Задача для подготовки к экзамену

по курсу **Кратные и криволинейные интегралы, ряды и ТФКП**
(для РКТ1-31)

МОДУЛЬ 1: КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Преобразовать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в двукратный и перейти к полярным координатам, если область D ограничена кривыми или задана неравенствами:
   а) $y = x^2,\ \ x + y = 2$;
   б) $x = \sqrt{y}\ ,\ \ y = \sqrt{-x}$;
   в) $y^2 = 1 - x,\ \ x = 1,\ \ y - 1$;
   г) $x^2 + y^2 \le 1,\ \ (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ \ y \ge 0$;
   д) $x^2 + y^2 - 4y \le 0,\ \ y \le 4 - x,\ \ x \ge 0$;
   е) $x^2 + y^2 \le 4,\ \ y \le 2 - x$;
   ж) $x^2 + y^2 \le 1,\ \ 2y^2 \le 3x$
2. Изменить порядок интегрирования и перейти к полярным координатам:
   а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2x} f(x,y)dy$;
   б) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$;
   в) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_x^{8-x} f(x,y)dy$;
   г) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(x^2+y^2)dy$;
   д) $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)dx$.
3. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.
4. Вычислить массу тела с плотностью μ, задаваемого неравенствами:
   а) $x^2 + y^2 + z^2 \le 8,\ \ x^2 + y^2 \le 4,\ \ z \ge 0,\ \ \mu$=2z;
   б) $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,\ \ \mu = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;
   в) $x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ \ x^2 + y^2 \le 4,\ \ \mu=2|z|$.
5. Вычислить центр масс однородного тела, задаваемого неравенствами:
   а) $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ \ 0 \le z$;
   б) $x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ \ x^2 + y^2 \le 3z^2,\ \ z \ge 0$.

в) $z \ge 0, \quad x^2+y^2+z^2 \le R^2$

6. Найти момент инерции кривой $x^2+y^2=1,\ y \ge 0$ с плотностью μ относительно начала координат.
7. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями или задаваемого неравенствами:

а) $z=x^2+y^2+1,\ x=1,\ z=5$;

б) $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0$;

в) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ \mathrm{z}=\dfrac{R\sqrt{2}}{2},\ (z \ge \dfrac{R\sqrt{2}}{2})$;

г) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ \mathrm{x}^2+y^2 \le Rx,\ (z \ge 0)$;

д) $x^2+y^2=2z,\ x^2+y^2=4z,\ z=4$;

е) $x^2+y^2 \le 2z,\ z \le 2+\sqrt{4-x^2-y^2}$;

ж) $x^2+y^2+z^2 \le 2az,\ \mathrm{x}^2+y^2 \le z^2$;

з) $x+y+z \le a,\ 0 \le z \le a/\sqrt{2},\ x \ge 0,\ y \ge 0$;

и) $3(x^2+y^2)-z^2 \le 0,\ x^2+y^2+z^2 \le a^2$;

к) $x^2+y^2 \ge 3z,\ x^2+y^2 \le 6z,\ z \le 3$;

л) $x^2+y^2 \le 2x,\ 2x \le z,\ z \le 4x$;

м) $x^2+y^2=4,\ x+y-z+10=0,\ z=0$;

н) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=z^2,\ 3(x^2+y^2)=z^2 \quad (z \ge 0)$;

о) $0 \le z \le x^2+y^2,\ x^2 \le y \le 1$;

п) $0 \le z \le x^2+y^2,\ 0 \le y \le 2x,\ y \le 6-x$.

8. Вычислить интеграл:

а) $\int\limits_{OAB} (x+y)dx+(y-2x)dy$, где O(0,0), A(1;1), B($-\sqrt{2}$;0), OA – отрезок прямой, AB – дуга окружности $x^2+y^2=2$ (меньшая);

б) $\int\limits_{OAB} (2x-y)dx+(x-1)dy$, где O(0,0), A(1;2), B(2;1), OA – отрезок прямой, AB – дуга гиперболы $y=\dfrac{2}{x}$.

