семинар

Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

ЛНДУ с постоянными коэффициентами - диф. ур-ние вида

(*) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - некот. числа, $a_n \neq 0$.

Если $f(x) \equiv 0$, то диф. ур-ние назыв. однородным

(**) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Для решения ЛНДУ (*) сначала решают соответствующее однородное диф. ур-ние (**).

Общее решение ЛНДУ (*) есть сумма частного решения этого ЛНДУ и общего решения соответствующего однородного (**),

т.е. $y = \bar{y} + y^*$,

$y = y_{о.н.}$ - общее решение неоднородного диф. ур.

$\bar{y} = y_{о.о.}$ - общее реш. соответств. однород. ур.

$y^* = y_{ч.н.}$ - частное решение неоднородного диф. ур.

В каком виде искать частное решение?

1) Если $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$, то частное решение нужно искать в виде

$y^* = x^k T_m(x) e^{\alpha x}$, где $T_m(x)$ - общий вид мн-на степени m (той же, что и $P_m(x)$!)

k - кратность числа α, как корня характеристического ур-ния соответствующего ЛОДУ.

2) Если $f(x) = e^{\alpha x}(Q_{m_1}(x)\cos\beta x + R_{m_2}(x)\sin\beta x)$, то частное решение нужно искать в виде:

$y^* = x^k e^{\alpha x}(S_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x)$, где

$S_m(x)$, $T_m(x)$ - общие виды многочленов степени $m = \max(m_1, m_2)$.

k - кратность числа $\alpha + i\beta$ как корня характеристического ур-ния соотв. ЛОДУ

3) Если правая часть есть сумма ф-ций $f_1 + f_2 + \ldots + f_p$, то частное решение ищется как сумма частных решений ур-ний с той же левой частью, но с правыми $f_1, f_2, \ldots, f_p$ в отдельности,

т. е. $y^* = y_1^* + y_2^* + \ldots + y_p^*$

Прим 1 Указать вид частных решений ЛНДУ:

$y'' - 4y = x^2 e^{2x}$

Решение: 1) $y'' - 4y = 0$ - соотв. ЛОДУ

характ. ур. $k^2 - 4 = 0$

$k^2 = 4$; $k_{1,2} = \pm 2$

$\tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

2) $f(x) = x^2 e^{2x}$ - правая часть

$P_m(x) = x^2$, $\Rightarrow$, $m = 2$, $\Rightarrow$, $T_m(x) = Ax^2 + Bx + C$

$e^{\alpha x} = e^{2x}$, $\Rightarrow$, $\alpha = 2$, $\Rightarrow$ $k = 1$ - кратность числа 2 как корня характерист. ур-ния

Тогда: $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)e^{2x}$

Прим. 2 $\quad y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

1) $y'' - 4y' + 4y = 0$

хар. ур. $\quad k^2 - 4k + 4 = 0$

$$(k-2)^2 = 0$$

$$k_{1,2} = 2$$

$$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

2) $f(x) = \sin 2x + e^{2x} = f_1(x) + f_2(x)$

$f_1(x) = \sin 2x = e^{0x}(0 \cdot \cos 2x + 1 \sin 2x)$,

$\Rightarrow$, $\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$, $\Rightarrow$, $k = 0$ (числа $2i$ не явл. корнем характерист. ур-ния)

$m = 0$ - степень многочленов

Тогда, $\quad y_1^* = x^0 e^{0x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

$$y_1^* = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

$$f_2(x) = e^{2x}$$

$P_m(x) = 1$, $\Rightarrow$, $m = 0$ - степень мн-на,

$\Rightarrow$, $T_m(x) = C$

$e^{\alpha x} = e^{2x}$, $\Rightarrow$, $\alpha = 2$, $\Rightarrow$, $k = 2$ - кратность числа 2 как корня характ. ур-ния.

Тогда $\quad y_2^* = x^2 \cdot C e^{2x} = Cx^2 e^{2x}$

3) $y^* = y_1^* + y_2^*$

$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x + Cx^2 e^{2x}$ - вид частного решения ЛНДУ

Прим. 3 $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x + xe^{2x}$

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

$k^2 - 5k + 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} k_1 = 2 \\ k_2 = 3 \end{array}\right.$

$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

2) $f(x) = (x^2+1)\,e^x + x\,e^{2x} = f_1(x) + f_2(x)$

$f_1(x) = (x^2+1)e^x$, $\Rightarrow$, $y_1^* = (Ax^2+Bx+C)e^x$

$f_2(x) = xe^{2x}$, $\Rightarrow$, $y_2^* = x(Dx+E)e^{2x}$

3) $y^* = y_1^* + y_2^*$

$y^* = (Ax^2+Bx+C)e^x + (Dx+E)x\cdot e^{2x}$

Найти общее решения диф. ур-ний.

