

**ТЕЛЕВИЗИОННЫЙ КУРС
СОПРОТИВЛЕНИЯ
МАТЕРИАЛОВ**

**ИЗГИБ
И СТАТИЧЕСКИ
НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ
СИСТЕМЫ**

**ТЕЛЕВИЗИОННЫЙ КУРС
СОПРОТИВЛЕНИЯ
МАТЕРИАЛОВ**

**ИЗГИБ
И СТАТИЧЕСКИ
НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ
СИСТЕМЫ**

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
В. И. ФЕОДОСЬЕВА

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования
СССР в качестве учебного пособия
для студентов вузов

ВОЗВРАТИТЕ КНИГУ НЕ ПОЗЖЕ

обозначенного здесь срока



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1981

ББК 30.121
Т31
УДК 620 1 (075)

А. В. Дарков, Б. Я. Лащеников, Е. В. Ломакин, Я. Г. Пановко,
В. А. Постнов, В. И. Феодосьев, М. Г. Яковенко

Т31 **Телевизионный курс сопротивления материалов. Изгиб и статически неопределимые системы/Под ред. В. И. Феодосьева. Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Высш. школа, 1981. — 150 с., ил.**
25 к.

Пособие представляет собой продолжение конспекта (2-й выпуск), начатого изданием в 1977 г. для студентов-заочников, слушающих телевизионные лекции. В нем рассматриваются вопросы изгиба балок и раскрытия статической неопределимости рам.

Пособие позволяет студентам сохранить для последующего повторения материал прослушанных лекций.

Т $\frac{30106-014}{001(01)-81}$ 79-81 2105000000 605
ББК 30.121

ОТ РЕДАКТОРА

Настоящий выпуск представляет собой продолжение конспекта, начатого изданием в 1977 г. в помощь студенту-заочнику, слушающему телевизионные лекции по сопротивлению материалов*. В него включены очередные девять сдвоенных лекций по вопросам изгиба балок и раскрытия статической неопределимости рам.

Освобождая учащегося от напряженной и не всегда выполнимой работы по записи формул и текста с экрана, подобный конспект ни в коем случае не освобождает от необходимости изучать материал по другим учебникам и предусматривает выполнение домашних заданий и самостоятельное решение задач для закрепления пройденного материала.

Последовательная нумерация лекций сохранена той же, что была принята в первом выпуске.

* Растяжение и кручение. Высшая школа, 1977.

ЛЕКЦИИ 17—18
ЧИСТЫЙ ИЗГИБ

1. ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ И ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ

После того как вы познакомились с геометрическими свойствами плоских сечений, мы можем перейти к новой теме. Речь пойдет об изгибе.

Под изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса внутренние силы сводятся к моментам относительно поперечных осей сечения. Эти моменты, как вы знаете, называются изгибающими.

Если изгибающий момент в поперечном сечении является единственным силовым фактором, а остальные пять равны нулю, то такой вид нагружения бруса называют чистым изгибом. Однако очень часто в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают и поперечные силы. Этот вид нагружения принято именовать поперечным изгибом. Классификация видов изгиба производится и по другим признакам. Но об этом мы поговорим несколько позже. Пока же рассмотрим именно чистый и поперечный изгибы и установим, чем они отличаются друг от друга и в каких условиях возникают.

На рис. 1, а показана штанга, поднятая спортсменом. Пусть вес каждой гири будет P . Реакции опор (опорами здесь являются руки спортсмена) определяются без труда. Каждая реакция равна P . В итоге мы получаем систему внешних сил, действующих на штангу (рис. 1, б).

Теперь займемся определением внутренних сил. Для этого воспользуемся методом сечений. На расстоянии z от точки приложения левой силы (рис. 2, а) проведем сечение и мысленно разделим балку на две части. В по-

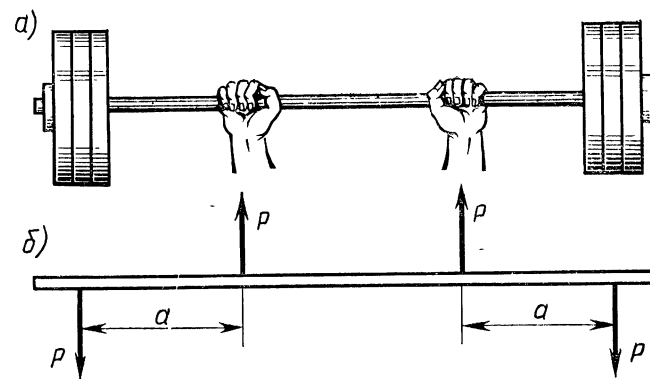


Рис. 1

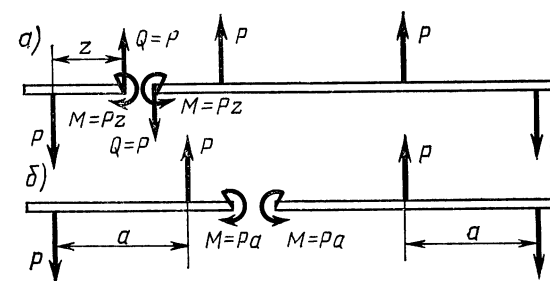


Рис. 2

перечном сечении введем силу Q и момент M и их величины подберем так, чтобы удовлетворялись условия равновесия как для левой, так и для правой части мысленно разделенной балки. При этом, если условия равновесия удовлетворены для левой части, то автоматически они удовлетворяются и для правой.

Как легко убедиться, поперечная сила $Q=P$, а изгибающий момент будет $M=Pz$. Следовательно, для левого участка бруса поперечная сила остается постоянной по длине, а изгибающий момент возрастает пропорционально расстоянию z . Так как на этом участке балки наряду с изгибающим моментом возникает также и поперечная сила, мы считаем, что брус находится в условиях поперечного изгиба. Но это только для первого участка балки. Посмотрим, что будет на среднем участке (рис. 2, б).

Мы видим, что условие равенства нулю проекции всех сил на вертикальную ось выполняется как для левой, так и для правой частей бруса, $Q=0$. Изгибающий момент равен Pa .

Таким образом, в поперечных сечениях среднего участка возникает только изгибающий момент. На среднем участке, следовательно, имеет место чистый изгиб, а не поперечный.

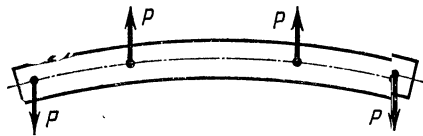


Рис. 3

Прежде чем строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (а построение этих эпюр для анализа работы конструкции представляет особый интерес), остановимся на особенностях тех деформаций, которые возникают при изгибе.

Под действием внешних сил брус искривляется. Нетрудно догадаться, что изменение кривизны бруса связано с величиной и направлением изгибающего момента. В данном случае изгибающие моменты в сечении направлены так, что балка искривляется выпуклостью вверх (рис. 3). Верхние слои бруса удлиняются, нижние — укорачиваются. Соответственно в верхних слоях возникают растягивающие, а в нижних — сжимающие напряжения. Это достаточно очевидно. Однако любопытно, что Галилей, которого мы с полным основанием считаем основоположником науки о прочности, в своем сочинении «Беседы и математические доказательства», опубликованном в 1638 г., ошибочно полагал, что все слои балки растянуты, за исключением крайних, совмещенных с вогнутой стороной балки, где, по мнению Галилея, длина слоев не менялась.

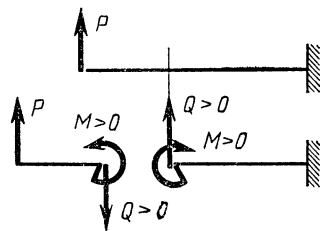


Рис. 4

В действительности слои, расположенные на вогнутой стороне, сжимаются, а на выпуклой — растягиваются. Слой, разделяющий растянутую и сжатую зоны поперечного сечения балки при изгибе, называется нейтральным слоем. Условимся считать изгибающий момент, возникающий в поперечном сечении, положи-

тельным, если на левом торце правой части бруса он направлен по ходу часовой стрелки, а на правом торце левой части — против хода часовой стрелки (рис. 4). Положительный изгибающий момент вызывает растяжение нижних слоев бруса и сжатие верхних.

Поперечную силу Q (рис. 4) будем считать положительной, если на левом торце правой части бруса она направлена снизу вверх, а на правом торце левой части сверху вниз.

2. ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

Эпюрой изгибающих моментов называется график, изображающий закон изменения момента по длине балки. Соответственно под эпюрой поперечной силы понимается график, изображающий закон изменения поперечной силы. Каждая ордината эпюры M (или Q) представляет собой величину изгибающего момента (или поперечной силы) в соответствующем поперечном сечении балки. Ординаты эпюры M будем откладывать со стороны сжатых волокон бруса, т. е. строить эпюру M , как говорят, на сжатом волокне.

Рассмотрим некоторые примеры построения эпюр.

Построим для начала эпюры M и Q для рассмотренной ранее штанги. Изгибающий момент на первом участке равен, как вы уже установили, Pa . Согласно принятому правилу знаков возрастающую функцию M (рис. 5) строим внизу — сжатые волокна находятся внизу. В пределах среднего участка изгибающий момент остается постоянным. На третьем участке эпюра будет такой же, как и на первом.

Поперечная сила для сечений первого участка постоянна и равна P . Согласно принятому правилу знаков ее

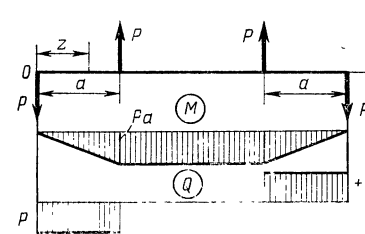


Рис. 5

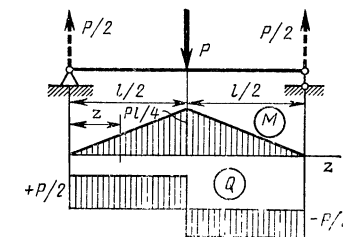


Рис. 6

следует считать отрицательной. На среднем пролете поперечная сила равна нулю. А на правом участке поперечная сила снова равна P , но будет положительной (рис. 5).

Рассмотрим еще пример (рис. 6). Балка на двух опорах нагружена силой P , приложенной посередине пролета.

Сначала определяем реакции опор. Они направлены вверх и равны каждая по $P/2$. На расстоянии z от левой опоры изгибающий момент равен $Pz/2$ и направлен так, что дает сжатые волокна наверху. Момент считается положительным, и эпю-

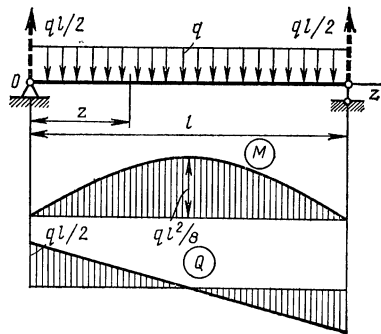


Рис. 7

ра строится сверху над базисной линией. Аналогичным образом выглядит эпюра изгибающего момента и для правой части бруса.

Поперечная сила в сечениях балки остается для левой и правой частей балки одинаковой, постоянной по длине и равной по $P/2$. Но знаки поперечной силы различны. Для левой части балки поперечная сила равна $+P/2$, а для правой части $-P/2$.

В заключение построим эпюры изгибающего момента и поперечной силы для двухопорной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 7).

Равномерно распределенная нагрузка на длине балки l дает равнодействующую, равную ql . Эта равнодействующая воспринимается двумя опорами, и реакции опор одинаковы и равны по $ql/2$.

На расстоянии z от левой опоры изгибающий момент в сечении балки состоит из двух слагаемых: момента реакции $ql/2$ на плече z за вычетом момента распределен-

ной на длине z нагрузки qz . Это равнодействующая распределенных сил на длине z , а ее плечо равно половине расстояния z . Таким образом, получаем

$$M = (ql/2)z - qz^2/2.$$

Поперечная сила в том же сечении равна разности сил $ql/2$ и qz , т. е.

$$Q = ql/2 - qz.$$

Согласно полученным выражениям на рис. 7 строится параболическая эпюра M и линейная эпюра Q . Наибольшего значения изгибающий момент достигает посередине пролета:

$$M_{\max} = ql^2/8.$$

В заключение прокомментируем эпюры M и Q для балки, защемленной одним концом (рис. 8).

Такого рода балки называются обычно консольными. В данном случае с правой стороны на балку не наложено связей, и определение внутренних сил в любом сечении может быть произведено без предварительного определения реакций.

В среднем сечении через крестовину на консоль передается сосредоточенный момент. В результате на эпюре изгибающих моментов возникает скачок. При переходе через сечение C сумма моментов сил, расположенных по правую или левую сторону от сечения, меняется сразу на величину M .

Поперечные силы во всех сечениях балки постоянны и равны минус P .

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭПЮРАМИ МОМЕНТОВ И ЭПЮРАМИ ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

Сопоставляя эпюры M и Q , представленные на рис. 5—8, нетрудно заметить, что эпюры Q по внешнему виду полностью повторяют график производной от функции M . Это бросается в глаза, но это вовсе еще не доказательство того, что Q действительно есть производная от M по z . Сейчас, однако, мы это докажем.

Пусть балка (рис. 9) нагружена некоторой неравномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Выделим из этой балки участок длиной dz , достаточно малой для того, чтобы распределенную на этой длине нагрузку q можно было бы считать постоянной. Точки прило-

жения сосредоточенных сил или моментов мы не рассматриваем. Это особые точки, в которых имеет место разрыв непрерывности в эпюрах M и Q .

К правому и левому торцам выделенного элемента приложим поперечные силы и изгибающие моменты. При переходе от координаты z к $z+dz$ переменные M и Q получают соответственно приращения dM и dQ .

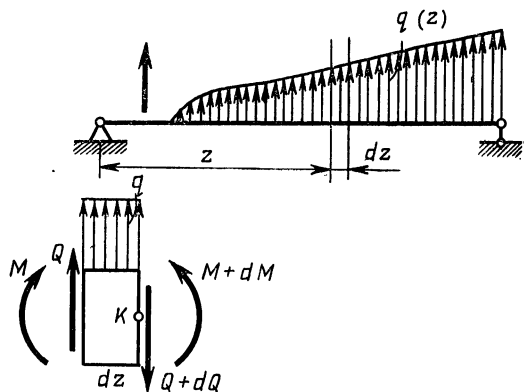


Рис. 9

Приравняв нулю сумму проекций сил на вертикальную ось, получим

$$\frac{dQ}{dz} = q.$$

Следовательно, производная от поперечной силы есть интенсивность распределенной нагрузки q .

Приравняем теперь нулю сумму моментов сил относительно точки K (рис. 9), т. е.

$$M + Qdz + qdz \frac{dz}{2} - M - dM = 0.$$

Отбросив малые высшего порядка, получим:

$$\frac{dM}{dz} = Q.$$

Мы видим, что действительно производная от изгибающего момента по длине бруса представляет собой поперечную силу.

Из полученных соотношений можно сделать некоторые выводы. В частности, если балка загружена равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$, то эпюра поперечных сил на соответствующем участке будет линейной, а эпюра изгибающих моментов — квадратичной функцией z . В точках, где приложена сосредоточенная сила, эпюра поперечных сил имеет скачок на величину силы, а эпюра изгибающих моментов в этой точке имеет излом. В точках, где эпюра моментов имеет экстремум, поперечная сила обращается в нуль. Словом, все то, что можно сказать о функции и ее первой и второй производных, непосредственно переносится на эпюры изгибающих моментов, поперечных сил и на закон распределенной нагрузки интенсивности q .

Научиться строить эпюры M и Q крайне необходимо. В процессе изучения курса сопротивления материалов с ними придется встречаться неоднократно. Следует иметь в виду, что освоение эпюр дается только в результате самостоятельной работы и решения большого числа примеров и задач. Здесь необходима серьезная тренировка.

4. НАПРЯЖЕНИЯ В БРУСЕ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

Рассмотрим наиболее простой случай изгиба, а именно чистый изгиб. Под чистым изгибом, повторяем, понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только изгибающий момент, а все прочие силовые факторы равны нулю.

Условия чистого изгиба могут возникать при различных внешних нагрузках. Некоторые характерные примеры представлены на рис. 10.

Отвлекаясь от особенностей приложения внешних сил и условий закрепления бруса в целом, рассмотрим тот его участок, где $M = \text{const}$, а $Q = 0$ (рис. 11). На границах этого участка действуют только моменты M . Будем пока предполагать, что этот участок имеет симметричное относительно вертикальной оси сечение, а действующие моменты расположены в плоскости симметрии. В этом случае, очевидно, изогнутая ось стержня может быть расположена только в плоскости действия изгибающего момента M .

