{\frac{x}{y}}$

$\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$ – общий интеграл д.у

Прим. 10 Найти частное решение д.у

$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0; \quad y(2) = 1$

$\left(1 - 3 \cdot \frac{y^2}{x^2}\right) dx + 2\frac{y}{x}\,dy = 0$

$2\frac{y}{x} \cdot y' = 3\frac{y^2}{x^2} - 1$

$u = \frac{y}{x}; \quad y = xu; \quad y' = u + xu'$

$2u(u + xu') = 3u^2 - 1$

$2u^2 + 2uxu' = 3u^2 - 1$

$2uxu' = u^2 - 1$

$\frac{2u}{u^2 - 1}\,du = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{2u}{u^2-1}\,du = \int \frac{dx}{x}$

$\ln(u^2 - 1) = \ln|x| + \ln C$

$u^2 - 1 = Cx$

$\frac{y^2}{x^2} - 1 = Cx$

$y^2 - x^2 = Cx^3$

$y^2 = Cx^3 + x^2$ – общий интеграл д.у

$y(2) = 1; \quad 1 = C \cdot 8 + 4; \quad C = -\frac{3}{8}$

$y^2 = x^2 - \frac{3}{8}x^3$

$y^2 = x^2\left(1 - \frac{3}{8}x\right)$ – частный интегра