Прим. 4 $y'' - y = e^x$

Решение. 1) $y'' - y = 0$

$k^2 - 1 = 0$; $k^2 = 1$; $k_{1,2} = \pm 1$

$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ - общее реш. соотв. однородного диф. ур.

2) $f(x) = e^x$, $\Rightarrow$, $m = 0$ - степень мн-на, $\alpha = 1$, $\Rightarrow$, $k = 1$,

тогда $y^* = Axe^x$ - вид частного реш неоднород. ур-ния.

$(y^*)' = A(e^x + xe^x) = A(1+x)e^x$

$(y^*)'' = A(e^x + (1+x)e^x) = A(2+x)e^x$

Подставим выр-ния для $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное ур-ние:

$A(2+x)e^x - Axe^x = e^x$

$2Ae^x + \cancel{Axe^x} - \cancel{Axe^x} = e^x \mid : e^x \neq 0$

$2A = 1$, $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{2}$

$y^* = \frac{1}{2} x e^x$

3) $y = \tilde{y} + y^*$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x$ – общее решение ЛНДУ

Прим 5 $y'' + y' = \sin^2 x$

Решение.

$y'' + y' = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

1) $y'' + y' = 0$

$k^2 + k = 0$

$k(k+1) = 0$, $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = -1 \end{array}\right.$

$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$

2) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$f_1(x) = \frac{1}{2}$ – многочлен нулевой степени

$e^{\alpha x} = e^{0x} = 1$, $\Rightarrow$, $\alpha = 0$, $\Rightarrow$, $k = 1$ – кратность числа 0 как корня характ. ур-ния

$y_1^* = Ax$

$(y_1^*)' = A$

$(y_1^*)'' = 0$

$0 + A = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$, $A = \frac{1}{2}$ и $y_1^* = \frac{1}{2}x$

$f_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$,

$m = 0$ – степень многочленов

$\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$, $\Rightarrow$, $k = 0$

$y_2^* = B\cos 2x + C\sin 2x$

$(y_2^*)' = -2B\sin 2x + 2C\cos 2x$

$(y_2^*)'' = -4B\cos 2x - 4C\sin 2x$

$(y_2^*)'' + (y_2^*)' = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$-4B\cos 2x - 4C\sin 2x - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$(-4B+2C)\cos 2x + (-2B-4)\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$\begin{cases} -4B+2C = -\frac{1}{2} & \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ -2B-4C = 0 & \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases};\ \begin{cases} 2B - C = \frac{1}{4} \\ B + 2C = 0 \end{cases};\ \begin{cases} B = \frac{1}{10} \\ C = -\frac{1}{20} \end{cases}$

$y_2^* = \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$

$y^* = \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$

3) $y = \tilde{y} + y^*$

$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x$ – общее решение ЛНДУ

Прим. 6 $\quad y'' + y = \cos x$

Решение

1) $y'' + y = 0$

$k^2 + 1 = 0$

$k^2 = -1,\quad k_{1,2} = \pm i,\ \Rightarrow,\ \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$

$\tilde{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$

2) $f(x) = \cos x = e^{0x}(1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x)$

$m = 0$ - степень многочленов

$\alpha + \beta i = 0 + i = i,\ \Rightarrow,\ k = 1$

$y^* = x\,(A\cos x + B\sin x)$

$(y^*)' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$

$(y^*)'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x +$
$+ x(-A\cos x - B\sin x)$

Подставим в исходное ур-ние и получим:

$-2A\sin x + 2B\cos x - \cancel{Ax\cos x} - \cancel{Bx\sin x} +$
$+ \cancel{Ax\cos x} + \cancel{Bx\sin x} = \cos x$

$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x$

$\begin{cases} -2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$y^* = x \cdot \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}x\sin x$$

3) $y = \tilde{y} + y^*$

$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$ – общее решение ЛНДУ

Прим. 7 $\quad y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$

1) $y'' - 2y' + 10y = 0$
$k^2 - 2k + 10 = 0$

$D = 4 - 40 = -36$

$k_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i; \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$