Если на поверхности бруса нанести линии, перпендикулярные его оси, то их можно рассматривать как след

плоскости некоторого поперечного сечения. При чистом изгибе бруса эти линии остаются прямыми, и вполне правдоподобно, что при чистом изгибе поперечные сечения бруса остаются плоскими и нормальными к искривленной оси бруса.

Справедливость этого утверждения, т. е. гипотезы плоских сечений, можно обосновать и простыми логическими рассуждениями. Действительно, рассмотрим среднее поперечное сечение AA изогнутого бруса (рис. 12). Точки этого сечения по условиям симметрии не могут получить преимущественных смещений ни вправо, ни влево, поскольку и та и другая стороны полностью равноправны. Следовательно, это сечение остается плоским.

Разрезая брус на две равные части сечением AA , получаем участки вдвое меньшие, находящиеся точно в тех же условиях, что и целый участок

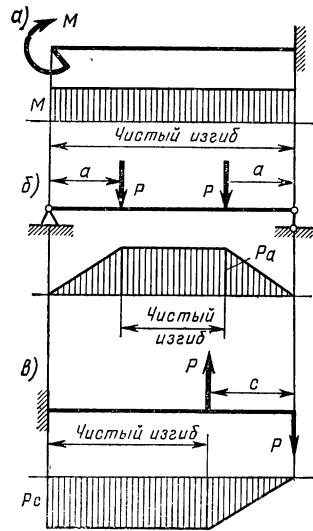


Рис. 10

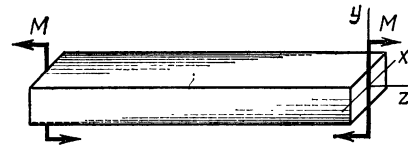


Рис. 11

бруса. Для каждой из полученных половин приведенные ранее рассуждения могут быть полностью повторены. Следовательно, средние сечения этих половин также остаются плоскими. Этот процесс деления можно продолжать и далее. Тем самым будет доказано, что в неограниченной близости от любого наперед заданного сечения есть сколь угодно много сечений, для которых соблюдается высказанное условие плоских сечений.

Фактически это и есть доказательство того, что вообще все сечения однородного бруса при чистом изгибе не искривляются, а лишь поворачиваются. Отступления от закона плоских сечений, таким образом, при чистом изгибе быть не может.

Понятно, сказанное не относится к краевым зонам, где вследствие особенностей приложения внешних сил возможны местные отступления от указанной закономерности. В соответствии с принципом Сен-Венана имеется возможность краевую зону исключить.

Образование деформаций, таким образом, может рассматриваться при чистом изгибе как результат взаимного поворота поперечных сечений друг относительно друга.

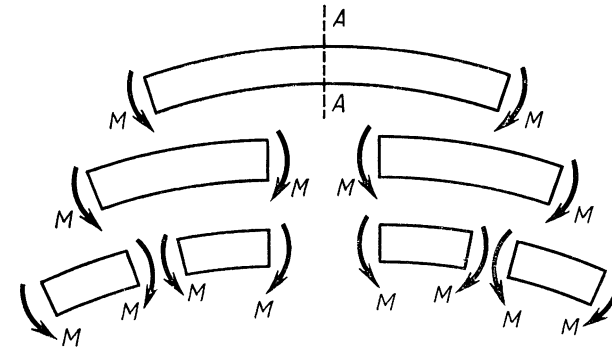


Рис. 12

В теории чистого изгиба предполагается, что продольные волокна не давят друг на друга. Методами теории упругости можно показать, что это предположение является строгим. Все волокна при чистом изгибе находятся в условиях одноосного растяжения или сжатия, и поэтому нормальные напряжения σ и соответствующие им относительные удлинения ϵ связаны между собой известным нам соотношением Гука $\sigma = E\epsilon$, если только напряжения не превышают предела пропорциональности.

Выделим из рассматриваемого бруса элемент длиной dz (рис. 13). В результате изгиба торцевые сечения элемента, оставаясь плоскими, повернутся друг по отношению к другу на некоторый малый угол $d\phi$.

Левое сечение элемента dz примем условно неподвижным. Тогда при повороте правого сечения на угол $d\phi$ верхние слои удлинятся, а нижние укоротятся. Растянутая и сжатая зоны разделены так называемым нейтральным слоем, а следы торцевых сечений пересекаются на рис. 13 в точке O , которая является центром кривизны продольных волокон элемента dz .

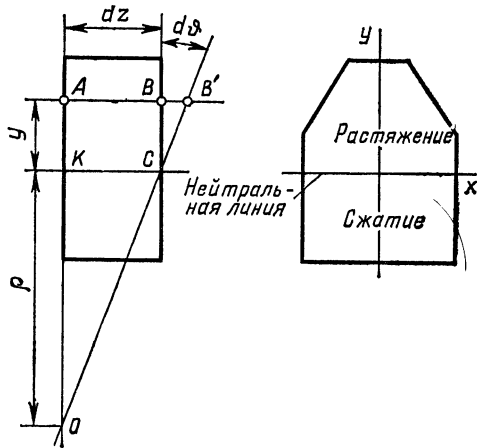


Рис. 13

Обозначим через ρ радиус кривизны нейтрального слоя. В слое AB , расположенном на расстоянии y от нейтрального слоя, абсолютное удлинение будет BB' , а относительное удлинение —

$$\epsilon = BB'/AB.$$

Из подобия треугольников вытекает, что

$$\epsilon = y/\rho.$$

На основании закона Гука получим

$$\sigma = E y/\rho.$$

Таким образом, ординаты эпюры напряжений σ (рис. 14) ограничены прямой линией с наибольшими по

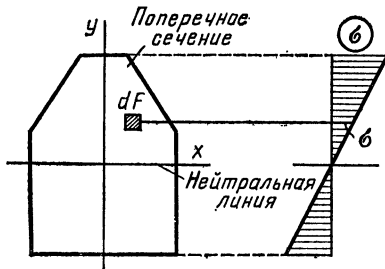


Рис. 14

абсолютной величине значениями в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

Итак, нам удалось установить общую картину распределения нормальных напряжений в поперечном сечении, но мы еще не можем определить величину σ . Нам остается неизвестным радиус ρ и

мы не знаем положения нейтральной линии, от которой отсчитывается величина y .

Воспользуемся уравнениями равновесия.

Нормальная сила в поперечном сечении при изгибе бруса равна нулю. Но нормальная сила представляет собой интеграл элементарных сил σdF (рис. 15), взятый по всей площади поперечного сечения. Таким образом,

$$N = \int_F \sigma dF = 0.$$

$$\text{Исключая } \sigma, \text{ получим } \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0.$$

$$\text{Так как } E/\rho \neq 0, \text{ то } S_x = \int_F y dF = 0.$$

Но это есть статический момент сечения относительно нейтральной оси. А так как статический момент равен нулю, то это означает, что нейтральная линия проходит через центр тяжести поперечного сечения балки. Таким образом, начало отсчета ординаты y нами определено.

Теперь составим выражение для изгибающего момента в сечении балки. Очевидно (рис. 15),

$$M_x = \int_F y \sigma dF.$$

Подставляя значение σ , получим

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF,$$

или

$$M_x = \frac{EI_x}{\rho}.$$

Следовательно, кривизна изогнутой балки пропорциональна моменту и обратно пропорциональна величине EI_x , называемой жесткостью балки на изгиб.

При чистом изгибе балка постоянной жесткости искривляется по дуге окружности, так как радиус кривизны по длине балки остается неизменным.

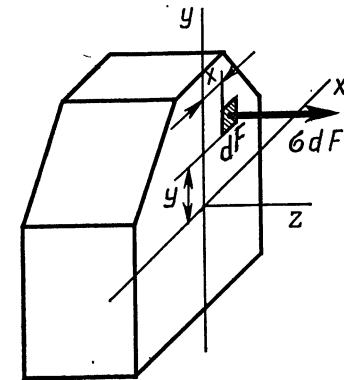


Рис. 15

Подставляя выражение кривизны в формулу для напряжений, получим

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y.$$

В рассмотренном примере симметричного сечения балки изгибающий момент относительно оси y равен нулю, и мы можем написать:

$$M_y = \int_F x \sigma dF.$$

Заменяя σ его значением, получим

$$M_y = \frac{E}{\rho} \int_F xy dF = 0.$$

Полученный интеграл представляет собой центробежный момент инерции относительно осей x, y . Центробежный момент инерции равен нулю относительно главных осей сечения. В рассматриваемом случае ось y является осью симметрии. Поэтому условие $I_{xy} = 0$ у нас выполняется. В случае если поперечное сечение не имеет осей симметрии, условие $M_y = 0$ удовлетворяется, когда плоскость действия внешнего момента проходит через одну из главных осей сечения.

Итак, мы можем окончательно сказать, что все полученные соотношения верны только в том случае, когда плоскость изгибающего момента совпадает с одной из главных осей сечения. Нейтральной линией в этом случае является вторая главная центральная ось сечения. Искривление бруса в этом случае происходит в плоскости действующего момента, а изгиб называется прямым.

Если плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей сечения, то такой изгиб называется косым. В этом случае плоскость изменения кривизны бруса не совпадает с плоскостью действия изгибающего момента.

5. МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Теперь вернемся к выражению, полученному нами для напряжений:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Из этой формулы видно, что наибольшие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси. Абсолютное значение наибольшего напряжения можно получить из следующего выражения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max},$$

где y_{\max} — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения.

Величина I_x/y_{\max} , зависящая только от размеров и формы поперечного сечения, называется осевым моментом сопротивления сечения при изгибе и обозначается через W_x :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}.$$

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Определим осевые моменты сопротивления для прямоугольного и круглого сечений (рис. 16).

Для прямоугольного сечения с основанием b и высотой h имеем:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Для круглого сечения с диаметром d :

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

Момент сопротивления выражается в мм^3 или см^3 .

Отношение моментов сопротивления двух круглых брусков определяется кубом отношения их диаметров. Это было установлено еще Галилеем, который утверждал, что в призмах или цилиндрах одинаковой длины, но разной толщины сопротивление излому возрастает в «тройном» отношении диаметров.

Расчет балок на

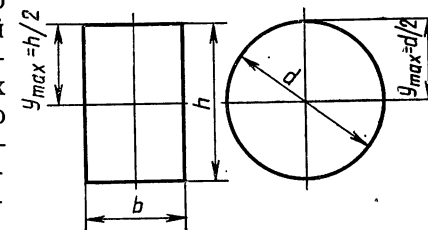


Рис. 16

прочность ведется обычно по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в наиболее опасных сечениях по условию $\sigma_{\max} < [\sigma]$, где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

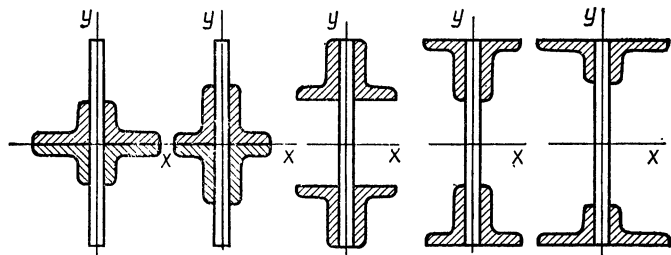


Рис. 17

Для балок, работающих на изгиб, наиболее рациональной является та форма сечения, для которой при неизменной площади достигается наибольшее значение момента сопротивления. Для этого следует возможно большую часть площади располагать как можно дальше от нейтральной оси.

На рис. 17 показано пять составных сечений балки с равной площадью и равной высотой. Они изображены в порядке возрастания момента инерции I_x и возрастания W_x .

В заключение рассмотрим балку, состоящую из двух одинаковых прямоугольных брусков (рис. 18).

Если при изгибающем моменте, действующем в вертикальной плоскости, бруски расположить рядом друг с другом, то момент сопротивления составного сечения будет $2bh^2/6$.

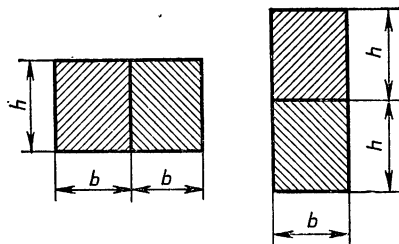


Рис. 18

Если же бруски расположить один над другим, прочно соединив их, то момент сопротивления составного сечения равен $b(2h)^2/6$, т. е. будет в два раза больше, чем в первом случае.

Таким образом, при одинаковой площади

поперечного сечения сопротивляемость балки изгибу во втором случае будет вдвое больше, чем в первом.

ЛЕКЦИИ 19—20

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

1. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ БРУСА

После того как вы познакомились с определением нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях при чистом изгибе, мы имеем возможность перейти к новой теме. Речь пойдет о прямом поперечном изгибе.

Вы уже знаете, что при прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают и поперечные силы. Следовательно, наряду с нормальными возникают и касательные напряжения. Наличие касательных напряжений связано с возникновением сдвигов и перекосов сечений. Сечения, плоские до деформации, не остаются в дальнейшем плоскими и слегка искривляются.

Детальное исследование этого вопроса методами теории упругости показало, что искривление поперечных сечений в результате сдвига на величину нормальных напряжений оказывает пренебрежимо малое влияние, которым с полным основанием можно пренебречь. Таким образом, гипотеза плоских сечений считается приемлемой и в случае поперечного изгиба, а для определения нормальных напряжений пользуются тем самым выражением, которое было нами выведено ранее для чистого изгиба:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y.$$

Итак, с нормальными напряжениями все ясно. Но в поперечных сечениях при поперечном изгибе возникают еще и касательные напряжения, равнодействующая которых и представляет собой поперечную силу

$$Q = \int_F \tau_y dF,$$

где τ_y — вертикальные составляющие касательных напряжений, которые и представлены на рис. 19. (Чтобы рису-

нок не загромождать, нормальные напряжения в сечении не показаны.)

В продольных сечениях (рис. 20) по закону парности возникают точно такие же касательные напряжения τ_y , что и в поперечных сечениях.

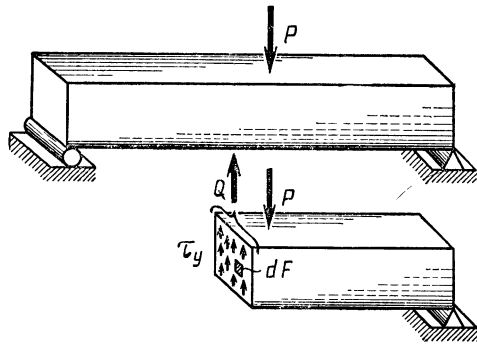


Рис. 19

Наряду с напряжениями τ_y в поперечных сечениях бруса могут возникать и касательные напряжения, направленные по оси x , т. е. τ_x . Наиболее просто их существование обнаруживается на примере бруса непрямоугольного сечения (рис. 21). В некоторой точке A , расположенной у контура касательной, напряжение обязательно должно быть направлено по касательной к контуру. В противном случае возникла бы составляющая касательных напряжений по нормали к контуру τ_n и парное

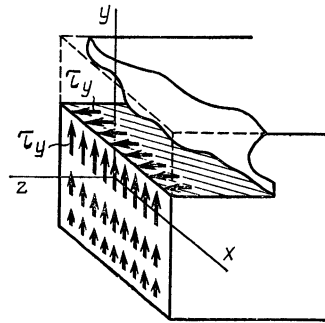


Рис. 20

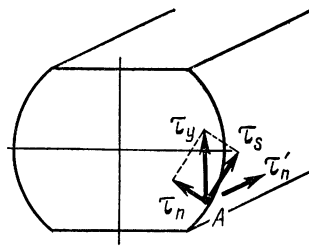


Рис. 21

напряжение τ_n' . Но внешняя поверхность свободна от напряжений и $\tau_n' = \tau_n = 0$. Следовательно, в рассматриваемой точке A возникает не только τ_y , но и τ_x , такое, чтобы сумма проекций τ_y и τ_x на нормаль к контуру была бы равна нулю.

Касательные напряжения τ_x мы оставим пока без рассмотрения и займемся определением напряжений τ_y .

2. ФОРМУЛА ЖУРАВСКОГО

Касательные напряжения будем определять через парные им касательные напряжения, возникающие в продольных сечениях балки.

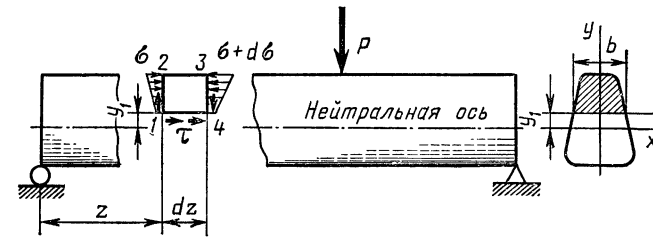


Рис. 22

Выделим из балки постоянного сечения бесконечно малый элемент $1-2-3-4$ (рис. 22). Для этого проведем два поперечных сечения на расстояниях z и $z+dz$ от левого края, и продольное сечение, параллельное нейтральному слою и отстоящее от него на расстоянии y_1 .

