Семинар 2

Линейные д.у. 1-ого порядка

Уравнение Бернулли

Опред. Ур-ние $y' + P(x)y = Q(x)$ (*)
назыв. линейным.

1) Сначала решаем соответствующее однородное д.у. $y' + P(x)y = 0$ (ур-ние с разд. переменными)

Его общее решение $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$

Чтобы найти общее решение исходного неоднородного д.у, нужно произвольную постоянную C заменить на неизвестную ф-цию $C(x)$, т.е. $y = C(x)\, e^{-\int P(x)\,dx}$ – метод вариации произвольной постоянной

2) Метод Бернулли

Ф-цию y ищем как произведение 2-х неизвестных ф-ций, зависящих от x, т.е. $y = u(x) \cdot v(x)$ или, коротко, $y = u \cdot v$

$y' = u'v + uv'$

Подставляем в ур-ние (*):

$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$

$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x)$

1-ую ф-цию $u(x)$ ищем из условия $u' + P(x)u = 0$, т.е

$$\begin{cases} u' + P(x)u = 0 \\ uv' = Q(x) \end{cases}$$

Если поменять местами искомую ф-цию и независимую переменную, то ур-ние будет иметь вид:

$$x' + R(y)x = S(y)$$

Найти общие интегралы д.у.

Прим. 1 $\quad \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$

$$y' - \frac{1}{x}y = x \qquad (v)$$

Метод вариации: 1) $y' - \frac{1}{x}y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$$

$$y = Cx$$

2) $y = C(x)x \quad (w)$

$$y' = C'(x)x + C(x)$$

Подставим в ур-ние (v)

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x$$

$$C'(x)x = x \quad | : x \neq 0$$

$$C'(x) = 1$$

$C(x) = \int 1 \cdot dx = x + C$ - подставим в (w)

3) $y = (x + C)x = x^2 + Cx$

Прим 2

$$(1+y^2)\,dx = (\sqrt{1+y^2}\,\sin y - xy)\,dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{1+y^2}\sin y - xy}{1+y^2}$$

$$x' + \frac{y}{1+y^2}x = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \quad (1)$$

Решим методом Лагранжа (методом вариации произвольной постоянной).

1) $x' + \frac{y}{1+y^2}x = 0$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}x = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln C$$

$$x\sqrt{1+y^2} = C \Rightarrow x = \frac{C}{\sqrt{1+y^2}}$$

2) $x = \frac{c(y)}{\sqrt{1+y^2}}$

$$x' = \frac{c'(y)\sqrt{1+y^2} - c(y)\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2} = \frac{c'(y)(1+y^2) - yc(y)}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}$$

Подставляем в ур-ние (1):

$$\frac{c'(y)}{\sqrt{1+y^2}} - \cancel{\frac{y\,c(y)}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}} + \cancel{\frac{y\cdot c(y)}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$c'(y) = \sin y$$

$$c(y) = \int \sin y\,dy$$

$$c(y) = -\cos y + C$$

3) $x = \frac{C - \cos y}{\sqrt{1+y^2}}$

$$x\sqrt{1+y^2} = C - \cos y$$

$x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C$ – общий интеграл д.у

Прим 3 $\quad xy' + (x+1)\,y = 3x^2 e^{-x} \quad | : x \neq 0$

$$y' + \frac{x+1}{x}\,y = 3x\,e^{-x}$$

Решим методом Бернулли: $y = u\,v$

$y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{x+1}{x}\,uv = 3x\,e^{-x}$$

$$v\left(u' + \frac{x+1}{x}\,u\right) + uv' = 3x\,e^{-x}$$

$$\begin{cases} u' + \frac{x+1}{x}\,u = 0 \\ uv' = 3x\,e^{-x} \end{cases}$$

1) $u' + \frac{x+1}{x}\,u = 0$

$$\frac{du}{dx} + \frac{x+1}{x}\,u = 0$$

$$\frac{du}{u} + \frac{x+1}{x}\,dx = 0$$

$$\int \frac{du}{u} + \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = c \quad (c = 0)$$

$$\ln|u| + x + \ln|x| = 0$$

$\ln|u| = -x - \ln|x|\,; \quad \ln|ux| = -x; \quad ux = e^{-x}$

$u = \frac{1}{x}\cdot e^{-x}$ – часть реш

2) $\frac{1}{x}\,e^{-x}\,v' = 3x\,e^{-x}$

$v' = 3x^2$

$v = 3\int x^2\,dx = x^3 + C$ – часть реш

3) $y = u\cdot v$

$$y = \frac{x^3 + C}{x}\cdot e^{-x}$$

$xy = (x^3 + C)\,e^{-x}$ – общий интеграл д.у

Найти частные решения ур-ний, удовлетв. указанным условиям

Прим 4 $\quad xy' + y - e^x = 0; \quad y = b$ при $x = a$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

Метод Бернулли: $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{e^x}{x}$$

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = \frac{e^x}{x}$$

$$\begin{cases} u' + \frac{u}{x} = 0 \\ uv' = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

1) $u' = -\frac{u}{x}$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = -\ln|x|$$

$u = \frac{1}{x}$ - часть реш

2) $\frac{1}{x}v' = \frac{e^x}{x}$

$$v' = e^x$$

$$v = \int e^x dx$$

$$v = e^x + C$$

3) $y = u \cdot v$

$y = \frac{e^x + C}{x}$ - общее реш д.у.