$\tilde{y} = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$

2) $f(x) = e^x + \sin 3x$

$f_1(x) = e^x, \Rightarrow, m = 0$ – степень многочлена
$\alpha' = 1, \Rightarrow, k = 0$

$y_1^* = Ae^x$

$(y_1^*)' = Ae^x$

$(y_1^*)'' = Ae^x$

$Ae^x - 2Ae^x + 10Ae^x = e^x$

$9Ae^x = e^x; \quad A = \frac{1}{9}; \quad y_1^* = \frac{1}{9}e^x$

$f_2(x) = \sin 3x$, $\Rightarrow$, $m = 0$ - степень мн-нов,

$\left.\begin{matrix} \alpha' = 0 \\ \beta' = 3 \end{matrix}\right\}$, $\Rightarrow$, $k = 0$, тогда

$y_2^* = B\cos 3x + C\sin 3x$

$(y_2^*)' = -3B\sin 3x + 3C\cos 3x$

$(y_2^*)'' = -9B\cos 3x - 9C\sin 3x$

$-9B\cos 3x - 9C\sin 3x - 2(-3B\sin 3x +$
$+ 3C\cos 3x) + 10(B\cos 3x + C\sin 3x) = \sin 3x$

$(-9B - 6C + 10B)\cos 3x + (6B - 9C + 10C)\sin 3x = \sin 3x$

$\begin{cases} B - 6C = 0 \\ 6B + C = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} B = \frac{6}{37} \\ C = \frac{1}{37} \end{cases}$

$y_2^* = \frac{6}{37}\cos 3x + \frac{1}{37}\sin 3x$

$y^* = \frac{1}{9}e^x + \frac{6}{37}\cos 3x + \frac{1}{37}\sin 3x$ - частное решение ЛНДУ

3) $y = \bar{y} + y^*$

$y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) +$
$+ \frac{1}{9}e^x + \frac{6}{37}\cos 3x + \frac{1}{37}\sin 3x$ - общее реш ЛНДУ

Прим. 8 $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3x e^x$

Решение: 1) $y''' + y'' = 0$

$$k^3 + k^2 = 0$$

$$k^2(k+1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} k_{1,2} = 0 \\ k_3 = -1 \end{array}\right.$$

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$$

2) $f(x) = x^2 + 1 + 3x e^x$

$f_1(x) = x^2 + 1$, $\Rightarrow$, $m = 2$ - степень многочлена,

$\alpha = 0$, $\Rightarrow$, $k = 2$, тогда

$$y_1^* = (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) \cdot x^2 =$$

$$= A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2$$

$$(y_1^*)' = 4A_1 x^3 + 3A_2 x^2 + 2A_3 x$$

$$(y_1^*)'' = 12A_1 x^2 + 6A_2 x + 2A_3$$

$$(y_1^*)''' = 24A_1 x + 6A_2$$

$$24A_1 x + 6A_2 + 12A_1 x^2 + 6A_2 x + 2A_3 = x^2 + 1$$

$$12A_1 x^2 + (24A_1 + 6A_2)x + (6A_2 + 2A_3) = x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 12A_1 = 1 \\ 24A_1 + 6A_2 = 0 \\ 6A_2 + 2A_3 = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{12} \\ A_2 = -\frac{1}{3} \\ A_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y_1^* = \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)x^2$$

$f_2(x) = 3x e^x$, $\Rightarrow$, $m = 1$ - степень мн-на

$\alpha = 1$, $\Rightarrow$, $k = 0$, тогда

$$y_2^* = (Ax + B)e^x$$

$$(y_2^*)' = Ae^x + (Ax+B)e^x$$

$$(y_2^*)'' = Ae^x + Ae^x + (Ax+B)e^x = 2Ae^x + (Ax+B)e^x$$

$$(y_2^*)''' = 2Ae^x + Ae^x + (Ax+B)e^x = 3Ae^x + (Ax+B)e^x$$

$$3Ae^x + (Ax+B)e^x + 2Ae^x + (Ax+B)e^x = 3xe^x \;\Big|\; : e^x \neq 0$$

$$5A + 2Ax + 2B = 3x$$

$$\begin{cases} 2A = 3 \\ 5A + 2B = 0 \end{cases} ; \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = -\frac{15}{4} \end{cases}$$

$$y_2^* = \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)e^x$$

$$y^* = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)e^x -$$

частное реш. ЛНДУ.

3) $y = \tilde{y} + y^*$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)e^x -$$

общее решение ЛНДУ