Если в поперечном сечении с абсциссой z возникает изгибающий момент M_x , а с абсциссой $z+dz$ — момент $M_x + dM_x$, то нормальные напряжения в площадках $1-2$ и $3-4$ выделенного элемента определяются выражениями

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \quad \sigma + d\sigma = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y.$$

Эпюры нормальных напряжений, действующих по площадкам $1-2$ и $3-4$, имеют вид трапеций. При положительном изгибающем моменте эти напряжения сжимающие. Кроме нормальных на тех же площадках возникают и касательные напряжения. На левом торце выделенного элемента они направлены вверх, на правом —

вниз. На нижней грани элемента 1—2—3—4 (рис. 22) возникает касательное напряжение τ_y . Его величина определяется из условий равновесия элемента:

$$\int_{F_{отс}} (\sigma + d\sigma)dF - \int_{F_{отс}} \sigma dF = \tau_y b dz.$$

Первый интеграл представляет собой силу, действующую на торце 3—4 влево. Вторым интегралом — это сила нормальных напряжений на торце 1—2, направленная вправо. Разность этих сил уравнивается касательной силой $\tau_y b dz$. При этом мы принимаем, что касательное напряжение τ_y в площадке 1—4 распределено равномерно по ширине сечения b . Интегрирование нормальных сил σdF производится по отсеченной части сечения $F_{отс}$. На рис. 22 эта площадь заштрихована.

Заменяя σ и $\sigma + d\sigma$ их выражениями, перепишем уравнение равновесия в следующем виде:

$$\frac{dM_x}{I_x} \int_{F_{отс}} y dF = \tau_y b dz,$$

или же

$$\tau_y = \frac{dM_x}{dz} \frac{1}{I_x b} \int_{F_{отс}} y dF,$$

но

$$dM_x/dz = Q, \text{ а } \int_{F_{отс}} y dF = S_x^{отс}$$

представляет собой статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси x . Таким образом, в итоге мы получаем окончательное выражение для касательного напряжения в продольной секущей площадке:

$$\tau_y = QS_x^{отс}/I_x b.$$

По закону парности точно такое же касательное напряжение возникает и в поперечных сечениях на расстоянии y_1 от нейтральной оси.

Полученную формулу принято называть формулой Журавского.

Дмитрий Иванович Журавский (1821—1891) был известным инженером-путейцем, оказавшим большое влияние на развитие теории строительной механики вообще и мостостроения в частности.

Определение касательных напряжений с помощью формулы Журавского производится в следующем порядке:

1. Проводится поперечное сечение балки.
2. Для этого сечения определяется поперечная сила Q и момент инерции I_x всего сечения относительно нейтральной оси.

3. В поперечном сечении на уровне, для которого определяются касательные напряжения, параллельно нейтральной оси проводится прямая, отсекающая часть сечения. Длина отрезка этой прямой представляет собой ширину b , входящую в знаменатель формулы Журавского.

4. Вычисляется статический момент $S_x^{отс}$ отсеченной части сечения относительно нейтральной оси x , а затем по формуле Журавского определяется искомое касательное напряжение τ_y .

3. ВЕЛИЧИНА И РОЛЬ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Определим закон распределения касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении $b \times h$ (рис. 23). Поперечная сила в сечении равна Q и направлена вдоль оси y .

На расстоянии y от нейтральной оси x проводим горизонтальную прямую и определяем статический момент отсеченного прямоугольника относительно оси x . Площадь заштрихованного прямоугольника равна $(h/2 - y)b$, а расстояние от его центра тяжести до оси x будет $(h/2 + y)/2$. Таким образом,

$$S_x^{отс} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Момент инерции сечения относительно центральной оси $I_x = bh^3/12$. Ширина разреза в сечении b — величина постоянная. Поэтому формула Журавского дает:

$$\tau_y = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Касательные напряжения, как видим, меняются по высоте сечения по закону параболы (рис. 23). При $y = h/2$ в нуль обращается площадь $F_{отс}$ и соответственно нулю равняется $S_x^{отс}$. При $y = -h/2$ отсеченная площадь пред-

ставляет собой площадь всего сечения, и статический момент всей площади относительно центральной оси обращается также в нуль. Таким образом, в верхней и в нижней точках сечения $\tau_y = 0$. Наибольшего значения напряжения τ_y достигает на уровне нейтральной линии, т. е. при $y = 0$:

$$\tau_{\max} = 3Q/2bh.$$

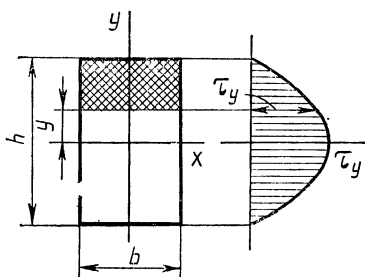


Рис. 23

Как видим, максимальное касательное напряжение в полтора раза больше среднего касательного напряжения, которое мы получили бы, поделив силу Q на площадь всего поперечного сечения.

Нетрудно убедиться в том, что касательные силы имеют своей равнодействующей поперечную силу Q , т. е.

$$Q = \int_F \tau_y dF.$$

Необходимые выкладки выполнить очень просто и здесь мы их не производим.

Касательные напряжения характеризуют собой наличие силовых связей между продольными слоями балки при поперечном изгибе. Эти силы препятствуют сдвигу соседних слоев друг относительно друга. Если связи между слоями нарушить, то при поперечном изгибе произойдет сдвиг слоев, и несущая способность балки существенно снизится. На рис. 24 показано различие в изгибе балки, состоящей из четырех склеенных и из четырех свободно, без трения положенных друг на друга досок.

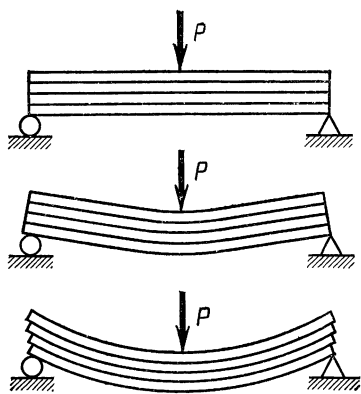


Рис. 24

Касательные напряжения, оставаясь по величине существенно меньше нормальных напряжений при изгибе, тем не менее играют очень большую роль в общем поведении балки при поперечном изгибе. Наибольшие касательные напряжения возникают, как правило, в зоне нейтрального слоя сечения. Но это вовсе не обязательно. На рис. 25 показана эпюра касательных напряжений в квадратном сечении при изгибе в плоскости диагонали. Здесь точки экстремума τ_y сдвинуты от нейтральной оси в стороны.

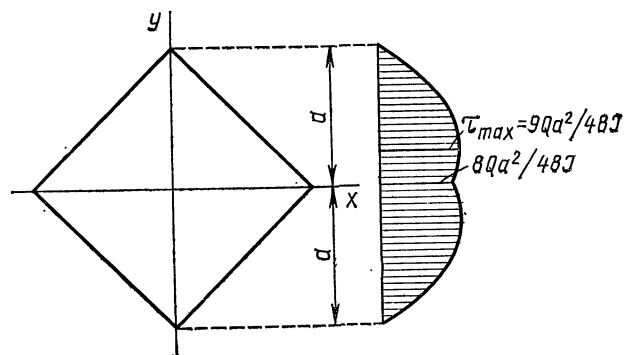


Рис. 25

Не следует забывать, однако, что при выводе формулы Журавского нами было сделано предположение о равномерном распределении напряжений по ширине разреза b . В примере, показанном на рис. 25, условие равномерного распределения не может соблюдаться, так как в угловых точках на оси x напряжения, обязанные быть касательными к двум пересекающимся прямым, обращаются в нуль.

Особое значение этот вопрос приобретает для тонкостенных сечений.

4. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В качестве примера рассмотрим распределение касательных напряжений по сечению двутавровой балки (рис. 26).

По формуле Журавского определим касательные напряжения в некоторых характерных точках поперечного

сечения балки. В верхних точках 1 касательные напряжения, очевидно, равны нулю. В точке 2, расположенной непосредственно над линией, проходящей через нижнюю грань верхней полки двутавра, касательное напряжение, подсчитанное по формуле Журавского, окажется следующим:

$$\tau_{y2} = \frac{Q}{I_x b} bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Эпюра τ_y , при переходе от точки 1 к точке 2 будет параболической, как и для прямоугольного сечения.

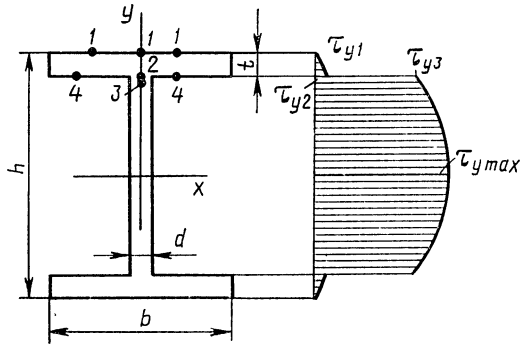


Рис. 26

В стенке двутавра, в точке 3, расположенной непосредственно под точкой 2, касательное напряжение будет:

$$\tau_{y3} = \frac{Q}{I_x d} bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Как видим, при переходе от точки 2 к точке 3 эпюра τ_y претерпевает скачок. Ниже точки 3 касательное напряжение снова меняется по закону параболы, достигая своего наибольшего значения на уровне нейтральной линии. В итоге получаем, скажем прямо, довольно странную эпюру касательных напряжений, показанную на рис. 26. В ней содержится совершенно очевидная неувязка с принятым законом равномерного распределения напряжений по ширине сечения. Действительно, рассматривая точки 4, расположенные на нижней грани верхней полки, мы уверенно можем сказать, что $\tau_{y4} = 0$, в то время как $\tau_{y2} \neq 0$. В то же время для самой стенки двутавра предположе-

ние о равномерном распределении напряжений по толщине стенки является вполне приемлемым. Поэтому касательные напряжения τ_y в двутавровом сечении определяются по формуле Журавского с достаточной точностью только для вертикальной стенки, а в полках напряжения τ_y методами сопротивления материалов определить не удастся. К тому же они очень малы. Но вместе с тем в полках возникают вполне ощутимые напряжения τ_x , которые очень просто определить. И это мы сейчас сделаем.

Выделим из балки элементарный участок длиной dz (рис. 27), а далее отсечем от верхней полки призму шириной x' . На торцевых гранях призмы возникают нормальные напряжения σ и $\sigma + d\sigma$. Разность образующихся сил уравнивается касательными напряжениями τ_x , действующими в продольном сечении, и мы можем написать:

$$\tau_x \delta dz = \int_{F_{отс}} (\sigma + d\sigma) dF - \int_{F_{отс}} \sigma dF.$$

Здесь под $F_{отс}$ понимается площадь торцевой поверхности отсеченной призмы, а напряжение τ_x предполагается равномерно распределенным по толщине полки δ .

Производя замену σ и $\sigma + d\sigma$ их выражениями

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \quad \sigma + d\sigma = \frac{M_x + dM_x}{I_x} y,$$

получим

$$\tau_x \delta dz = \frac{dM_x}{I_x} \int_{F_{отс}} y dF$$

или же

$$\tau_x = QS_x^{отс} / I_x \delta.$$

Полученная формула совпадает с формулой Журавского для касательных напряжений, параллельных силе Q .

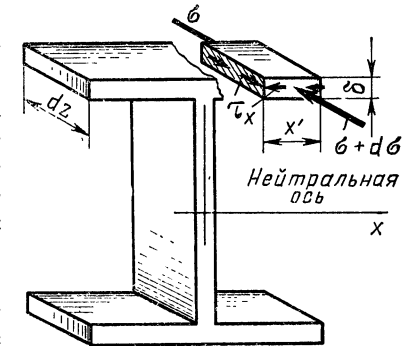


Рис. 27

Таким образом, составляющие касательных напряжений, как параллельных, так и перпендикулярных к поперечной силе, можно для тонкостенного профиля определить по формуле Журавского, подставляя в нее соответствующие значения δ (или b) и $S_x^{\text{отс}}$.

5. ЦЕНТР ИЗГИБА

Рассмотрим распределение касательных напряжений в поперечном сечении балки корытного профиля (в швеллере) при прямом поперечном изгибе.

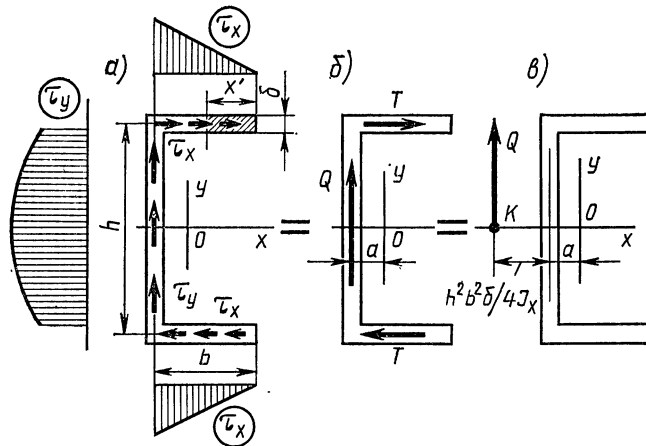


Рис. 28

На рис. 28 показан корытный профиль. Изгиб балки происходит в плоскости yz , а поперечная сила Q предполагается направленной вертикально вверх.

Распределение касательных напряжений τ_y в вертикальной стенке швеллера будет таким же, как и в стенке двутавра, т. е. имеет вид параболы (рис. 28).

Установим характер распределения касательных напряжений τ_x в верхней полке швеллера. Для этого на расстоянии x' от края полки проведем вертикальное сечение. Далее определим статический момент $S_x^{\text{отс}}$ отсеченной и заштрихованной на рисунке площади относительно оси x :

$$S_x^{\text{отс}} = x' \delta h / 2.$$

Теперь получим:

$$\tau_x = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{I_x \delta} = \frac{Q h}{2 I_x} x'.$$

Здесь x' меняется от нуля до величины b , а эпюра τ_x имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной $Q h b / 2 I_x$.

В нижней полке напряжения τ_x по величине такие же, как и в верхней, но направлены в противоположную сторону.

Таким образом, при прямом поперечном изгибе в поперечных сечениях швеллера возникают следующие напряжения и соответствующие им равнодействующие:

а) нормальные напряжения σ , которые на рис. 28 не показаны. Соответствующие им элементарные силы σdF приводятся к изгибающему моменту M_x ;

б) касательные напряжения τ_x , действующие в полках швеллера и направленные горизонтально. Равнодействующие сил в верхней и нижней полках одинаковы и равны:

$$T = \frac{Q h b}{2 I_x} \cdot \frac{b}{2} \delta = \frac{Q h b^2 \delta}{4 I_x};$$

в) касательные напряжения τ_y , направленные вертикально. Они создают равнодействующую, равную поперечной силе Q , направленной вдоль средней линии стенки (рис. 28, б).

Основной особенностью полученной системы сил является то, что силы Q и T создают момент относительно точки O — центра тяжести сечения. Этот момент равен:

$$M_K = Q a + T h = Q \left(a + \frac{h^2 b^2 \delta}{4 I_x} \right).$$

Значит, если внешние силы, создающие поперечный изгиб швеллера, приложены против центра тяжести сечения, то балка не только изгибается, но одновременно и закручивается так, как если бы к ней был приложен самостоятельный внешний момент M_K . Вместе с тем если внешние силы, вызывающие изгиб, вынести в сторону от центра тяжести, в точку K (рис. 28, в), расположенную на расстоянии

$$a + h^2 b^2 \delta / 4 I_x$$

от центра тяжести, то брус под действием таких внешних сил будет только изгибаться, и угловых перемещений, свойственных кручению, в нем возникать не будет.

Точка K называется центром изгиба. Это есть точка приложения равнодействующей касательных сил в сечении. Для сечений, обладающих двумя осями симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

ЛЕКЦИИ 21—22

КОСОЙ ИЗГИБ И ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

1. ОСОБЕННОСТИ КОСОГО ИЗГИБА

Представим себе такое нагружение бруса, при котором в его поперечном сечении возникает изгибающий момент, плоскость действия которого не проходит ни через одну из главных осей. Такой вид нагружения принято называть косым изгибом. Наша задача — определить закон распределения напряжений в поперечном сечении бруса при косом изгибе.

