Семинар 12-13

Несобственные интегралы

Несобств. интегралы с бесконеч. пределами интегр. (Несобственные интегралы 1-ого рода)

Опред. Если $f(x)$ непр-на при $a \le x < +\infty$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

Если предел в правой части $\exists$, то интеграл сх-ся, если $\nexists$, то интеграл расходится.

Аналогично, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

и $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где c - произвольное, $-\infty < c < +\infty$

Интеграл в левой части последнего рав-ва сх-ся, если сх-ся оба интеграла в пр. части.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость

Прим. 1 $$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b \to +\infty} \int_e^b \ln^{-3} x\, d(\ln x) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Big|_e^b = -\frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\ln^2 b} + \frac{1}{2\ln^2 e} = \frac{1}{2}$$

Прим. 2 $$\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}} = \frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty}\int_2^b \frac{d(x^2+5)}{(x^2+5)^{3/2}} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}\lim_{b \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\Big|_2^b = -\lim_{b \to +\infty}\frac{1}{\sqrt{b^2+5}} + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Прим. 3 $$\int_0^{+\infty} x\cos x\,dx = \lim_{b \to +\infty}\int_0^b x\,d(\sin x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left(x\sin x\Big|_0^b - \int_0^b \sin x\,dx\right) = \lim_{b \to +\infty}(x\sin x + \cos x)\Big|_0^b =$$

$= \lim\limits_{b\to+\infty}(b\sin b+\cos b)-1$ - расходится, т.к

$\lim\limits_{b\to+\infty}(b\sin b+\cos b) \nexists$.

Прим. 4 $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx = -\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b =$

$= -\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-b} + e^0 = 1 - \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} = 1$.

Признаки сходимости и расх-ти

1-ый признак сравнения

Пусть $a \le x < +\infty$ и $0 \le f(x) \le g(x)$.

- если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся, то сх-ся и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, причем $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.
- если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх-ся, то расх-ся и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Предельный признак сравнения

Пусть $a \le x < +\infty$, $f(x)>0$, $g(x)>0$ и $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сх-ся или расх-ся одновременно.

Интеграл, с которым часто производится сравнение

$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$, $a>0$, $\alpha>0$. При $\alpha>1$ он сходится, при $0<\alpha\le 1$ расх-ся

Исследовать на сходимость:

Прим 5

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$$

$$\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} = \frac{\cancel{\sqrt{x^3}}\left(1+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3}}\right)}{\cancel{\sqrt{x^3}}\left(\sqrt{x^3}+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

при $x \to +\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, т.к. $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, $\Rightarrow$,

исходный интеграл тоже сходится

Прим. 6

$$\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$\frac{2}{x^{1/3}} \leq \frac{3+\sin x}{x^{1/3}} \leq \frac{4}{x^{1/3}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{2\,dx}{x^{1/3}}$ расх-ся, $\Rightarrow$, исх. интеграл тоже расх-ся (по 1-ому пр. сравнения)

Прим. 7

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}} = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\left(2x+x^2\sqrt{x}\right)} \sim \frac{1}{2x+x^2\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$$

при $x \to +\infty$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, $\Rightarrow$, исходный интеграл тоже сходится

Прим 8

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x} = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t\,;\ \ln\ln x = \ln t & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline e^2 & 2 \\ +\infty & +\infty \end{array} \\ \frac{dx}{x} = dt & \end{array} \right| = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$$

$$\frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t}$$

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ расходится, $\Rightarrow$, $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$ тоже расх-ся, $\Rightarrow$,

исходный интеграл расходится.

Прим. 9

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[4]{x}}$$

Рассм. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Он явл. сх-ся, т.к. $\lambda = 2 > 1$.

Найдем $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+\sqrt[4]{x}} = 1 \neq 0$, $\Rightarrow$, исходный

интеграл тоже сходится.

(Или $\frac{1}{x^2+\sqrt[4]{x}} \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$)

Интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-ого рода)

Если $f(x)$ непр. при $a \le x < b$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma \to 0} \int_a^{b-\gamma} f(x)\,dx \quad (**)$$

Если $\exists$ конечный предел в правой части $(**)$, то несобств. интеграл назыв. сходящимся, если этот предел $\nexists$, то интеграл расходится.

