Семинар 3

ОДУ высших порядков

Интегрирование ур-ний, допускающих понижение порядка

1. Непосредственное интегрирование

$$y^{(n)} = f(x)$$

Пример 1 $\quad y''' = \sin x + \cos x$

$$y'' = \int (\sin x + \cos x)\, dx$$

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1$$

$$y' = \int (-\cos x + \sin x + C_1)\, dx$$

$$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2$$

$$y = \cos x - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

2. если в ур-ние не входит искомая ф-ция y, т.е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, то за новую неизвестную ф-цию принимают низшую из производных, т.е. делают замену $y^{(k)} = z$.

Прим 2 $\quad xy''' + y'' = 1 + x$ - решить ур-ние

$y'' = p(x)$; $y''' = p'$, тогда

$xp' + p = 1 + x \quad | : x \neq 0$

$p' + \frac{p}{x} = \frac{1+x}{x}$ - лин. диф ур. 1-ого пор.

$p = uv$; $p' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1+x}{x}$$

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = \frac{1+x}{x}$$

$$\begin{cases} u' + \frac{u}{x} = 0 \\ uv' = \frac{1+x}{x} \end{cases}$$

1) $\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$ $\qquad$ 2) $uv' = \frac{1+x}{x}$

$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$ $\qquad$ $\frac{1}{x} v' = \frac{1+x}{x}$

$\ln|u| = -\ln|x|$ $\qquad$ $v' = 1+x$

$u = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $v = \frac{x^2}{2} + x + C_1$

$$p = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)$$

$$p = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}$$

$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}$$

$$y' = \int \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right) dx$$

$$y' = \frac{x^2}{4} + x + C_1 \ln|x| + C_2$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1(x\ln x + x) + C_2 x + C_3 =$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x \ln x + \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_2} x + C_3 =$$

$$= \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x \ln x + C_2 x + C_3$$

Прим. 3 $\qquad y'' = -\frac{x}{y'}$

$y' = p(x);\ y'' = p'$, тогда

$$p' = -\frac{x}{p}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{x}{p}$$

$$\int p\,dp = -\int x\,dx$$

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Big| \cdot 2$$

$$p^2 + x^2 = C_1^2$$

$$p = \pm\sqrt{C_1^2 - x^2}$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 - x^2}$$

$$I = \int \sqrt{C_1^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{C_1^2 - x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{C_1^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{c_1^2 - x^2} - \int \frac{c_1^2 - x^2 - c_1^2}{\sqrt{c_1^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{c_1^2 - x^2} - I + c_1^2 \arcsin\frac{x}{c_1}$$

$$2I = x\sqrt{c_1^2 - x^2} + c_1^2 \arcsin\frac{x}{c_1} + c_2$$

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{c_1^2 - x^2} + c_1^2 \arcsin\frac{x}{c_1}\right) + c_2$$

$$y = \pm\frac{1}{2}\left(x\sqrt{c_1^2 - x^2} + c_1^2 \arcsin\frac{x}{c_1}\right) + c_2$$

3. если в ур-ние не входит независ. перемен-ная x, т.е. ур-ние имеет вид $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, то порядок ур-ния можно понизить, сделав замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = p\cdot\frac{dp}{dy}$; $y'' = p\cdot p'$

<u>Прим. 4</u> $\quad yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$ (не сод. x)

$$y' = p(y) \;;\; y'' = p\cdot p'$$

$$y\cdot p\, p' + p^2 - p^3 \ln y = 0 \quad | : py \neq 0$$

$$p' + \frac{p}{y} = \frac{p^2}{y}\ln y \quad \text{- ур-ние Бернулли}$$

$$\frac{p'}{p^2} + \frac{1}{py} = \frac{\ln y}{y}$$

$$z = p^{1-2} = \frac{1}{p} \;;\; z' = -\frac{1}{p^2}\cdot p', \text{ тогда}$$

$$-z' + \frac{z}{y} = \frac{\ln y}{y}$$

$$z' - \frac{z}{y} = -\frac{\ln y}{y} \quad \text{- лин. диф. ур-ние 1-ого пор}$$

$$z' - \frac{z}{y} = 0$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y} \;;\; \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|z| = \ln|y| + \ln C$$

$$z_{o.o.} = Cy$$

$$z_{o.н.} = C(y)\cdot y$$

$$z'_{o.н.} = C'(y)y + C(y)$$

$$C'(y)y + \cancel{C(y)} - \cancel{C(y)} = -\frac{\ln y}{y}$$

$$C'(y)\,y = -\frac{\ln y}{y}$$

$$C'(y) = -\frac{\ln y}{y^2}$$

$$C(y) = -\int\frac{\ln y}{y^2}dy = \int \ln y\, d\left(\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{y}\ln y - \int\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{y}\ln y + \frac{1}{y} + C_1$$