Наиболее простой путь решения этой задачи состоит в том, что изгибающий момент независимо от того, как он расположен, раскладывается по главным осям инерции поперечного сечения, и косой изгиб рассматривается как результат сложения двух изгибов, происходящих в главных плоскостях. Задача изучения косого изгиба, таким образом, ничего принципиально нового в себе не содержит. Мы должны просто просуммировать напряжения, возникающие в поперечном сечении в результате действия двух моментов, расположенных в главных плоскостях (рис. 29).

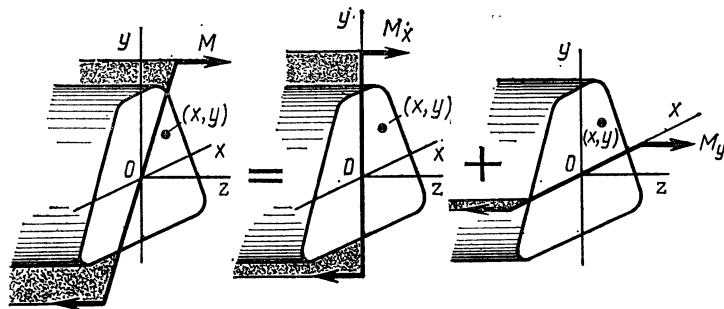


Рис. 29

Воспользуемся уже знакомыми нам соотношениями. Если в сечении действует момент M_x , то в точке с координатой y возникает напряжение.

$$\sigma(M_x) = M_x y / I_x.$$

Если в сечении действует еще и момент M_y , то в той же точке возникает дополнительное напряжение

$$\sigma(M_y) = M_y x / I_y.$$

В результате для некоторой точки (x, y) получаем суммарное напряжение

$$\sigma = M_x y / I_x + M_y x / I_y. \quad (1)$$

Здесь I_x и I_y — моменты инерции сечения относительно главных осей.

Мы видим, что нормальные напряжения являются линейной функцией координат x и y точек поперечного сечения. Поэтому концы векторов напряжений, построенных над сечением (т. е. пространственная эпюра напряжений), образуют плоскость. Так как в этом уравнении отсутствует постоянное слагаемое, то плоскость эпюры проходит через начало координат.

Геометрическое место точек, где напряжения равны нулю, представляет собой прямую, которую будем называть нейтральной линией. Нейтральная линия проходит через начало координат. Ее уравнение мы получим, приравняв нулю выражение для нормальных напряжений:

$$M_x y / I_x + M_y x / I_y = 0.$$

Нейтральная линия делит сечение на две части. По одну сторону от нейтральной линии возникают растягивающие, а по другую — сжимающие напряжения. Так как закон распределения напряжений в поперечном сечении линейный, то он будет линейным и в направлении, перпендикулярном нейтральной линии (рис. 30).

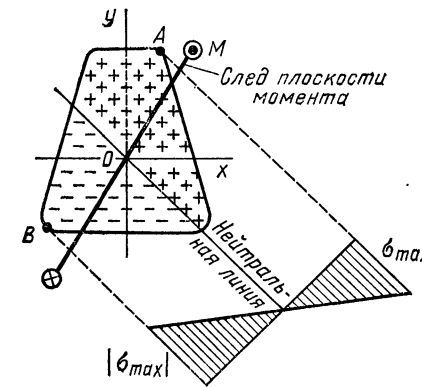


Рис. 30

Поэтому наибольшие по абсолютной величине напряжения возникнут в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии, как и при прямом изгибе. В данном случае это будут точки *A* и *B* (рис. 30).

Таким образом, все получается, как и при прямом изгибе. Но не совсем... И чтобы уяснить различие между прямым и косым изгибом, нам следует вернуться к вопросу о том, что такое изгиб вообще.

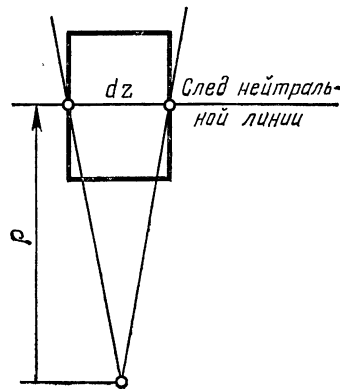


Рис. 31

Изгиб — это определенный вид нагружения бруса, при котором изменение формы бруса характеризуется изменением его кривизны. Соседние сечения бруса при изгибе поворачиваются друг относительно друга на некоторый малый угол. Эта схема нам уже хорошо знакома и еще раз представлена на рис. 31. Если принять, что изменение кривизны произошло в плоскости чертежа, то нейтральная линия проектируется на плоскость чертежа в виде точки.

Итак, плоскость изменения кривизны бруса перпендикулярна нейтральной линии. А в какой плоскости при этом действует изгибающий момент? В плоскости изменения кривизны? Нет, не обязательно! И в этом все дело. При прямом изгибе плоскость изгибающего момента совпадает с плоскостью изменения кривизны. А при косом изгибе они не совпадают, и соответственно нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента.

2. ПОЛОЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Итак, пусть в поперечном сечении бруса возникает момент *M*. На рис. 32 он специально показан проходящим через первую и третью четверти. При этом составляющие моменты M_x и M_y будут создавать в первой четверти растягивающие напряжения.

Обозначим угол наклона следа плоскости изгибающе-

го момента к оси *y* через α . Нетрудно сообразить, что составляющие моменты относительно осей *x* и *y* будут

$$M_x = M \cos \alpha; \quad M_y = M \sin \alpha.$$

Теперь займемся нейтральной линией. Ее уравнение мы уже получили ранее

$$M_x y / I_x + M_y x / I_y = 0.$$

Исключая M_x и M_y , получим уравнение нейтральной линии в следующем виде:

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x = 0.$$

Введем угол β (рис. 32), который определяет отклонение нейтральной линии от главной оси *x*. Тогда угловой коэффициент нейтральной линии равен, с одной стороны, $-\operatorname{tg} \beta$, а с другой стороны, $-\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha$. Таким образом,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Как видим, когда моменты инерции не одинаковы, углы α и β не равны друг другу, т. е. нейтральная линия не перпендикулярна плоскости изгибающего момента. Если $I_x > I_y$, то и угол β больше угла α , и нейтральная линия вместо того, чтобы быть по первому впечатлению перпендикулярной плоскости изгибающего момента, поворачивается в сторону оси минимальной жесткости.

Сказанному можно дать и иное толкование. Положение нейтральной линии характеризует плоскость изменения кривизны бруса. Следовательно, когда мы прикладываем момент не по главным осям, то брус изменяет свою кривизну не в плоскости изгибающего момента, а предпочитает изгибаться в плоскости, где жесткость на изгиб меньше.

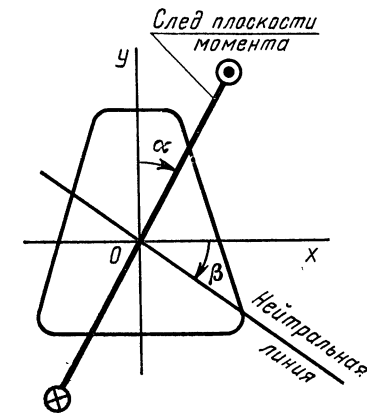


Рис. 32

Представим себе сечение в форме равнобокого уголка (рис. 33). Отношение главных моментов инерции I_x к I_y приблизительно равно четырем. Положим, что балка такого профиля консольно закреплена и находится под действием сил собственного веса. Естественно, возникающие при этом перемещения балки зависят от угловой ориентации уголка.

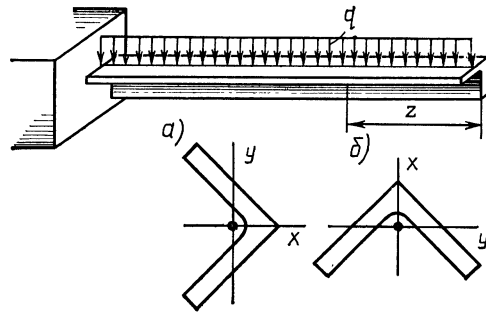


Рис. 33

Если уголок расположен так, как это показано на рис. 33,а, жесткость на изгиб будет максимальной, а так как изгибающий момент действует в главной плоскости, то и изменение кривизны бруса будет происходить в той же плоскости, т. е. в вертикальной.

Если уголковый профиль повернуть на 90° (рис. 33,б), то изгиб останется прямым. Но перемещения, конечно, здесь будут больше примерно в четыре раза.

При любой другой угловой ориентации уголка в брус возникает косой изгиб, так как плоскость действия изгибающего момента с главными осями сечения не совпадает. По мере поворота относительно продольной оси балка будет получать не только вертикальные, но и горизонтальные перемещения.

Вполне уместно обратить внимание и на те особенности поперечного изгиба, о которых мы говорили на предыдущей лекции. Под действием сил собственного веса в поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента возникают поперечная сила и соответственно касательные напряжения, направленные вдоль тонкостенного контура (рис. 34).

Теперь вспомним определение центра изгиба. Под центром изгиба мы понимаем точку приложения равно-

действующей касательных сил в поперечном сечении. Для швеллера эта точка была расположена на оси симметрии на некотором расстоянии от стенки швеллера. Обычно положение центра изгиба определяется с помощью более или менее сложных вычислений. Уголковый профиль обладает счастливым исключением. Для него положение центра изгиба может быть указано сразу.

Центр изгиба уголкового профиля находится в точке пересечения средних линий стенки и полки. В точке К (рис. 34) момент касательных сил равен нулю.

Поскольку при произвольном положении уголкового профиля центр изгиба в плоскости сил собственного веса, вообще говоря, не лежит, то брус, показанный на рис. 33, под действием собственного веса будет кроме всего прочего еще и закручиваться.

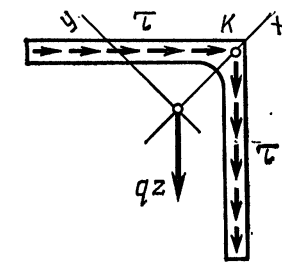


Рис. 34

3. ОПАСНЫЕ ТОЧКИ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ

Теперь вернемся к определению наибольших напряжений в поперечном сечении бруса при косом изгибе, т. е. к вопросу об опасных точках сечения.

Опасные точки — это точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Найти их можно различными способами в зависимости от обстоятельств.

Представим себе, что сечение (рис. 35) имеет сложную форму, заданную чертежом. Естественно в подобных случаях обратиться к графическому приему. Сначала определяется положение нейтральной оси, которая наносится на чертеж сечения. Затем с помощью линейки и угольника, как это хорошо известно каждому студенту, определяется точка, наиболее удаленная от нейтральной оси (рис. 35). Далее определяются ее координаты x_A и y_A . И наконец, когда определены координаты, мы можем вернуться к выражению напряжений (1) и вместо координат x и y подставить значения x_A и y_A .

Следует признаться, что такие случаи, когда положение опасной точки нужно находить графическим приемом, встречаются довольно редко. Чаще положение

опасной точки становится очевидным, как только выявлено положение нейтральной линии.

Рассмотрим, например, тот же самый уголкового тонкостенный профиль (рис. 36). Положим, плоскость изгибающего момента параллельна стенке уголка и состав-

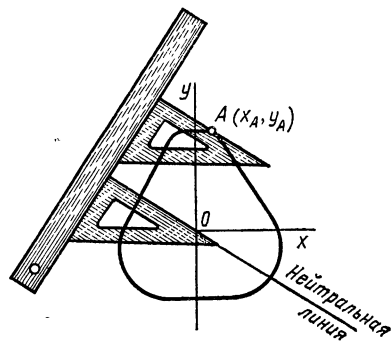


Рис. 35

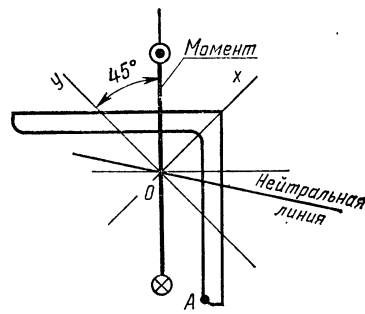


Рис. 36

ляет углы в 45° с главными осями. А нейтральная линия, как мы знаем, отклоняется от прямой, перпендикулярной плоскости момента, в сторону оси наименьшего момента инерции. И мы ориентировочно можем провести нейтральную линию.

Теперь из рис. 36 даже без вычислений видно, что наибольшие напряжения возникнут в точке А. Правда, если быть придирчивым и учитывать закругление профиля в этой точке, то пришлось бы действовать как раз с помощью графических приемов.

Но в числовой оценке это, конечно, мало что дает.

Имеются вместе с тем профили, где вообще не нужно определять положение нейтральной линии, а сразу можно указать положение опасных точек.

К числу таких относится прежде всего прямоугольное сечение (рис. 37). Как бы ни была расположена плоскость изгибающего момента,

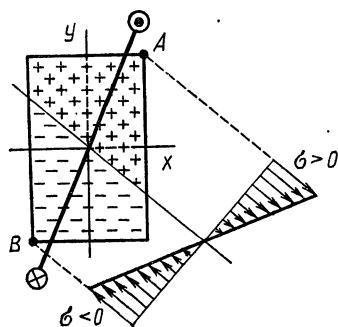


Рис. 37

максимальные напряжения обязательно возникнут в угловых точках, расположенных в тех же квадрантах, что и плоскость изгибающего момента. Это будут точки А и В.

Можно рассуждать и по-другому. Если мы разложим момент на составляющие M_x и M_y , то наибольшие напряжения у верхней грани, а момент M_y — у правой грани. Наибольшие растягивающие напряжения возникнут, конечно, в угловой точке А и будут следующими:

$$\sigma_A = M_x/W_x + M_y/W_y,$$

где W_x и W_y — моменты сопротивления прямоугольника относительно осей x и y .

Все сказанное о прямоугольнике, в такой же степени относится и к двутавровому сечению. Наибольшие напряжения у двутавра также могут возникать только во внешних угловых точках.

Остановимся теперь на некоторых любопытных свойствах, которые обнаруживает брус прямоугольного сечения при косом изгибе.

Забавно, например, следующее: если плоскость действия изгибающего момента проходит через диагональ прямоугольника, то нейтральная линия проходит через вторую диагональ. В самом деле... Тангенс угла α (рис. 38) равен b/h . Это ясно из чертежа. Согласно формуле (2) определяем угол β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha,$$

или же

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{bh^3}{12} \cdot \frac{12}{b^3h} \cdot \frac{b}{h} = \frac{h}{b}.$$

Как видим, действительно, нейтральная линия совпадает со второй диагональю.

Рассмотрим еще одно интересное и даже неожиданное свойство. При неизменной величине изгибающего момента наибольшее напряжение в брус прямоугольного сечения возникает в тех случаях, когда плоскость изгибающего момента перпендикулярна диагонали (рис. 39).

Казалось бы, наибольшее напряжение возникает, когда брус изгибается в плоскости наименьшей жесткости.

Оказывается нет. Напряжение в опасной точке A равно:

$$\sigma_A = \frac{6M_z}{bh} \left(\frac{\cos \alpha}{h} + \frac{\sin \alpha}{b} \right).$$

При неизменном моменте это есть функция угла α . Определяя производную и приравнявая ее нулю, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = h/b.$$

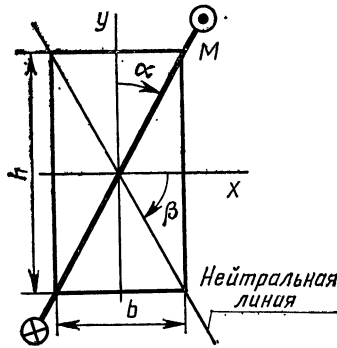


Рис. 38

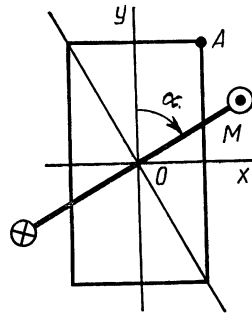


Рис. 39

Это означает, что плоскость момента перпендикулярна диагонали. Наибольшие напряжения при этом будут:

$$\sigma_A = \frac{6M}{b^2 h^2} \sqrt{h^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{6M}{b^2 h} \right)^2 + \left(\frac{6M}{bh^2} \right)^2}.$$

Иначе говоря, наибольшее напряжение равно корню квадратному из суммы квадратов наибольших напряжений, возникающих при прямом изгибе в одной и в другой плоскостях.

Рассмотрим в заключение пример, где возникает необходимость определять наиболее опасные сечения в балке, нагруженной в двух главных плоскостях.

Представим себе двухопорную балку (рис. 40), изгибаемую в вертикальной плоскости погонной нагрузкой q , а в горизонтальной — силой P , приложенной на расстоянии b от правого конца балки. Профиль балки Т-образный и его размеры указаны на рис. 40.