Аналогично $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

(т. е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$)

Если c - точка разрыва ($c \in (a, b)$) и $f(x)$ неограничена в любой окрестности т-ки c, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma_1 \to +0} \int_a^{c-\gamma_1} f(x)\,dx + \lim_{\gamma_2 \to +0} \int_{c+\gamma_2}^b f(x)\,dx$$

В качестве интегралов, с которыми производится сравнение, используются интегралы вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

при $\alpha < 1$ они сходятся и

при $\alpha \ge 1$ - расходятся

Вычислить несобств. интегралы или установить их расходимость

Прим 1

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0-\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$$

$$\frac{1}{x^2+x^4} \sim \frac{1}{x^2} \text{ при } x\to 0$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ расходится, $\Rightarrow$, исх. интеграл тоже расх-ся.

$$\left(\text{или } \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x^4} : \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+x^2)} = 1 \neq 0\right)$$

Прим. 2

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^e =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\ln^2(1+\varepsilon)} = +\infty$$ – интеграл расходится

Прим. 3

$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} = \frac{1}{3}\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-\frac{1}{9}}} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_3^{3/2} \frac{t\,dt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{9}}} = \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\int_{3/2}^{3} \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = \lim_{\gamma\to 0}\int_{3/2}^{3-\gamma} \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} =$$

$$= \lim_{\gamma\to 0} \arcsin\frac{t}{3}\Big|_{3/2}^{3-\gamma} = \lim_{\gamma\to 0} \arcsin\frac{3-\gamma}{3} - \arcsin\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$ – интеграл сходится.

Прим 4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\substack{\gamma_1\to 0\\ \gamma_2\to 0}} \int_{0+\gamma_1}^{1-\gamma_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{\substack{\gamma_1\to 0\\ \gamma_2\to 0}} \int_{0+\gamma_1}^{1-\gamma_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\gamma_1 \to 0 \\ \gamma_2 \to 0}} \arcsin(2x-1) \Big|_{0+\gamma_1}^{1-\gamma_2} =$$

$$= \lim_{\gamma_2 \to 0} \arcsin(2(1-\gamma_2)-1) - \lim_{\gamma_1 \to 0} \arcsin(2(0+\gamma_1)-1) =$$

$= \arcsin 1 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ - интеграл сходится.

Исследовать на сходимость.

Прим 5

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \qquad \left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} \Big|_{x=1} = \infty \right)$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \quad \forall x \in [0;1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}} \text{ сх-ся, т.к. } \alpha = \frac{1}{2} < 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

$\Rightarrow$, $\int_0^1 f(x)\,dx$ сходится, и исходный интеграл тоже сходится

Прим 6

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x - 1}\,dx$$

При $x \to 0$ $\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} \sim \frac{x^{2/3}}{x} = \frac{1}{x^{1/3}}$ $(\alpha = \frac{1}{3} < 1)$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ сходится, $\Rightarrow$, исходный интеграл сх-ся

Прим. 7

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} < \frac{1}{(1-x)^{3/4}} \quad \forall x \in [0;1)$$

$\int \frac{dx}{(1-x)^{3/4}}$ сходится, $\Rightarrow$, исх. интеграл тоже сх-ся.

Или используем предельный признак сравнения: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} : \frac{1}{(1-x)^{3/4}}\right) = 1 \neq 0$, $\Rightarrow$,

исходный интеграл сходится.

Прим. 8

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 \ln x\, d(\sqrt{x}) =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x\, d(\sqrt{x}) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_{0+\varepsilon}^1 - \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_{0+\varepsilon}^1 - 2\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^1 = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{x}(\ln x - 2)\Big|_{0+\varepsilon}^1$$

$$= 2\cdot\left(-2 - \lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{0+\varepsilon}\cdot(\ln(0+\varepsilon) - 2)\right) = 2\cdot(-4) = -8, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot(\ln x - 2) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x - 2}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 0$$

$\Rightarrow$, инт. сх-ся.