$$z_{o.н.} = y\left(\frac{1}{y}\ln y + \frac{1}{y} + C_1\right)$$

$$z_{o.н.} = \ln y + 1 + C_1 y$$

$$\frac{1}{p} = \ln y + 1 + C_1 y$$

$$p = \frac{1}{\ln y + 1 + C_1 y}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \ln y + C_1 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \ln y + C_1 y}$$

$$dx = (1 + \ln y + C_1 y)$$

$$\int dx = \int (1 + \ln y + C_1 y)\,dy$$

$$x = y + y\ln y - \int \cancel{y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}dy + C_1\frac{y^2}{2} + C_2 =$$

$$= \cancel{y} + y\ln y - \cancel{y} + C_1 y^2 + C_2 = y\ln y + C_1 y^2 + C_2$$

Прим 5 $yy'' - y'(1+y') = 0$ (не сод. x)

$y' = p(y)$; $y'' = p\cdot p'$

$y\cdot pp' - p(1+p) = 0$

$ypp' - p - p^2 = 0 \quad | : yp \neq 0$

$p' - \frac{p}{y} = \frac{1}{y}$ — лин. диф. ур. 1-ого пор.

$p = u\cdot v$; $p' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = \frac{1}{y}$

$v(u' - \frac{u}{y}) + uv' = \frac{1}{y}$

$$\begin{cases} u' - \frac{u}{y} = 0 \\ uv' = \frac{1}{y} \end{cases}$$

1) $u' - \frac{u}{y} = 0$

$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y}$

$\ln|u| = \ln|y|$

$u = y$

2) $uv' = \frac{1}{y}$

$yv' = \frac{1}{y}$

$v' = \frac{1}{y^2}$

$v = -\frac{1}{y} + c_1$

$$p = y\left(c_1 - \frac{1}{y}\right) = c_1 y - 1$$

$y' = c_1 y - 1$

$\frac{dy}{dx} = c_1 y - 1$

$\int \frac{dy}{c_1 y - 1} = \int dx$

$\frac{1}{c_1} \ln|c_1 y - 1| = x + c_2$

$\ln|c_1 y - 1| = c_1 x + c_1 \cdot c_2$ $^{= c_2}$

$c_1 y - 1 = e^{c_1 x + c_2}$

$c_1 y = c_2 e^{c_1 x} + 1$

$y = \frac{c_2}{c_1}^{= c_2} e^{c_1 x} + \frac{1}{c_1} = c_2 e^{c_1 x} + \frac{1}{c_1}$

Прим. 6 Найти реш., удовл. указанным условиям:

$y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0 \qquad y(0) = 1\ ;\ y'(0) = 1$

(не содержит x)

$y' = p(y)\ ;\ y'' = p \cdot p'$

$y^2 + p^2 - 2ypp' = 0 \quad | : (-2yp \neq 0)$

$p' - \frac{p}{2y} = \frac{y}{2p}$ – ур-ние Бернулли. $(n = -1)$

$pp' - \frac{p^2}{2y} = \frac{y}{2} \quad | \cdot 2\ ;\ 2pp' - \frac{p^2}{y} = y$

$z = p^{1+1} = p^2\ ;\ z' = 2pp'$, тогда

$z' - \frac{z}{y} = y$ – лин. д.у. 1-ого пор.

$z' - \frac{z}{y} = 0$

$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y}\ ;\ \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y}\ ;\ \ln|z| = \ln|y| + \ln|C_1|$

$z_{o.o.} = C_1 y$

$z_{o.н.} = C_1(y)\, y\ ;\ z'_{o.н.} = C_1'(y)\, y + C_1(y)$

$C_1'(y)\, y + \cancel{C_1(y)} - \cancel{C_1(y)} = y$

$C_1'(y) = 1$

$C_1(y) = y + C_1$

$z_{o.н.} = y(y + C_1) = y^2 + C_1 y$

$p^2 = y^2 + C_1 y\ ;\ p = y'\ ,\Rightarrow,\ 1^2 = 1^2 + C_1\ ;\ C_1 = 0$

$p^2 = y^2$

$p = y$, т.к. $y(0) = 1$ и $y'(0) = 1$

$y' = y$,

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + C_2$$

$$y = e^{x + C_2}$$

$$y = C_2 e^x$$

$y(0) = 1; \Rightarrow, 1 = C_2 e^0, \Rightarrow, C_2 = 1.$

$y_{ч.} = e^x$ – част. решение