Эпюра изгибающих моментов в вертикальной плоскости представляет собой параболу. Эпюра в горизонтальной

плоскости кусочно-линейная. Нетрудно сообразить, что наиболее опасное сечение нужно искать где-то между серединой пролета и точкой приложения сосредоточенной силы. Впрочем, опасным может быть как раз то сечение, где приложена эта сила. Все зависит от соотношения нагрузок и от профиля балки.

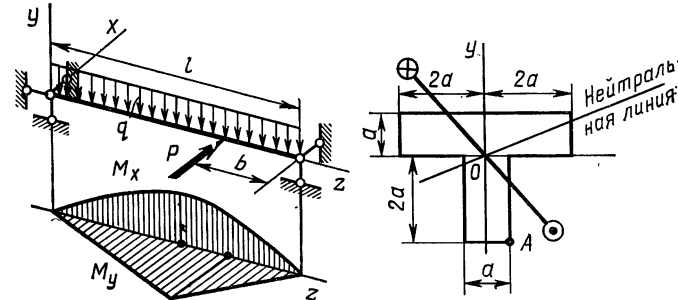


Рис. 40

Левее точки приложения сосредоточенной силы изгибающие моменты равны:

$$M_x = \frac{1}{2} qz(l-z); \quad M_y = P \frac{b}{l} z.$$

Центр тяжести сечения находится в точке O , показанной на рис. 40, а моменты инерции относительно главных центральных осей будут:

$$I_x = 4a^4; \quad I_y = \frac{11}{2} a^4.$$

Ось x оказывается осью минимального момента инерции.

Часть бруса, соответствующая второй четверти сечения, растянута. Поэтому плоскость изгибающего момента проходит через вторую и четвертую четверти. Нейтральная линия проходит в первой и третьей четвертях, отклоняясь несколько к оси x . Наиболее опасной будет точка A с координатами $a/2$ и $-2a$.

Напряжение в этой точке равно:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A,$$

или

$$\sigma_A = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{4} q(lz - z^2) + \frac{1}{11} P \frac{b}{l} z \right].$$

Таким образом, напряжение в точке A представляет собой квадратичную функцию координаты z . Найдем теперь такое поперечное сечение, где напряжение σ_A будет наибольшим. Приравняв нулю производную от σ_A по z ,

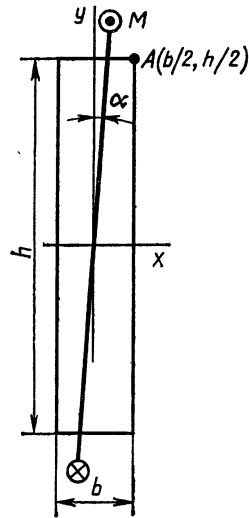


Рис. 41

находим положение наиболее опасного сечения

$$\frac{z}{l} = \frac{1}{2} + \frac{2}{11} \frac{P}{ql} \frac{b}{l}.$$

Если, например, $P=2ql$ и $b/l=1/3$, то

$$\frac{z}{l} = \frac{1}{2} + \frac{4}{33}$$

и последующее определение σ_A не представляет труда.

Итак, основные свойства косоугольного изгиба мы рассмотрели. Остается только отметить, что даже небольшое отклонение плоскости изгибающего момента от главных плоскостей при большом отношении моментов инерции I_x к I_y может привести к значительному увеличению напряжений.

Рассмотрим прямоугольное сечение со сторонами b и h (рис. 41).

$$\sigma_A = \frac{6M}{bh^2} \left(\cos \alpha + \frac{h}{b} \sin \alpha \right).$$

Считая α величиной малой, найдем приближенно:

$$\sigma_A = \frac{6M}{bh^2} \left(1 + \frac{h}{b} \alpha \right).$$

Если $\alpha=5^\circ$, или в радианах $\pi/36$, а отношение $h/b=5$, то получим

$$\sigma_A = 1,43 \frac{6M}{bh^2},$$

т. е. отклонение плоскости изгибающего момента всего на 5° привело к увеличению напряжения более чем на 40%. Ясно, что в подобных случаях косоугольный изгиб очень опасен.

4. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

С косоугольным изгибом тесно связана задача о внецентренном растяжении и сжатии бруса. Под внецентренным растяжением-сжатием понимается такой вид нагружения, когда равнодействующая продольных сил смещена относительно оси бруса. Точку приложения равнодействующей продольных сил в поперечном сечении называют полюсом; координаты полюса обозначаются через x_0 и y_0 (рис. 42, а).

Внецентрированная приложенная нагрузка создает моменты относительно осей x и y . За оси координат принимаются, конечно, главные оси сечения.

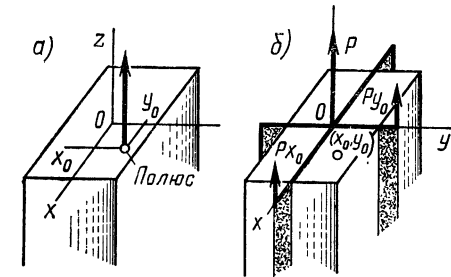


Рис. 42

Внецентричную нагрузку можно заменить силой P , приложенной в центре тяжести сечения, и двумя изгибающими моментами Px_0 и Py_0 (рис. 42, б). Поэтому нормальные напряжения при внецентренном растяжении-сжатии можно рассматривать как сумму напряжений, вызванных растягивающей силой и двумя изгибающими моментами. И для некоторой точки с координатами x и y получим:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Py_0}{I_x} y + \frac{Px_0}{I_y} x.$$

Здесь F — площадь сечения, а I_x и I_y — главные моменты инерции.

Полученную формулу удобно преобразовать, представив моменты инерции в виде:

$$I_x = i_x^2 F; \quad I_y = i_y^2 F.$$

Величины i_x и i_y имеют размерность длины и называются радиусами инерции сечения. Теперь формула для напряжений примет вид:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(\frac{xx_0}{i_y^2} + \frac{yy_0}{i_x^2} + 1 \right). \quad (3)$$

Так как напряжения линейно зависят от координат x и y , то эпюра напряжений представляет собой плоскость (рис. 43). Как видим, часть сечения бруса растянута, а часть — сжата. Эти зоны разделены нейтральной линией. В отличие от косо го изгиба нейтральная линия

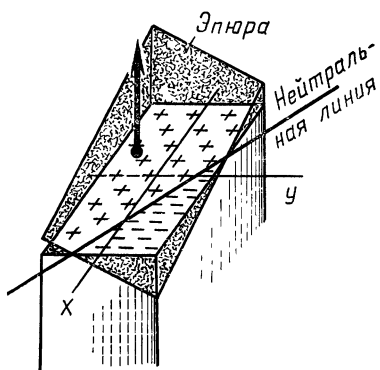


Рис. 43

здесь не проходит через начало координат, а пересекает квадрант, диаметрально противоположный тому, где находится полюс. Таким образом, внецентренное приложение нагрузки приводит к неравномерному распределению напряжений в сечении. Чем дальше от центра тяжести приложена нагрузка, или, как говорят, чем больше ее эксцентриситет, тем больше эта неравномерность.

5. НЕЙТРАЛЬНАЯ ЛИНИЯ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Как и для косо го изгиба, положение нейтральной линии определяет эпюру нормальных напряжений с точностью до амплитуды. Нейтральная линия необходима для отыскания опасных точек в сечении. Это будут точки наиболее удаленные от нейтральной линии.

$$\frac{xx_0}{i_y^2} + \frac{yy_0}{i_x^2} + 1 = 0. \quad (4)$$

Нейтральная линия — это геометрическое место точек поперечного сечения, в которых нормальное напряжение равно нулю при заданном положении полюса. Уравнение нейтральной линии получается из формулы (3) и имеет вид:

сечения. Ни от величины, ни от знака силы положение нейтральной линии не зависит.

Нейтральную линию проще всего построить, записав ее уравнение в отрезках

$$\frac{x}{-i_y^2/x_0} + \frac{y}{-i_x^2/y_0} = 1;$$

т. е. в форме $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат, равны:

$$a = -i_y^2/x_0; \quad b = -i_x^2/y_0.$$

Отложив на осях координат эти отрезки и проводя через их концы прямую, получим нейтральную линию. Обрато, если некоторая прямая, не проходящая через начало координат, задана уравнением в отрезках, то координаты соответствующего полюса равны:

$$x_0 = -i_y^2/a; \quad y_0 = -i_x^2/b.$$

Таким образом, уравнение нейтральной линии устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством точек поперечного сечения и множеством прямых — нейтральных линий.

Из полученных уравнений следует, что полюс и нейтральная линия всегда находятся по разные стороны от начала координат.

Расстояние до нейтральной линии от центра тяжести сечения определяется следующим выражением, хорошо известным нам из курса аналитической геометрии:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{i_y^4} + \frac{y_0^2}{i_x^4}}}.$$

Следовательно, по мере того как точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него. В пределе, когда нагрузка приложена центрально, нейтральная линия находится на бесконечности. При этом нормальные напряжения в поперечном сечении распределены равномерно.

6. ЯДРО СЕЧЕНИЯ

Мы выяснили, что при внецентренном сжатии в поперечных сечениях бруса могут возникать растягивающие напряжения. Вместе с тем если материал бруса хрупкий и обладает малой прочностью на растяжение, то такое внецентренное сжатие может привести к разрушению конструкции.

К материалам этого типа относится, например, бетон. Растягивающие напряжения практически не способна воспринимать и кирпичная кладка.

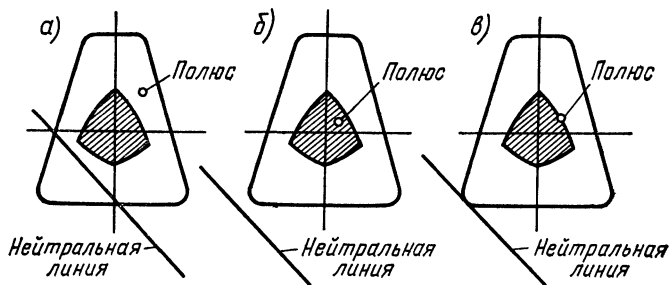


Рис. 44

Стержни из таких материалов могут работать при внецентренном сжатии только при условии, что в поперечном сечении не возникает растягивающих напряжений. Это требование можно выполнить, если эксцентриситет нагрузки не очень велик.

Нетрудно сообразить, что в сечении существует некоторая центральная область, обладающая следующими свойствами: если точка приложения силы принадлежит этой области, то напряжения во всех точках поперечного сечения имеют один и тот же знак. Эта область называется ядром сечения.

Если полюс находится за пределами ядра сечения, нейтральная линия пересекает сечение, и возникают напряжения разных знаков (рис. 44,а). Если полюс находится внутри ядра сечения, то нейтральная ось проходит вне сечения (рис. 44,б). И наконец, если точка приложения нагрузки находится на границе ядра сечения (рис. 44,в), то нейтральная линия касается внешнего контура сечения, а в точке касания напряжение равно

нулю. Поэтому для определения границы ядра сечения можно представить себе, что нейтральная линия обкатывается вокруг сечения, нигде его не пересекая. Полюс при этом вычертит границу ядра сечения.

Пусть граница или часть границы поперечного сечения (рис. 45) — выпуклая гладкая кривая, которую можно задать в параметрическом виде

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t).$$

Здесь t — некоторый параметр. Тогда уравнение касательной к этой кривой в некоторой точке M по известной формуле математического анализа будет следующим:

$$\frac{x - \varphi(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{y - \psi(t)}{\dot{\psi}(t)},$$

x и y — текущие координаты касательной. $(\dot{\varphi})$ означает производную от (φ) по t .

По мере того как изменяется параметр t , касательная обкатывается вокруг границы поперечного сечения. Если привести уравнение полученной касательной к уравнению в отрезках, то получим:

$$\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\varphi}} x - \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}\dot{\psi}} y = 1.$$

С другой стороны, уравнение нейтральной линии есть:

$$-\frac{x_0}{i_y^2} x - \frac{y_0}{i_x^2} y = 1.$$

Сравнивая коэффициенты при x и y в обоих уравнениях, получим параметрические уравнения границы ядра сечения.

$$x_0 = -i_y^2 \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\varphi}}; \quad y_0 = +i_x^2 \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}\dot{\psi}}.$$

Рассмотрим, например, эллиптическое поперечное сечение (рис. 46). Для эллипса

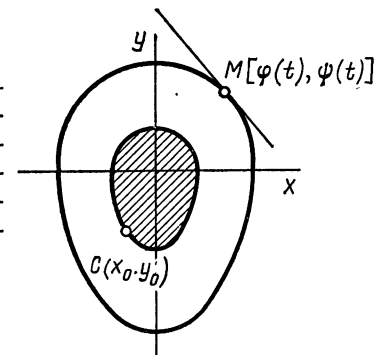


Рис. 45

$$x = \varphi(t) = a \cos t; \quad y = \psi(t) = b \sin t; \quad F = \pi ab;$$

$$I_x = \frac{1}{4} \pi ab^3; \quad I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b; \quad i_x = \frac{b}{2}; \quad i_y = \frac{a}{2}.$$

Подставим все эти выражения в только что выведенные нами параметрические уравнения границы ядра сечения и получим:

$$x_0 = -\frac{a}{4} \cos t; \quad y_0 = -\frac{b}{4} \sin t,$$

т. е. граница ядра сечения представляет собой эллипс, подобный данному, но с полуосями вчетверо меньшими.

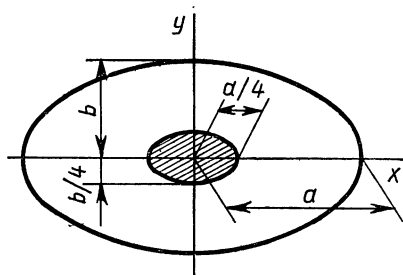


Рис. 46

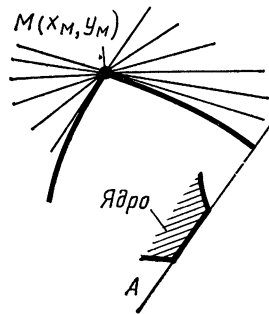


Рис. 47

Для круга, естественно, это тоже будет круг с радиусом, составляющим четверть от заданного.

Интересно, как будет выглядеть ядро сечения, если рассматривать не сплошной, а полый круг с радиусом R и r , где r — радиус внутреннего отверстия. У полого круга другой радиус инерции. Для сплошного круга $i_x = i_y = R/2$, а для полого $i_x = i_y = \sqrt{R^2 + r^2}$, т. е. у него радиус инерции больше. Поэтому радиус ядра сечения будет уже не $R/4$, а $(R^2 + r^2)/4R$. Для очень тонких колец радиус ядра сечения приближается к $R/2$.

До сих пор мы предполагали, что контур сечения гладкий. Возникает вопрос, а что произойдет, если при своем обходе вокруг контура поперечного сечения нейтральная линия встретится с угловой точкой M (рис. 47) и начнет вокруг нее поворачиваться? По какой кривой при этом будет перемещаться полюс?

Ответ на этот вопрос необычайно прост. Рассмотрим уравнение (4). Если нейтральная линия поворачивается около некоторой неподвижной точки и соответственно $x = x_M, y = y_M$, то x_0 и y_0 следует рассматривать как переменные и, следовательно, полюс движется по некоторой прямой A (рис. 47). Справедливо и обратное положение — прямолинейному участку на контуре поперечного сечения соответствует угловая точка на границе ядра сечения. Это довольно очевидно. Встречаясь с прямолинейным участком, обкатываемая нейтральная линия стоит на месте, и единственному ее положению соответствует одна и та же точка на границе ядра сечения.

Рассмотрим прямоугольное сечение (рис. 48). Уравнение нейтральной линии для прямоугольника имеет вид:

$$\frac{x_0 x}{-b^2/12} + \frac{y_0 y}{-h^2/12} = 1.$$

Точке A с координатами $-b/2; h/2$ соответствует прямолинейный участок I контура ядра сечения. Его уравнение

$$\frac{x}{b/6} + \frac{y}{-h/6} = 1.$$

Аналогично достраиваются еще три прямые. Ядро сечения имеет таким образом форму ромба.

ЛЕКЦИИ 23—24

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ПРЯМОГО БРУСА

1. УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ

Мы достаточно много времени уделили определению напряжений, возникающих при чистом, поперечном и комом изгибе балки, но пока еще ничего не говорили о возникающих перемещениях и о той форме, которую прини-

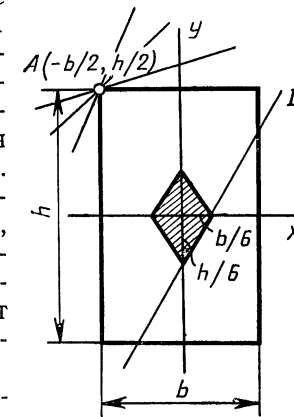


Рис. 48

мает ось балки при изгибе. Теперь этим вопросом мы и займемся.

