# Семинар

## ЛОДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Фундаментальная система решений

Опред. Ф-ции $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ назыв. линейно зависимыми на $(a, b)$, если $\exists$ постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$, не все равные нулю, такие, что $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \equiv 0$ при $x \in (a, b)$. В противном случае данные ф-ции называются линейно независимыми.

Прим 1 Исследовать на линейную зависимость след. системы функций:

а) $x$, $x+1$

Решение: $y_1(x) = x$

$y_2(x) = x+1$

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \neq const, \Rightarrow,$$

ф-ции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые

б) $y_1(x) = 0$

$y_2(x) = 1$

$y_3(x) = x$

Решение: $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = 0$

$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot x = 0$

$C_2 + C_3 x = 0$

При $C_2 = C_3 = 0$, но $C_1 \neq 0$ $\forall x \in R$ имеем

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \equiv 0, \Rightarrow,$$

ф-ции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ линейно зависимые

в) $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$

Решение: $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = 0$

$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} = 0$

$e^x > 0$, $e^{2x} > 0$, $e^{3x} > 0$ $\forall x \in R$, $\Rightarrow$,

$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \equiv 0$ при $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $\Rightarrow$

ф-ции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ линейно независимые

## Лин. дифференциальные ур-ния 2-ого порядка с постоянными коэффициентами

Опред:
Диф. ур. $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, $a_n \neq 0$,
$a_0, a_1, \dots, a_n$ – некот. числа, $y = y(x)$ – неизвестная функция,
назыв. ЛДУ n-ого порядка с постоянными коэф.
Если $f(x) \equiv 0$, то диф. ур-ние назыв. однородным.
При $n = 2$ имеем:

$ay'' + by' + cy = f(x)$ – лин. диф. ур. 2-ого порядка с пост. коэф.
a, b, c – некот. числа,
$a \neq 0$

$ay'' + by' + cy = 0$ – лин. однородное диф. ур-ние 2-ого пор. с пост. коэф-тами.
a, b, c – некот. числа,
$a \neq 0$

Найти общие решения уравнений:

**Прим 2** $y'' + 5y' + 6y = 0$

Характеристическое уравнение:

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1 > 0 \; ;\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -3 \\ k_2 = -2 \end{array}\right.$$

Фундаментальная сис-ма решений (ФСР):

$$y_1(x) = e^{-3x}$$
$$y_2(x) = e^{-2x}$$

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

**Прим. 3** $y'' - 4y' + 2y = 0$

Хар. ур-ние: $k^2 - 4k + 2 = 0$

$$D = 16 - 8 = 8 > 0; \quad k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

ФСР: $y_1(x) = e^{(2-\sqrt{2})x}$
$y_2(x) = e^{(2+\sqrt{2})x}$

$$y = C_1 e^{(2-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(2+\sqrt{2})x}$$

Прим 4 $\quad y'' - 4y' + 4y = 0$

Хар. ур-ние: $k^2 - 4k + 4 = 0$

$(k-2)^2 = 0$

$k_{1,2} = 2$

ФСР: $y_1(x) = e^{2x}$

$y_2(x) = x e^{2x}$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Прим 5 $\quad y'' + 4y' + 13y = 0$

Хар. ур-ние: $k^2 + 4k + 13 = 0$

$D = 16 - 52 = -36 < 0$; $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$

$\alpha = -2$; $\beta = 3$

ФСР: $y_1(x) = e^{-2x} \cos 3x$

$y_2(x) = e^{-2x} \sin 3x$

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$$

Найти частные решения диф. ур-ний, удовлетворяющие начальным условиям:

Прим 6 $\quad y'' - 5y' + 4y = 0$; $\begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$

Хар. ур-ние: $k^2 - 5k + 4 = 0$

$D = 25 - 16 = 9 > 0$; $\left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 4 \end{array}\right.$

$\tilde{y} = y_{o.o} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ - общее решение однородного ур.

$\tilde{y}' = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}$

$\begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$, $\Rightarrow$, $\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 = 5 \\ C_1 e^0 + 4C_2 e^0 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 + 4C_2 = 8 \end{cases}$; $\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 4 \end{cases}$

Получаем частное реш. диф. ур-ние:

$$y_{ч.о} = 4e^x + e^{4x}$$

## ЛДУ с постоянными коэффициентами порядка выше 2-ого

Найти общие решения уравнений:

Прим 7: $y''' - 13y'' + 12y' = 0$

хар. ур-ние: $k^3 - 13k^2 + 12k = 0$

$k(k^2 - 13k + 12) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 12 \end{array}\right.$$

$$\tilde{y} = y_{o.o} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}$$

Прим. 8 $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$

хар. ур-ние: $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$

$(k^2 + 4)^2 = 0$

$k^2 + 4 = 0$

$k^2 = -4$ $\left[\begin{array}{l} k_{1,2} = -2i \\ k_{3,4} = 2i \end{array}\right.$

$\alpha = 0$; $\beta = 2$

пара сопряженных комплексных корней имеет кратность 2, $\Rightarrow$,

ФСР: $y_1(x) = \cos 2x$

$y_2(x) = x\cos 2x$

$y_3(x) = \sin 2x$

$y_4(x) = x\sin 2x$

$$\tilde{y} = y_{o.o.} = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x$$

Прим. 9 $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$

хар. ур-ние: $k^4 + 2k^3 + k^2 = 0$

$k^2(k^2 + 2k + 1) = 0$

$k^2(k+1)^2 = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} k_{1,2} = 0 \text{ - кратность } 2 \\ k_{3,4} = -1 \text{ - кратность } 2 \end{array}\right.$$

ФСР: $y_1(x) = e^{0x} = 1$

$y_2(x) = x \cdot e^{0x} = x$

$y_3(x) = e^{-x}$

$y_4(x) = x\,e^{-x}$

$$\tilde{y} = y_{о.о.} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} =$$

$$= C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)\,e^{-x}$$

Прим. 10 $\quad y^{IV} + y' = 0$

Хар. ур-ние: $k^4 + k = 0$

$k(k^3+1) = 0$

$k_1 = 0$ или $k^3 = -1$

$k = \sqrt[3]{-1}$

$z = -1$

$a = -1;\ b = 0$

$|z| = 1$

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1 \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi$$

$k_2 = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k_4 = -1$

ФСР: $y_1(x) = e^{0x} = 1$

$y_2(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$y_3(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$

$y_4(x) = e^{-x}$

$$\tilde{y} = y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Составить ЛОДУ, зная ее фундаментальную сис-му решений:

Прим 11: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$

Решение: $\begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0$

$-y\cos^2 x - \cancel{y' \sin x \cos x} - y'' \sin^2 x - y'' \cos^2 x - y \sin^2 x +$
$+ \cancel{y' \sin x \cdot \cos x} = 0$

$-(\sin^2 x + \cos^2 x)\, y'' - (\sin^2 x + \cos x)\, y = 0$

$-y'' - y = 0 \;\Big|\cdot(-1)$

$\underline{y'' + y = 0}$

Прим 12: $y_1 = x$; $y_2 = x^2$

Решение: $\begin{vmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$2y + 2x^2 y'' - x^2 y'' - 2xy' = 0$

$\underline{x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0}$