9. Вычислить по формуле Грина интеграл:

а) $\oint\limits_{OABO} xy^2dx-x^2ydy$, где OABO – контур треугольника с вершинами O(0;0), A(-2;0), B(2;3);

б) $\oint\limits_{OABO} (x-y)dx+xdy$, где O(0;0), A(2;0), B(0;2), OA и BO – отрезки, AB – дуга окружности $x^2+y^2=4$;

в) $\int\limits_{OAB} (2x-y)dx+(x-1)dy$, где O(0;0), A(1;0), B(0;1), OA и BO – отрезки, AB – дуга окружности $x^2+y^2=1$;

г) $\oint\limits_{x^2+y^2=1} (x-y)dx + xdy$.

10. Проверить, что под знаком интеграла $\int\limits_{(4;0)}^{(0;5)} (y^4+x^3+1)dx + (4xy^3+y^2)dy$ стоит полный дифференциал и вычислить этот интеграл.

11. Найти циркуляцию векторного поля F по замкнутой кривой Γ в направлении возрастания параметра:

а) $F = y\overline{i} + (2x^2 - z)\overline{j} + (y+z^2)\overline{k}$, $\Gamma = \{x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ z=\cos t - 4\sin t + 1\}$

б) $F = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$, Γ – линия пересечения гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = a^2$ с плоскостью $x+y=0$;

в) $F = 2y\overline{i} + 5z\overline{j} + 3x\overline{k}$, Γ – линия пересечении цилиндра $2x^2+2y^2=1$ и плоскости $x+y+z=3$;

г) $F = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, Γ – треугольник с вершинами A(0,0,0), B(0,1,1), C(1,0,0), обход: $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{A}$.

12. Проверить, применимость формулы Ньютона-Лейбница к интегралу

$\int\limits_{(-1;-2)}^{(1;0)} (e^y + 2e^{2x})dx + (xe^3+3)dy$ и вычислить его по этой формуле.

13. Найти поток векторного поля F:

а) $F = (x+y)\overline{i} - y^2\overline{j} + (2yz - z)\overline{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2=1,\ \ 0 \le z \le 1$ (нормаль внешняя);

б) $F = -x\overline{i} - 4y\overline{j} + (5z+1)\overline{k}$ через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2=4,\ \ 0 \le z \le 5$ (нормаль внешняя);

в) $F = (z-3x)\overline{i} + y^3\overline{j} + (xy+z^2)\overline{k}$ через часть плоскости XOY, определяемую неравенствами $x^2+y^2 \le 1,\ \ 0 \le y$ (нормаль – $\overline{k}$);

г) $F = 2\overline{i} + 2y\overline{j} + (y+3z)\overline{k}$ через полную поверхность цилиндра $x^2+y^2=r^2,\ \ 0 \le z \le H$ (нормаль внешняя);

д) $F = (x+y)\overline{i} + (2z+y)\overline{j} + 2xz\overline{k}$ через поверхность тетраэдра в направлении внешней нормали, если уравнения его граней $x+2y+3z=6,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$;

е) $F = (6x+y)\overline{i} + 5(z+x)\overline{j} - 4yz\overline{k}$ в направлении внешней нормали поверхности, определяемой неравенствами $0 \le z \le x^2+y^2,\ \ x \le y \le 2x,\ \ y \le 2$;

ж) $F = x\overline{i} + 4y\overline{j} + (5z+1)\overline{k}$ через часть плоскости $x+2y+\dfrac{z}{2}=1$, расположенную в первом октанте, в направлении нормали, образующей острый угол с $\overline{k}$;

з) $F = (z+x-2y)\overline{j}$ через часть плоскости $3x-y-z=3$,ограниченную координатными плоскостями, в направлении нормали, образующей острый угол с $\overline{k}$;

и) $F = 2x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ через часть поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, лежащую в октанте $0 \le x,\ \ y \le 0,\ \ z \le 0$ (нормаль внешняя);

к) $F = x\overline{i} + y\overline{j} + \sin z\overline{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=4$, вырезаемую плоскостями $z=0$ и $z=5$ (нормаль внешняя);

л) $F = x^2\overline{i} + (x+y)\overline{j} + (xz+2z)\overline{k}$ через полную поверхность тетраэдра в направлении внешней нормали, если уравнения его граней $x+2y+z=2,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$.