Будем исходить из выражения, которое нами уже было выведено, но которым мы пока еще не пользовались. Вот оно:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}.$$

Кривизна балки, а точнее — изменение ее кривизны, пропорционально изгибающему моменту и обратно пропорционально жесткости балки на изгиб.

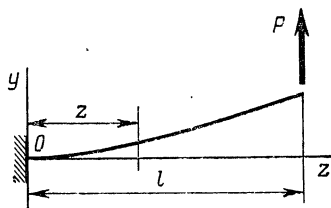


Рис. 49

Рассмотрим некоторую, произвольным образом закрепленную прямую балку. Заметим кстати, что при определении перемещений условия закрепления балки играют очень важную роль.

Но пока пусть это будет хотя бы балка, защемленная

одним концом (рис. 49). Свяжем ось изогнутой балки с некоторой неподвижной системой координат yz . Если эпюра изгибающих моментов нами построена, то закон изгибающего момента, а следовательно, и закон изменения кривизны вдоль оси балки нам известен. Пока будем считать, что жесткость балки на изгиб EI остается неизменной. В дальнейшем мы рассмотрим также и случай переменной жесткости.

Под действием внешних сил балка изогнется. Искривленную ось балки обычно называют упругой линией балки. Она характеризуется зависимостью y от z .

Нам хорошо известно выражение кривизны

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Здесь под y' понимается производная от y по z . Если балка представляет собой элемент некоторой жесткой конструкции, то ее прогибы невелики. Производная y' есть тангенс угла наклона упругой линии. Этот угол измеряется сотыми и даже тысячными долями радиана. Значит, эта величина мала и тем более мал квадрат ее по сравнению с единицей. Если этим слагаемым в знаменателе пренебречь, то мы получим

$$y'' = \frac{M}{EI}.$$

Слева — вторая производная от y по z , а справа — известная функция z . Все очень просто. Но обратите внимание на то, какая у нас получается цепочка дифференциальных зависимостей:

$$y' = \theta; \quad y'' = \frac{M}{EI}; \quad y''' = \frac{Q}{EI}; \quad y^{(IV)} = \frac{q}{EI}.$$

Первая производная от y — это тангенс угла наклона упругой линии или вследствие малости угла — сам угол. Он же — угол поворота поперечных сечений балки. Это закон изменения угловых перемещений. Вторая производная от y по z — есть момент, взятый в масштабе жесткости. Если продифференцировать это выражение еще раз по z , то при постоянной жесткости EI получим поперечную силу Q . И наконец, четвертая производная от y по z дает нам интенсивность распределенной нагрузки q в масштабе жесткости.

Эту цепочку дифференциальных зависимостей следует запомнить. Но, конечно, надо иметь в виду, что она остается верной только при постоянной жесткости. При переменной жесткости в эти выражения войдут также и производные от EI по z .

Теперь, рассматривая полученную последовательность производных, легко установить, какую форму приобретает упругая линия балки при различных способах нагружения. Например, при чистом изгибе поперечная сила равна нулю, а M есть величина постоянная. После двукратного интегрирования получаем для y алгебраическую функцию второй степени. Если балка нагружена сосредоточенными силами, поперечная сила в пролетах балки остается постоянной. Значит Q есть константа, и балка изгибается по кубической параболе. И наконец, если балка на каком-то участке нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , то, следовательно, на этом участке упругая линия балки описывается кривой четвертой степени.

Рассмотрим какой-либо простой пример. Обратимся хотя бы к консольной балке, показанной на рис. 49.

Здесь изгибающий момент $M = P(l - z)$, и поэтому $y = P(l - z)/EI$.

Теперь проинтегрируем это выражение по z .

$$y' = \frac{P}{EI} \left(lz - \frac{z^2}{2} \right) + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования.

Проинтегрируем это выражение вторично. В результате получим:

$$y = \frac{P}{EI} \left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + C_1 z + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 позволяют нам учесть условия закрепления балки. Они соответствуют перемещению

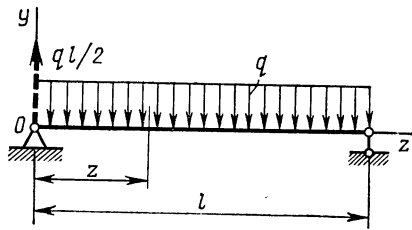


Рис. 50

балки как жесткого целого. Постоянная C_2 как бы смещает балку вверх или вниз, а постоянная C_1 дает возможность сообщить ей угловое перемещение относительно точки отсчета z .

В данном случае обе постоянные равны нулю. Действительно, при $z=0$ перемещение y должно равняться нулю. Это возможно только в том случае, если $C_2=0$. В начале координат также равен нулю угол поворота, т. е. y' . А это возможно только при $C_1=0$. Полагая $C_1=C_2=0$, получим уравнение упругой линии в следующем виде:

$$y = \frac{Pz^2}{2EI} \left(l - \frac{z}{3} \right).$$

Как и следовало ожидать, мы получили уравнение третьей степени. Наибольшее перемещение возникает, понятно, в точке приложения силы P . Поэтому, полагая $l=z$, получим

$$y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Это выражение прогиба для консольной балки полезно запомнить.

Рассмотрим еще пример.

Двухопорная балка (рис. 50) загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q .

Поместим начало координат на левой опоре и напишем дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$y'' = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right).$$

Справа в скобках написано выражение изгибающего момента. Первое слагаемое определяет момент реакции опоры $ql/2$, а второе — момент распределенной нагрузки q .

Приступим к интегрированию. После первого интегрирования получим:

$$y' = \frac{q}{2EI} \left(l \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + C_1 \right),$$

а после второго —

$$y = \frac{q}{2EI} \left(l \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} + C_1 z + C_2 \right).$$

При $z=0$ перемещение y равно нулю. Легко сообразить, что $C_2=0$. Что же касается постоянной C_1 , то она в нуль не обращается. Ее надо подобрать так, чтобы величина y обращалась бы в нуль при $z=l$. Это все равно что повернуть балку относительно левой опоры, пока она правым концом не ляжет на вторую опору. Полагаем $z=l$. Тогда

$$\frac{l^4}{6} - \frac{l^4}{12} + C_1 l = 0$$

и, следовательно, $C_1 = -l^3/12$.

Нам остается только переписать уравнение упругой линии в окончательном виде. Подставляя C_1 , получим:

$$y = \frac{q}{24EI} (2lz^3 - z^4 - l^3 z).$$

Упругая линия описывается алгебраической зависимостью четвертой степени. Наибольший прогиб будет, конечно, посередине пролета при $z=l/2$. В итоге

$$y_{\max} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$$

Знак минус показывает, что точка смещается в направлении, противоположном оси y .

Рассмотренные примеры выглядят очень просто. Но теперь рассмотрим нечто более сложное.

Балка (рис. 51) расположена на двух опорах, но нагрузка приложена так, что одним уравнением для моментов всю длину охватить не удастся. Балку следует рассматривать состоящей из трех участков с различными законами изменения изгибающих моментов. Соответственно каждому участку получим свой закон изменения кривизны. Интегрирование трех функций должно быть произведено отдельно для каждого участка. Это еще куда ни шло. Но в результате мы получим по две постоянных интегрирования для каждого участка. Всего —

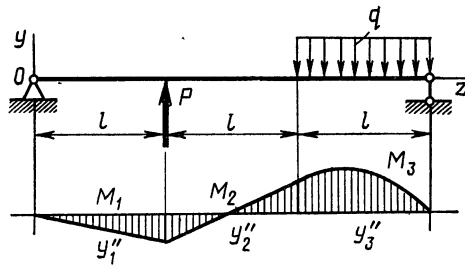


Рис. 51

шесть. И вот затем эти шесть констант должны быть выбраны таким образом, чтобы каждый участок без разрывов и без изломов сопрягался с соседними.

Условия для определения констант достаточно очевидны. Надо потребовать, чтобы на опорах перемещения были равны нулю. Это два условия. В точках сопряжения при $z=l$ и при $z=2l$ перемещения y , а также их производные по z для сопрягающихся участков были бы одинаковыми. Всего для определения шести констант получаем шесть условий. В принципе задача, конечно, решается, но она громоздка и неприятна. А если участков много, то и подавно ее решение становится сложным.

Мы пойдем другим путем, и мне хочется показать вам как решаются подобные задачи и как можно обеспечить автоматическое сопряжение участков, обходясь всего двумя константами. Этот упрощенный прием пригоден для балок постоянной жесткости и называется он способом выравнивания коэффициентов, а полученное с его помощью уравнение называется универсальным уравнением упругой линии балки.

2. УНИВЕРСАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ УПРУГОЙ ЛИНИИ БАЛКИ

Как правило, мы имеем дело всего с тремя типами обобщенных сил: сосредоточенный внешний момент, сосредоточенная сила и равномерно распределенная на некотором участке нагрузка интенсивности q . Каждой из обобщенных сил свойствен определенный вид эпюры изгибающих моментов.

Для балки, нагруженной сосредоточенным моментом M (рис. 52), который уравновешен силами, находящимися справа и не попавшими на этот рисунок, возникает постоянный изгибающий момент

$$M = M \quad (\text{при } z \geq z_M).$$

Здесь под z_M понимается координата точки приложения момента M , т. е. адрес точки приложения внешнего момента.

Если приложена сосредоточенная сила, опять же уравновешенная какими то силами (рис. 52), то эта сила создает в сечениях балки изгибающий момент, пропорциональный расстоянию от точки приложения силы. Поэтому здесь в некотором произвольном сечении изгибающий момент, вызванный силой, будет

$$M = P(z - z_P) \quad (\text{при } z \geq z_P).$$

И наконец, если приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности q , то она создает изгибающий момент, меняющийся по закону квадратичной параболы:

$$q \frac{(z - z_q)^2}{2},$$

где через z_q обозначена координата начала распределенной нагрузки.

Когда мы движемся слева направо, то таких внешних сил, моментов и распределенных нагрузок мы можем встретить несколько, и каждой из них будет соответство-

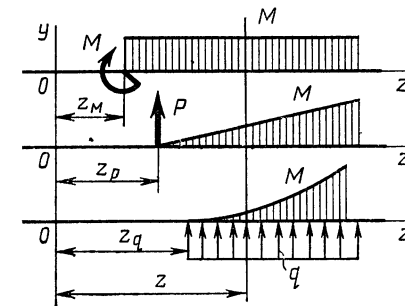


Рис. 52

вать свое слагаемое изгибающего момента. Из этих слагаемых по участкам можно, как из блоков, скомпоновать эпюру изгибающих моментов. При этом надо, конечно, придерживаться определенного правила знаков. Для всех внешних сил, показанных на рис. 52, выбрано такое направление, чтобы они в сечениях балки создавали положительные изгибающие моменты. Если составляющие моментов будут направлены в противоположную сторону, им очевидно будет приписан знак минус.

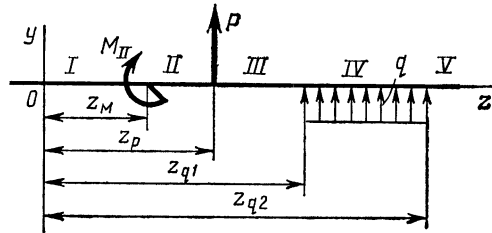


Рис. 53

Теперь посмотрим, как производится компоновка изгибающего момента, если в числе внешних сил представлены все три типа обобщенных сил.

На рис. 53 показана некоторая типовая балка, имеющая несколько участков. Приложена внешняя сила, внешний момент и распределенная нагрузка. Они могут располагаться в произвольном порядке. Здесь может быть и несколько сил и несколько моментов. На рисунке отмечены участки — первый, второй, третий, ...

Напишем выражение изгибающих моментов для всех этих участков в виде одной строки. Сперва напишем уравнение в общем виде

$$EIy'' = M,$$

а затем раскроем правую часть.

На первом участке изгибающий момент равен нулю. На втором — момент равен внешнему моменту M . На третьем участке к этому моменту добавится момент от силы P . На четвертом участке прибавим слагаемое от распределенной нагрузки q . При переходе к пятому участку мы должны учесть, что распределенная нагрузка окончилась. Но нам надо сохранить принцип последовательного суммирования. Поэтому будем считать, что рас-

пределенная нагрузка не закончилась, а продолжается, а в дополнение к ней появилась точно такая же распределенная нагрузка, той же интенсивности q , но другого знака. И тогда мы получим следующее выражение:

$$EIy'' = 0|_I + M|_{II} + P(z - z_P)|_{III} + q \frac{(z - z_{q1})^2}{2} \Big|_{IV} - q \frac{(z - z_{q2})^2}{2} \Big|_V. \quad (1)$$

Здесь под z_{q1} и z_{q2} понимаются координаты точек начала и конца распределенной нагрузки q .

Теперь нам остается разобраться, какие слагаемые написанной строки к каким участкам балки относятся.

На первом участке изгибающий момент равен нулю, и из всех слагаемых, входящих в строку (1), мы возьмем только первое, отмеченное вертикальной чертой с индексом I. На втором участке изгибающий момент остается неизменным и равным M . Поэтому для определения изгибающего момента будем брать слагаемые строки, стоящие слева от вертикальной черты с индексом II. Изгибающий момент на третьем участке складывается из моментов, создаваемых внешним моментом M и силой P . Следовательно, при вычислении изгибающего момента на третьем участке мы будем использовать все слагаемые, стоящие слева от вертикальной черты с индексом III. Таким образом мы получили одну-единственную строку, с помощью которой, подставляя значения z , можно определить изгибающий момент в любом сечении балки. Только прежде чем производить вычисления, надо определить номер участка, к которому относится сечение, и при вычислениях брать только те слагаемые в выражении строки, которые расположены левее черты с номером участка.

Теперь можно приступить к интегрированию полученного выражения и определить перемещения.

Произведем первое интегрирование выражения (1), не раскрывая скобок в правой части. В итоге получим:

$$EIy' = C_1|_I + M(z - z_M)|_{II} + P \frac{(z - z_P)^2}{2} \Big|_{III} + q \frac{(z - z_{q1})^3}{6} \Big|_{IV} - q \frac{(z - z_{q2})^3}{6} \Big|_V.$$

Здесь при интегрировании мы получаем произвольную постоянную C_1 . Кроме того, для единообразия написанных выражений, содержащих разность переменного z и координаты точки приложения силового фактора, мы в слагаемое от момента M ввели постоянную z_m . В этом нет ничего противозаконного. Пока постоянная C_1 нами не определена, мы можем вводить любые дополнительные постоянные.

Теперь нам следует убедиться в том, что при переходе от участка к участку угловое перемещение не терпит разрыва.

Угол поворота балки в масштабе жесткости в конце первого участка равен постоянной C_1 . Чтобы определить угол наклона упругой линии балки в начале второго участка, следует взять все слагаемые, лежащие слева от черты II и вместо z подставить координату начала второго участка. Но она как раз равна z_m . Слагаемое обращается в ноль и мы получаем равенство углов поворота на стыке первого и второго участков. То же самое будет и на стыке второго и третьего участков и на всех последующих точках сопряжения участков. Непрерывность упругой линии по угловым перемещениям таким образом обеспечена, и никаких дополнительных констант кроме C_1 вводить и не следует.

Угол поворота в начале координат обозначим через θ_0 . Начало координат принадлежит первому участку, и взяв первое слагаемое строки, получим

$$EI\theta_0 = C_1.$$

Теперь приступим ко второму интегрированию. Сначала введем постоянную интегрирования. Легко догадаться, что она представляет собой жесткость EI , умноженную на перемещение балки в начале координат y_0 . Затем идет интегрирование всех последующих слагаемых, написанных в предыдущей строке. В итоге

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 z \Big|_I + M \frac{(z - z_m)^2}{2} \Big|_{II} + P \frac{(z - z_p)^3}{6} \Big|_{III} + q \frac{(z - z_{q1})^4}{24} \Big|_{IV} - q \frac{(z - z_{q2})^4}{24} \Big|_V.$$

Нам необходимо убедиться в том, что при такой форме написания уравнения упругой линии соблюдается непрерывность не только в угловых, но и в линейных пере-

мещениях. И действительно, каждое слагаемое, отличающее уравнение одного участка от уравнения последующего, в точке перехода обращается в ноль.

Написанная строка называется универсальным уравнением упругой линии балки. И число участков, и число внешних сил может быть произвольным, но констант интегрирования всего две. Это линейное и угловое перемещение в начале координат, т. е. θ_0 и y_0 .

