Семинар

Интегрирование ЛНДУ высшего порядка методом вариации произвольных постоянных

Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Прим. 1 $y'' + y = ctg\,x$

Решение. 1) Решить соответствующее однородное ур-ние $y'' + y = 0$

$$k^2 + 1 = 0$$
$$k^2 = -1; \quad k_{1,2} = \pm i$$

$\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ – общее решение однород. ур-ния.

2) Общее решение данного неоднородного диф. ур-ния будем искать в виде $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$, а ф-ции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находим из системы

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$y_1(x) = \cos x$

$y_2(x) = \sin x$

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$ – определитель Вронского.

$$C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \Rightarrow, \quad C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx + C_1$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \quad \Rightarrow, \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx + C_2$$

Тогда $C_1(x) = -\int \sin x \cdot \operatorname{ctg} x\,dx = -\int \cos x\,dx = \underline{-\sin x + C_1}$

$$C_2(x) = \int \cos x \cdot \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_2$$

3) $y = (-\sin x + C_1)\cos x + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_2\right)\sin x$

$$y = -\cancel{\sin x \cos x} + C_1 \cos x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| \sin x + \cancel{\cos x \sin x} + C_2 \sin x$$

$$y = \underbrace{C_1 \cos x + C_2 \sin x}_{\tilde{y}\text{ - общее реш. ЛОДУ}} + \underbrace{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| \cdot \sin x}_{y^*\text{ - частное реш. ЛНДУ}}$$

<u>Прим. 2</u> $\quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$

<u>Решение:</u> 1) $y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0$

$(k+1)^2 = 0; \quad k_{1,2} = -1$

$y_1 = e^{-x}$

$y_2 = x e^{-x}$

$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ - общее решение соответств. однород. ур-ния.

2) $y = c_1(x)\, e^{-x} + c_2(x)\, x e^{-x}$

$y_1' = (e^{-x})' = -e^{-x}$

$y_2' = (x e^{-x})' = e^{-x} - x e^{-x}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x) e^{-x} \end{vmatrix} = (1-x) e^{-2x} + x e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$c_1'(x) = -\frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\frac{\cancel{x} \cdot \cancel{e^{-x} \cdot e^{-x}}}{\cancel{x} \cdot \cancel{e^{-2x}}} = -1$$

$$c_2'(x) = \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{\cancel{e^{-x} \cdot e^{-x}}}{x \cdot \cancel{e^{-2x}}} = \frac{1}{x}$$

$$c_1(x) = -\int dx = -x + C_1 = C_1 - x$$

$$c_2(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C_2$$

3) $y = (C_1 - x)\, e^{-x} + (\ln|x| + C_2)\, x e^{-x}$

$$y = C_1 e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} \ln|x| + C_2 x e^{-x} =$$

$$= C_1 e^{-x} + (C_2 x - x) e^{-x} + x e^{-x} \ln|x| =$$

$$= C_1 e^{-x} + \underbrace{(C_2 - 1)}_{= C_2} x e^{-x} + x e^{-x} \ln|x| =$$

$$= \underbrace{C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}}_{= \tilde{y}} + \underbrace{x e^{-x} \ln|x|}_{= y^*}$$

$\tilde{y}$ – общее реш. ЛОДУ

y^* – частное реш. ЛНДУ.

Прим. 3 $\quad y''' + y' = tg\,x \cdot \sec x$

Решение. 1) $y''' + y' = 0$

$$k^3 + k = 0$$
$$k(k^2+1) = 0$$
$$k_1 = 0 \quad \text{или} \quad k^2 = -1$$
$$k_{2,3} = \pm i$$

$\tilde{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$ - общее реш. ЛОДУ

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = \cos x$$
$$y_3 = \sin x$$

2) $y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$

$y_1' = 0 \;;\; y_1'' = 0$

$y_2' = -\sin x \;;\; y_2'' = -\cos x$

$y_3' = \cos x \;;\; y_3'' = -\sin x$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$

$C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ находим из системы:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ C_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ C_3'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{удобно строить через алгебр. дополнения}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin x & -\cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ C_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin x & -\cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ tg x \cdot \sec x \end{pmatrix}$$

$$C_1'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$C_2'(x) = -\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$C_3'(x) = -\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$C_1(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C_1$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + C_2$$

$$C_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx =$$

$$= x - tg x + C_3$$

3) $y = C_1 + \frac{1}{\cos x} + (\ln|\cos x| + C_2)\cos x + (x - tg x + C_3)\sin x$

$$y = \underbrace{C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x}_{= \tilde{y}} + \underbrace{\frac{1}{\cos x} + (\ln|\cos x|) \cdot \cos x + x \sin x - tg x \cdot \sin x}_{= y^*}$$

Найти общее решение диф. ур-ния $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 2$, если известно частное решение соответств. однородного ур-ния $y_1 = \frac{1}{x}$

Решение.

1) Найдем 2-ое частное решение ЛОДУ по формуле Остроградского - Лиувилля:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{x} \int x^2 \cdot e^{-\ln x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{x} \int x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}$$

Тогда $\tilde{y} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \underbrace{C_2 \cdot \frac{x}{2}}_{=C_2} = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 \cdot x$ - общее решение однородного диф. ур.

2) $y = C_1(x) \cdot \frac{1}{x} + C_2(x) \cdot x$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x \\ -\frac{1}{x^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx = -\int \frac{2x}{\frac{2}{x}}\,dx = -\int x^2\,dx = -\frac{x^3}{3} + C_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx = \int dx = x + C_2$$

3) $y = \left(C_1 - \frac{x^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{x} + (x + C_2)x = C_1 \cdot \frac{1}{x} + C_2 x + \frac{2}{3} x^2$