Модуль 2: Ряды и ТФКП

14. Вычислить интеграл:

а) $\oint\limits_{|z-i|=2} z^3 ch\frac{3}{z}dz$;

б) $\oint\limits_{|z-i|=2} z^2 sh\frac{3}{z}dz$;

в) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z+1}{(z+i)^2(z-3)}dz$;

г) $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{1}{(z+2)^2(z-3)^3}dz$;

д) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz$;

е) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{(z+i)^2(z-3)}dz$;

ж) $\oint\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{ch2z}{z^2(z+2)(z-1)}dz$;

з) $\oint\limits_{|z+i|=5} \frac{sh2z}{(z-3i)^2 z}dz$;

и) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2(z-4)}dz$;

к) $\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{chz}{(z-2i)^2 z}dz$;

л) $\oint\limits_{|z+i|=5} \frac{\sin 2z}{(z-3i)^2 z}dz$;

м) $\oint\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z^2(z+2i)(z-i)}dz$;

н) $\oint\limits_{|z-1-i|=2} \frac{1}{z^4-16}dz$.

15. Разложить $f(z)=\frac{1}{z+1}\cos^2\frac{1}{z+1}$ по степеням $(z+1)$.

16. Разложить $f(z)=\frac{z+1}{z^2+2z+2}$ по степеням $(z+1)$.

17. Разложить $f(z)$ в ряд Лорана

а) $f(z)=\frac{2-z}{(z-2i)\cdot(z-1)}$ в кольце $1<|z|<2$;

б) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2i)\cdot(z-4)}$ в кольце $2<|z|<4$;

в) $f(z)=\dfrac{2z}{(z+i)\cdot(z+3)}$ в кольце $1<|z|<3$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-3}$ в кольце $1<|z|<3$;

д) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+2i)\cdot(z-3)}$ в кольце $2<|z|<3$;

е) $f(z)=\dfrac{z}{(z+2i)\cdot(z-1)}$ в кольце $1<|z|<2$.

18. Найти область сходимости степенного ряда и выяснить, как ведет себя ряд в точках $z_1,\ z_2,\ z_3$:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n\ln n}{2^n n},\ z_1=0,\ z_2=-2-i,\ z_3=2i$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n\ln n}{2^n n},\ z_1=-1,\ z_2=-3i,\ z_3=2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-i)^{2n}}{4^n n^4},\ z_1=-1-i,\ z_2=2,\ z_3=2i$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{(2i)^n\sqrt{n}},\ z_1=0,\ z_2=2+i,\ z_3=i$;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n(z+i)^n}{n\cdot\ln^2 n},\ z_1=-1+i,\ z_2=-2i,\ z_3=\dfrac{1}{2}-i$.

19. Найти особые точки (включая бесконечно удаленную) функции $f(z)$, определить их тип и найти вычеты в них:

а) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2(z-1)}$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z}{(2z-\pi)^2 z}$;

в) $f(z)=\dfrac{ch\frac{1}{z}}{z+1}$;

г) $f(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z}}{z-1}$.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература

1. Горяинов В.Б., – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 424 с.
2. . – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
3. Исследование операций; Т.XX – М. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 560 с.
4. Краснов М. Л., Киселев А. И. и др. Вся высшая математика. Т. 3 и 4. – М.: УРСС, 2001
5. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 386 с

6. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. – 584 с.