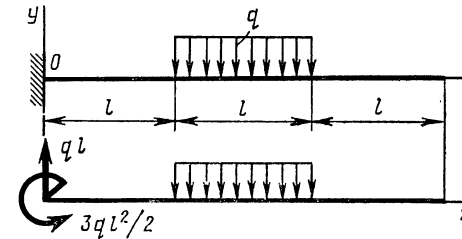


Рис. 54

Структура слагаемых очень простая и легко запоминающаяся. Внешний момент сообщает уравнению упругой линии квадратичное слагаемое, сила — кубическое, а распределенная нагрузка порождает четвертую степень координаты z . Из этих слагаемых и komponуется уравнение упругой линии не только в представленном обобщенном примере, но и во всех других подобных случаях.

Рассмотрим некоторые примеры. На рис. 54 показана консольная балка, нагруженная на одном участке равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Здесь три участка. Начало координат следует, конечно, разместить в заделке. Здесь и перемещение, и угол поворота равны нулю, и, следовательно, y_0 и θ_0 обращаются в ноль.

Прежде чем писать уравнение упругой линии, необходимо определить реакции опор. Вертикальная сила в заделке равна ql , а момент равен $3ql^2/2$ (рис. 54).

Теперь напишем уравнение упругой линии. Обе константы вследствие целесообразного выбора начала координат равны нулю. Для первого участка надо написать слагаемое силы и слагаемое момента. Они пишутся по установленным ранее правилам. Перед моментом $3ql^2/2$ взят, естественно, знак «минус», поскольку момент направлен в сторону, противоположную той, которая при-

нималась положительной при выводе строки. Для второго участка добавляется со знаком «минус» слагаемое распределенной нагрузки, а для третьего участка — такое же слагаемое, но обратного знака и с координатой $z_{q2} = 2l$. В итоге получаем:

$$EIy = ql \frac{z^3}{6} - \frac{3}{2} ql^2 \frac{z^2}{2} \Big|_I - q \frac{(z-l)^4}{24} \Big|_{II} + q \frac{(z-2l)^4}{24} \Big|_{III}.$$

Теперь мы можем определить прогиб в любой точке балки. Если, например, мы хотим найти прогиб в средней точке первого пролета, то должны в два первых слагаемых вместо z подставить $l/2$. Остальные слагаемые не учитываются.

Можно найти прогиб и на конце балки. Здесь $z=3l$, и точка принадлежит третьему участку. Поэтому надо учитывать все слагаемые написанной строки. Если проинтегрировать необходимые выкладки, то получим:

$$y_{\max} = -\frac{23}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

Обратите внимание на следующее обстоятельство. Изгибающий момент на третьем участке равен нулю. Участок балки остается прямолинейным. Следовательно, он получает перемещения как жесткое целое, а его упругая линия представляет собой прямую. Здесь же для третьего участка получается кривая четвертой степени. Пусть это вас не смущает. Если раскрыть скобки, то, конечно, мы получим прямую. Слагаемые со степенями выше первой взаимно уничтожаются. Универсальное уравнение в этом смысле обладает тем недостатком, что дает уравнение упругой линии с некоторой «нагрузкой» в виде взаимно уничтожающихся слагаемых.

Рассмотрим пример двухопорной балки, представленной на рис. 51. Она была показана вам как иллюстрация тех трудностей, которые возникают при составлении уравнения упругой линии балки, имеющей несколько участков.

Уравнение упругой линии этой балки мы с помощью универсальной строки напишем безо всякого труда.

Сначала необходимо определить реакцию левой опоры. Она равна $ql/5 - 2P/3$. Начало координат располо-

жим на левой опоре. Тогда строка универсального уравнения принимает вид:

$$EIy = EI\theta_0 z + \left(\frac{1}{5} ql - \frac{2}{3} P \right) \frac{z^3}{6} \Big|_I + P \frac{(z-l)^3}{6} \Big|_{II} - q \frac{(z-2l)^4}{24} \Big|_{III}.$$

Форма написания очевидна. В начале координат прогиб равен нулю. Поэтому константа y_0 в уравнение не входит. Но константа θ_0 остается. Реакция правой опоры в уравнении в явном виде не написана. Ее роль учтена заданной нагрузкой и вычисленной реакцией левой опоры.

Теперь остается определить константу $EI\theta_0$. Она должна быть выбрана так, чтобы прогиб на правой опоре был бы равен нулю. Правая опора принадлежит третьему участку. Поэтому при определении прогиба надо брать все элементы строки, т. е.

$$0 = EI\theta_0 3l + \left(\frac{1}{5} ql - \frac{2}{3} P \right) \frac{27l^3}{6} + P \frac{8l^3}{6} - q \frac{l^4}{24}.$$

Определяя константу $EI\theta_0$ и подставляя ее в предыдущее выражение, получаем уравнение упругой линии в следующем окончательном виде:

$$EIy = \left(\frac{5}{9} Pl^2 - \frac{103}{360} ql^3 \right) z + \left(\frac{1}{5} ql - \frac{2}{3} P \right) \frac{z^3}{6} \Big|_I + P \frac{(z-l)^3}{6} \Big|_{II} - q \frac{(z-2l)^4}{24} \Big|_{III}.$$

3. БАЛКИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Все то, что мы до сих пор говорили об упругой линии, относилось к балкам постоянной жесткости. Если жесткость переменная, то те упрощения, которые нам предоставляет универсальное уравнение, теряются, и следует переходить к прямому интегрированию более сложной функции

$$y'' = M/EI,$$

где не только момент, но и жесткость EI являются величинами переменными.

Прежде, пока не существовало электронно-цифровых машин, для решения подобных задач развивались графич-

ческие приемы. В старых учебниках по сопротивлению материалов можно и сейчас найти различные рекомендации по этому поводу. Сейчас графические приемы, и не только для определения формы упругой линии, но и вообще для решения подавляющего большинства инженерных задач, отошли в прошлое и повсеместно заменены численными методами.

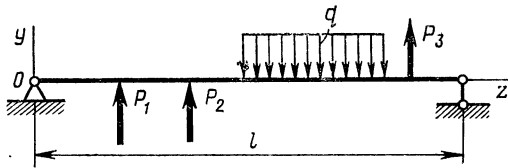


Рис. 55

Схема численного интегрирования при построении упругой линии предельно проста. Выражение для y'' можно рассматривать как элементарное дифференциальное уравнение второго порядка, которое разбивается на два уравнения первого порядка:

$$y' = \theta; \quad \theta' = \frac{M}{EI},$$

где θ — угловое перемещение.

Так как при решении не требуется высокой точности, при интегрировании можно обойтись и без стандартных программ интегрирования и перейти к элементарной конечно-разностной схеме:

$$\Delta y_i = \theta_i \Delta z; \quad \Delta \theta_i = \left(\frac{M}{EI} \right)_i \Delta z;$$

$$z_{i+1} = z_i + \Delta z; \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \Delta \theta_i; \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Положим, нам необходимо построить упругую линию для двухопорной балки, показанной на рис. 55 при условии, что жесткость балки переменная. Алгоритм вычисления можно построить хотя бы следующим образом.

Прежде всего в программу вводится подблок определения жесткости и изгибающего момента в зависимости от переменного z , которое отсчитывается хотя бы от левой опоры. С помощью этого подблока по заданному z определяется отношение M/EI .

Длина балки разбивается на две-три сотни участков длиной Δz , а затем по шагам с помощью написанных выше выражений ведется вычисление величин Δy_i и $\Delta \theta_i$. Полученные Δy_i и $\Delta \theta_i$ суммируются с предыдущими значениями функций y_i и θ_i и тем самым определяются их значения на следующем шаге.

В начальной точке интегрирования, т. е. на левой опоре, $y_0 = 0$. Это мы знаем. Но угол поворота θ_0 на левой опоре нам неизвестен. Он должен быть выбран таким, чтобы на правой опоре перемещение оказалось бы равным нулю. Однако прогиб на правой опоре может быть определен, если проведено интегрирование, а его нельзя провести, пока остается неизвестным угол θ_0 .

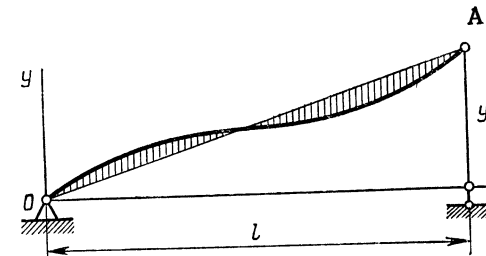


Рис. 56

Такого рода затруднения характерны вообще для всех так называемых краевых задач, где граничные условия задаются как в начале, так и в конце интервала интегрирования.

О том, какие способы существуют для преодоления такого препятствия, мы здесь говорить не будем. Таких способов много, но это тема особая. А в данном случае можно поступить довольно просто. Следует сразу задать каким-либо определенным, любым значением θ_0 , например $\theta_0 = 0,01$. После этого интегрирование легко выполняется, и мы получаем какую-то кривую для функции y , например, такую, как показано на рис. 56. На правой опоре, конечно, прогиб не равен нулю: ведь нами допущен произвол...

Но теперь можно повернуть балку как жесткое целое относительно левой опоры, пока она правым концом не ляжет на вторую опору. Выполняется это понятно, не графически, а численно.

Полученное в конце интервала значение функции y_l

делим на длину балки. В результате получаем угол наклона прямой OA . Если это отношение умножить на текущее значение z , мы найдем перемещение, которое получит текущая точка в результате поворота балки относительно левой опоры. Вычтем его из произвольно найденной функции z . Полученная разность и представляет собой искомое перемещение в текущей точке. Эпюра перемещений на рис. 56 заштрихована. Полученный массив чисел по условиям программы выводится затем на печать.

Закон изменения угла θ вдоль оси балки определяется тем же способом. В памяти машины хранится текущее значение θ , найденное при произвольно взятом θ_0 , а затем из всех записанных чисел вычитается одна и та же величина y/l .

На тему о том, как можно получить упругую линию балки путем численного интегрирования в других более сложных случаях, можно было бы говорить много и долго. Но дело в том, что это не очень нужно. Определение формы упругой линии балки имеет скорее познавательное, чем практическое значение. В практических расчетах нас интересует обычно не форма упругой линии в целом, а перемещения в некоторых определенных точках, что требуется в первую очередь при решении задач, связанных с раскрытием статической неопределимости. А для того чтобы найти перемещение в одной заданной точке, вовсе не обязательно определять форму всей изогнутой балки. Можно предложить для этого куда более простые способы. И с ними вы познакомитесь в последующих лекциях.

Определение формы упругой линии имеет, пожалуй, наибольшее значение при решении задач динамики. С помощью форм упругой линии балки при свободных колебаниях может быть выявлено ее поведение при воздействии ударных нагрузок. Динамика движения летательных аппаратов в некоторых случаях также требует определения формы упругой линии несущих плоскостей. Такого рода задачи по определению формы упругой линии решаются, понятно, только численными методами. Но все это относится к задачам динамики. Что же касается условий статического нагружения, то найти примеры необходимого для практических целей определения формы упругой линии балки, скажу прямо, очень трудно. И сейчас мы перейдем к новому вопросу, связанному с упругой линией балки.

4. БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ

Мы начали лекцию с утверждения, что у конструктивных элементов, обладающих высокой жесткостью, изгибные перемещения малы. И это, конечно, так! Но имеются случаи исключительные. Это гибкие ленты, плоские пружины и вообще многие упругие элементы, в первую очередь элементы приборостроения. Тонкая металлическая лента или тонкая проволока могут принимать самые причудливые формы, а после снятия нагрузки все ее размеры полностью восстанавливаются.

Это свойство тонких, часто говорят — гибких, стержней зависит прежде всего от сравнительных размеров высоты сечения и длины линейки. Чем тоньше линейка, тем большую кривизну ей можно сообщить в пределах упругих деформаций. Вспомните соотношение для деформации слоя, находящегося на расстоянии y от центральной оси:

$$\varepsilon = y/\rho.$$

Здесь ρ — радиус кривизны изогнутого стержня. Если линейка имеет прямоугольное сечение высотой h , то максимальное удлинение, а вместе с ним и максимальное напряжение, будет:

$$\varepsilon = h/2\rho; \quad \sigma = Eh/2\rho.$$

Здесь вместо y подставлена величина $h/2$ (рис. 57). Величина напряжения ограничивается пределом упругости, и отсюда видно: чем меньше толщина линейки, тем большую кривизну ей можно задать при неизменном напряжении. Следовательно, при малой толщине стержня возможно большое изменение кривизны и соответственно могут возникать и большие перемещения при сохранении упругих свойств материала. Но величина перемещений определяется не только изменением кривизны, а зависит также и от длины стержня.

Представим себе самый простой случай. Защемленный одним концом стержень

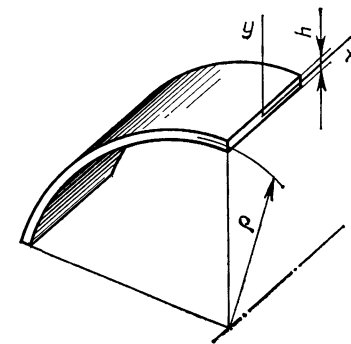


Рис. 57

нагружен на другом моментом (рис. 58). До нагружения стержень был прямым. Во всех сечениях изгибающий момент остается постоянным и равным внешнему моменту M . Кривизна стержня определяется, как мы знаем, следующим выражением:

$$1/\rho = M/EI.$$

Так как жесткость и момент по длине не меняются, кривизна постоянна. Значит, стержень изгибается по дуге окружности, а перемещения в пределах упругих деформаций могут оказаться очень большими.

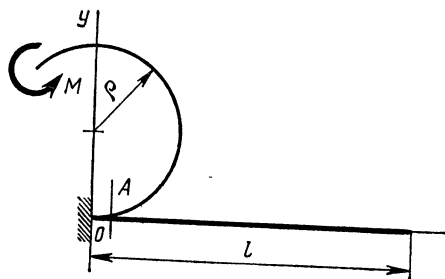


Рис. 58

Они не только соизмеримы с длиной стержня, но в некоторых точках даже превышают ее, хотя бы в точке приложения момента.

В пределах упругих деформаций окружность можно даже замкнуть. Если длину линейки разделить на 2π , найдем радиус ρ замкнутой окружности, а затем и возникающий в сечениях момент, соответствующий этому преобразованию прямой линейки в кольцо. Легко найти и возникающие напряжения.

Кривизна, которую мы можем сообщить стержню без риска потери упругих свойств, не зависит от длины стержня. Поэтому, если бы стержень был коротким, перемещения не были бы большими. Представим себе, например, что стержень, изображенный на рис. 58, отрезан в сечении A . Тогда при той же кривизне и том же моменте мы могли бы рассматривать перемещения как малые и могли бы пользоваться всеми упрощенными соотношениями, которые были рассмотрены ранее.

Кстати, мы уже знаем, что при малых перемещениях брус в условиях чистого изгиба принимает форму параболы. А теперь утверждаем, что это окружность... Противоречие совершенно естественное. Разумно рассматривая перемещения как малые, мы в свое время пренебрегли слагаемым y'^2 в знаменателе выражения кривизны:

$$1/\rho = y''/(1 + y'^2)^{3/2}.$$

Следовательно, в области малых перемещений мы и получаем параболу, весьма близкую к окружности.

Теория, описывающая поведение стержней в области больших перемещений, называется теорией гибких стержней. Начало ее развитию было положено в XVIII в. Леонардом Эйлером. Он ставил и решал первые задачи, связанные с определением формы стержня, находящегося под действием сосредоточенных сил и моментов. Формы, которые получает при этом упругий стержень, стали с тех пор называться эластिकाми Эйлера. О работах Эйлера мы поговорим позже, когда будем заниматься вопросами устойчивости форм равновесия стержней. А сейчас остановимся вкратце на основных особенностях поведения гибких стержней.

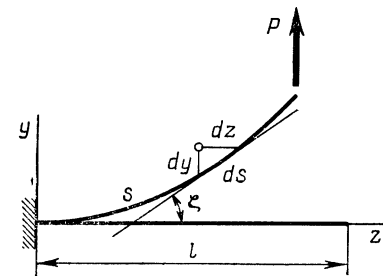


Рис. 59

Рассмотрим заземленный стержень (рис. 59). С него мы и начали разговор об упругой линии, а в выражении кривизны ранее пренебрегли величиной y'^2 за ее малостью. Теперь, рассматривая поведение стержня в области больших перемещений, мы такого упрощения уже сделать не можем. Но это не все. При малых перемещениях мы имели возможность считать изгибающий момент в каждом сечении независимым от прогибов балки. Теперь же, как это видно из рис. 59, изгибающий момент меняется в зависимости от того, сколь заметно изменилась форма упругой линии, и задача, таким образом, становится явно нелинейной. При ее решении мы уже не можем придерживаться принципа начальных размеров и принципа независимости действия сил.