Найдем частное решение д.у., исходя из усл. $y = b$ при $x = a$.

$$b = \frac{e^a + C}{a}$$

$$ab = e^a + C, \Rightarrow, C = ab - e^a$$

Частное решение д.у.: $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$

Прим. 5

$$y' - y\,tg\,x = \frac{1}{\cos x}\ ; \quad y(0)=0$$

Метод Лагранжа:

1) $y' - y\,tg\,x = 0$

$$\frac{dy}{dx} - y\,tg\,x = 0$$

$$\frac{dy}{y} - tg\,x\,dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = C$$

$$\ln|y| + \ln|\cos x| = \ln C$$

$$y \cos x = C$$

$$y_{o.o.} = \frac{C}{\cos x}$$

2) $y_{o.н.} = \dfrac{C(x)}{\cos x}$

$$y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$$

Подставляем в исходное д.у.:

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \cancel{\frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x}} - \cancel{\frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = \int dx; \quad C(x) = x + C$$

3) $y_{o.н.} = \dfrac{x+C}{\cos x}$

4) Найдем частное реш. д.у. исходя из нач. усл. $y(0)=0$

$$0 = \frac{0+C}{\cos 0} \Rightarrow C = 0$$

$y = \dfrac{x}{\cos x}$ - частное реш. д.у.

Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)\,y^n \quad (n \neq 0,\ n \neq 1)$$

1) Обе части делим на y^n

Делаем замену $z = y^{1-n}$ и получаем лин. д.у. 1-ого порядка

2) Метод Бернулли $y = u \cdot v$

Прим 6 Найти общие решения ур-ний

$$2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0 \quad | : 2xy \neq 0$$

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2}y^{-1} - \text{ ур-ние Бернулли } n = -1$$

Метод Бернулли: $y = u \cdot v$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2x} = -\frac{1}{2uv}$$

$$v\left(u' - \frac{u}{2x}\right) + uv' = -\frac{1}{2uv}$$

$$\begin{cases} u' - \dfrac{u}{2x} = 0 \\ uv' = -\dfrac{1}{2uv} \end{cases}$$

1) $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{u}{2x} = 0$

$$\frac{du}{u} - \frac{dx}{2x} = 0$$

$$\int\frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = C \quad (C = 0)$$

$$\ln|u| - \frac{1}{2}\ln|x| = 0$$

$u = \sqrt{x}$ - част. реш.

2) $\sqrt{x}\,v' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,v}$

$$v' = -\frac{1}{2xv}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2xv}$$

$$v\,dv + \frac{dx}{2x} = 0$$

$$\int v\,dv + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = C$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x| = C$$

$$v^2 + \ln|x| = \ln C$$

$$v^2 = \ln\frac{C}{x}$$

3) $y^2 = u^2v^2$

$y^2 = x\ln\dfrac{C}{x}$ - общий интеграл д.у.

 Прим. 7

$$y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0$$

$$y\frac{dx}{dy} + x - \frac{1}{2}x^3 y = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}x^3$$

$$x' + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}x^3 \quad \Big| : x^3 \neq 0$$ – ур-ние Бернулли (n = 3)

$$\frac{x'}{x^3} + \frac{1}{x^2 y} = \frac{1}{2}$$

Замена: $z = x^{1-3} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$z' = -\frac{2}{x^3}\cdot x'$, тогда имеем:

$$-\frac{1}{2}z' + \frac{z}{y} = \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot(-2)$$

$$z' - \frac{2z}{y} = -1$$

Метод вариации: 1) $z' - \frac{2z}{y} = 0$

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} = 0$$

$$\int\frac{dz}{z} - 2\int\frac{dy}{y} = C$$

$$\ln|z| - 2\ln|y| = \ln C$$

$$\frac{z}{y^2} = C \Rightarrow z = Cy^2$$

2) $z_{он}(y) = C(y)\,y^2$

$$z' = C'(y)\,y^2 + 2y\,C(y)$$

$$C'(y)\,y^2 + \cancel{2yC(y)} - \cancel{2yC(y)} = -1$$

$$C'(y) = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow C(y) = \frac{1}{y} + C$$

3) $z_{о.н.} = \left(\frac{1}{y} + C\right)y^2 = y + Cy^2$

$x^2 = \frac{1}{z}$, $\Rightarrow$, $x^2 = \frac{1}{y + Cy^2}$ – общий интеграл д.у