При определении формы упругой линии за независимое переменное удобно принять длину дуги стержня s . Она остается постоянной. Ее растяжением или сжатием с полным основанием можно пренебречь. Обозначим через ζ угол наклона упругой линии к оси z (рис. 59). Кривизна стержня в каждой точке определяется производной

$d\zeta/ds$, и мы можем написать:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{P}{EI} (z_l - z), \quad (2)$$

где под z_l понимается абсцисса точки приложения силы P .

Это соотношение написано для вертикально направленной силы P . Но оно легко обобщается и на случай любого направления силы. Для этого ось y ориентируется по силе, а уж затем, если это будет необходимо, угловым преобразованием координат можно перейти к любой другой системе осей.

В дополнение к написанному следует иметь в виду, что

$$dz = ds \cos \zeta; \quad dy = ds \sin \zeta.$$

Чтобы освободиться от переменного z , продифференцируем выражение (2):

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\frac{P}{EI} \cos \zeta. \quad (3)$$

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка, в которое независимое переменное s в явном виде не входит. Это позволяет снизить порядок уравнения. Умножим левую часть на $d\zeta/ds \cdot ds$, а правую на $d\zeta$:

$$\frac{d\zeta}{ds} \cdot \frac{d^2\zeta}{ds^2} ds = -\frac{P}{EI} \cos \zeta \cdot d\zeta,$$

и после интегрирования получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^2 = \frac{P}{EI} (C - \sin \zeta),$$

где C — постоянная интегрирования.

Полученное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d\zeta}{ds} = \sqrt{\frac{2P}{EI}} \sqrt{C - \sin \zeta}.$$

Чтобы его проинтегрировать, необходимо применить далеко не очевидную подстановку. Вот она:

$$C = 2k^2 - 1; \quad \sin \zeta = 2k^2 \sin^2 \psi - 1, \quad (4)$$

где ψ — новая функция, а k — новая константа.

И вот теперь, если мы исключим C и $\sin \zeta$, то получим

$$\frac{d\zeta}{ds} = 2k \sqrt{\frac{P}{EI}} \cos \psi. \quad (5)$$

Остается отсюда исключить $d\zeta$. Для этого дифференцируем выражение (4), т. е.

$$d\zeta = \frac{2k \cos \psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

и величина $d\zeta$ из уравнения (5) исключается. В итоге получаем:

$$s = \sqrt{\frac{EI}{P}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (6)$$

Нижний предел интегрирования ψ_0 соответствует, очевидно, точке начала отсчета дуги s . Что же касается самого интеграла, то он в элементарных функциях не берется. Он относится к классу так называемых эллиптических интегралов. Это эллиптический интеграл первого рода. Наряду с ним часто встречается и интеграл второго рода:

$$E(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi.$$

К эллиптическим интегралам сводится решение многих задач механики и математики. В частности, задача о колебаниях маятника с большой (не малой, а большой) амплитудой решается с помощью эллиптического интеграла первого рода. Определение длины дуги эллипса сводится к эллиптическому интегралу второго рода. Отсюда, кстати, и название — эллиптические. Вследствие широкого распространения эллиптические интегралы табулированы. Величина эллиптического интеграла задается в функции верхнего предела, нижний предполагается равным нулю. Таблицы эллиптических интегралов сложнее таблиц тригонометрических функций. Их значение зависит еще и от параметра k , который называется модулем эллиптического интеграла. Таблицы составляются для различных значений k .

Таким образом, чтобы довести решение нашей задачи до конца, необходимо обратиться к таблицам эллиптических интегралов. Но этого мало. В полученных нами вы-

ражениях остались пока не определенными две величины. Это параметр k и значение ψ_0 . Они должны быть определены из граничных условий.

Заметим прежде всего, что в заделке $\zeta=0$. Следовательно, из выражения (5) вытекает очевидная зависимость между k и ψ_0 :

$$k \sin \psi_0 = \sqrt{2}/2. \quad (7)$$

Затем мы замечаем, что на конце стержня изгибающий момент, а следовательно, и кривизна $d\zeta/ds$ равны нулю. Значит, при $s=l$ величина $\psi_l = \pi/2$. Теперь обратимся к выражению (6). Здесь при $s=l$ получим: слева — единица, а справа — интеграл, который разбивается на два с нулевым нижним пределом:

$$1 = \sqrt{\frac{EI}{Pl^2}} \left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \psi_0) \right]. \quad (8)$$

Здесь под $F(k, \psi_0)$ понимается эллиптический интеграл первого рода. Теперь систему двух трансцендентных уравнений (7) и (8) надо решить совместно и найти k и ψ_0 . Безразмерную силу Pl^2/EI считаем заданной. Сначала задаемся величиной ψ_0 и из (7) находим соответствующее ей значение k . По k и ψ_0 с помощью таблиц эллиптических интегралов вычисляем правую часть уравнения (8). Затем задаемся новым значением ψ_0 , находим k и добиваемся того, чтобы было удовлетворено уравнение (8). Эта операция длительная и, конечно, не из приятных. Но когда k и ψ_0 определены, можно обратиться к дифференциальным зависимостям для координат z и y , проинтегрировать их и определить форму упругой линии. Замечу, что здесь появятся и эллиптические интегралы второго рода.

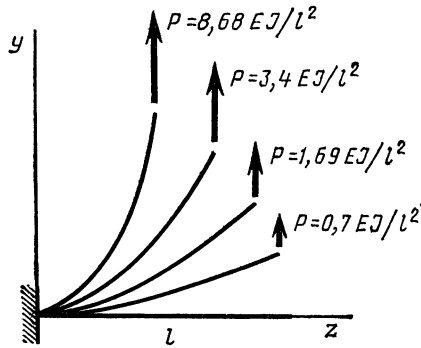


Рис. 60

На рис. 60 показано, как выглядит упругая линия гибкого стержня при различных значениях силы. По мере увеличения силы прогибы, естественно, растут,

и в пределе стержень вытягивается по вертикали, а полученное решение остается верным, пока напряжение в заделке не превзойдет предела пропорциональности.

Решение задач о форме тонкого гибкого стержня относится к числу весьма трудоемких и кропотливых. На современном уровне развития численных методов такие задачи удобнее и быстрее решать с помощью машины. Надо непосредственно интегрировать дифференциальное уравнение второго порядка (3), и необходимость в табулированных функциях отпадает. Но вот на что следует обратить особое внимание — на неоднозначность форм равновесия. Если задача решается на машине, то программа должна составляться с учетом этого обстоятельства. Существование нескольких соседствующих форм равновесия всегда чревато неприятностями. Машина теряет, не знает, что ей надо делать, и процедура счета становится расходящейся.

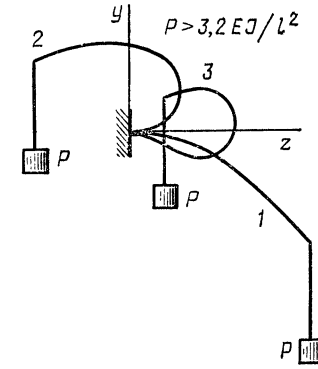


Рис. 61

Конечно, совершенно непонятно, какие же новые формы равновесия могут появиться, хотя бы в примере, показанном на рис. 60. Казалось бы, все просто. Каждой силе соответствует только одна форма равновесия. Однако это не так. По мере увеличения силы возникают новые и новые формы равновесия. В частности, на рис. 61 показаны две новые формы, возникающие в дополнение к обычной при $P > 3,2EI/l^2$. Форма равновесия 2 устойчива, 3 — неустойчива. По мере возрастания силы число форм равновесия увеличивается.

Не следует удивляться и думать о том, как мог стержень из положения 1 перейти в положение 2. Этого нет. Те уравнения, которые мы с вами выводили, вытекают из условий равновесия и в них совершенно не отражается история нагружения. Это только мы с вами почему-то решили, что сила постепенно возрастает от нуля. Уравнения этого «не знают». Они просто дают нам совокупность форм равновесия для заданной силы, а каким путем к этому равновесию мы пришли, им нет дела.

За два века существования теории гибких стержней накопилось необозримое множество решенных задач подобного рода. Во всех случаях, когда нагружение производится сосредоточенными силами и моментами, когда жесткость и начальная кривизна постоянны, задача о равновесии гибкого стержня решается с помощью эллиптических интегралов.

ЛЕКЦИИ 25—26

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ОСНОВНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

В этой лекции мы рассмотрим энергетические подходы, которые используются в сопротивлении материалов, и докажем некоторые важные и полезные теоремы, связанные с понятием энергии деформированного тела.

Внешние силы, деформируя тело, совершают работу. Эта работа переходит в потенциальную энергию деформации. Если тело деформируется упруго, то эта энергия после снятия внешних сил полностью восстанавливается и может быть, в свою очередь, превращена в работу. Упругое тело, таким образом, может рассматриваться как аккумулятор энергии. Это свойство упругих тел широко используется в практике. Даже заводя ежедневно свои наручные часы, вы совершаете работу. Эта работа невелика и для вас необременительна, но энергии заведенной пружины достаточно для исправной работы часов на ближайшие сутки. И таких примеров аккумуляирования энергии деформации можно привести очень много.

Однако прежде чем изучать свойства энергии упругого тела, прежде чем доказывать соответствующие теоремы, нам необходимо научиться вычислять энергию деформации бруса при различных видах нагружения. Кое-что мы с вами уже знаем. Мы вычисляли энергию растянутого стержня. Мы определяли энергию бруса при кручении. Настала пора рассмотреть этот вопрос с более общих позиций.

Рассмотрим брус произвольного очертания, нагруженный некоторой системой сил (рис. 62). В таком брус в поперечных сечениях возникают, вообще говоря, изгибающие и крутящий моменты, нормальная и поперечные силы. Всего шесть силовых факторов. Мысленно выделим

из бруса элементарный участок длиной dz (рис. 62) и в проведенных сечениях приложим внутренние силы и моменты. Далее мы будем рассуждать следующим образом.

После того как элемент выделен из бруса, внутренние силы, действующие в брус, стали для этого элемента внешними. Под их действием элемент деформируется.

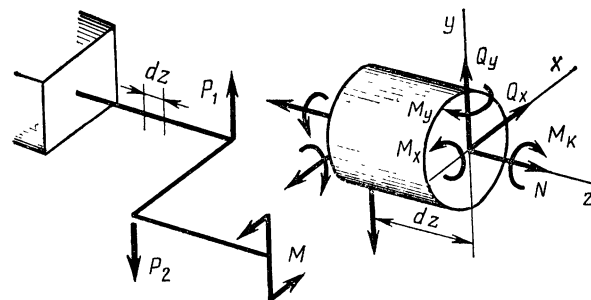


Рис. 62

Правое сечение смещается относительно левого — возникают взаимные линейные и угловые перемещения, и все силы совершают работу, которая переходит в потенциальную энергию. Таким образом, потенциальная энергия, накопленная в элементарном участке бруса, определяется суммой работ шести силовых факторов:

$$dU = dU(M_x) + dU(M_y) + dU(M_z) + dU(N) + dU(Q_x) + dU(Q_y). \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое — работа, произведенная моментом M_x , второе — работа момента M_y и т. д. Если работа для элементарного участка найдена, то затем ее надо будет проинтегрировать по длине бруса, чтобы найти энергию, накопленную во всем брус.

Казалось бы, все ясно. Но необходимо иметь в виду, что энергия есть квадратичная функция сил, и работу, произведенную несколькими силами, разделить на сумму независимых работ можно только при определенных условиях. Необходимо, чтобы каждый из силовых факторов вызывал бы такие перемещения, на которых только он один и совершал бы работу, а остальные силовые факторы на этом перемещении работ не совершали. Поясним это примерами.

Положим, что оси x и y не главные. Тогда под действием момента M_x изменение кривизны бруса произойдет не только в плоскости yz , но и в плоскости xz . А это означает, что момент M_x вызовет угловое перемещение, на котором момент M_y также совершит работу. В свою очередь, момент M_y вызовет такие угловые перемещения, на которых совершит работу момент M_x . В этом случае работа двух моментов не может быть представлена как сумма двух независимых работ. Значит, для того чтобы работы моментов M_x и M_y были бы независимыми, независимыми должны быть и угловые перемещения относительно осей x и y , а это возможно только в том случае, если оси x и y главные.

Можно взять, например, спиральное сверло — так называемый естественно закрученный стержень. При растяжении его торцы поворачиваются, как будто стержень закручивают. Значит, для естественно закрученного стержня работа осевой силы и работа крутящего момента на независимые слагаемые не разделяются. И таких примеров можно привести довольно много. Но мы их рассматривать не будем и предположим, что условия разделения работ на независимые слагаемые у нас соблюдаются.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ БРУСА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ НАГРУЖЕНИЯ

Займемся поочередным определением шести слагаемых выражения энергии.

Определим работу момента M_x . Условно считая одно из сечений элемента dz (см. рис. 62) неподвижным, мы можем написать работу момента M_x в виде $M_x d\varphi_x/2$, где $d\varphi_x$ есть угол поворота правого сечения относительно оси x при условно неподвижном левом сечении. И нелишне напомнить, что произведение $M_x d\varphi_x$ делится на 2 в связи с тем, что момент M_x на угловом перемещении $d\varphi_x$ не остается постоянным, а возрастает пропорционально перемещению.

Угол $d\varphi_x$ выражается через изменение кривизны, а оно — через момент M_x :

$$d\varphi_x = \frac{dz}{\rho} = \frac{M_x dz}{EI_x}.$$

Исключая $d\varphi_x$, получим:

$$dU(M_x) = \frac{M_x^2 dz}{2EI_x},$$

и далее по аналогии напишем:

$$dU(M_y) = \frac{M_y^2 dz}{2EI_y}; \quad dU(M_k) = \frac{M_k^2 dz}{2GI_k},$$

где GI_k — жесткость на кручение.

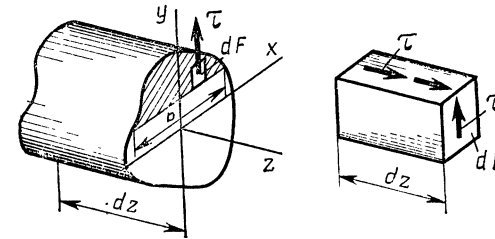


Рис. 63

Нормальная сила N вызывает удлинение отрезка dz на Δdz . Работа будет $N\Delta dz/2$. Воспользовавшись законом Гука, получим:

$$dU(N) = \frac{N^2 dz}{2EF}.$$

Пока все очень просто. Но теперь при определении работы поперечных сил возникает непредвиденное затруднение. Оно связано с тем, что характерное перемещение, на котором эти силы совершают работу, нами до сих пор не определялось. Ясно, что специфическое перемещение сдвига пропорционально соответствующей поперечной силе, но чему оно равно, мы не знаем. Поэтому мы предпримем несложный обходной маневр.

В пределах рассматриваемой площади сечения F выделим элементарную площадку dF (рис. 63), а сам элемент разобьем на множество более мелких призм. На площадке dF возникает касательное напряжение τ . В продольной площадке — парное ему. Результирующая сила касательных напряжений τ в площадках dF представляет собой поперечную силу Q_y .

При деформации элементарной призмы касательная сила совершает работу на перемещении γdz . Это есть

энергия, накопленная в элементарной призме. Выражение этой энергии можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \tau dF \gamma dz = \frac{\tau^2}{2G} dF dz.$$

Проинтегрировав это выражение по площади сечения F , мы получим искомую работу поперечной силы Q_y для элемента длиной dz :

$$dU(Q_y) = \frac{dz}{2G} \int_F \tau^2 dF.$$

Теперь это выражение остается преобразовать и привести к удобному для последующих операций виду. Вспомним, что касательное напряжение при поперечном изгибе определяется формулой Журавского

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}.$$

Здесь $S_x^{\text{отс}}$ — статический момент отсеченной части сечения относительно оси x , а b — ширина сечения.

При интегрировании по площади сечения за знак интеграла выносятся все величины, кроме $S_x^{\text{отс}}$ и b , и в итоге

$$dU(Q_y) = \frac{Q_y^2 dz}{2GI_x^2} \int_F \frac{(S_x^{\text{отс}})^2}{b^2} dF.$$

С тем чтобы сделать это выражение похожим на четыре предыдущих слагаемых энергии, мы преобразуем его к виду:

$$dU(Q_y) = \frac{Q_y^2 dz}{2GF} \cdot \frac{F}{I_x^2} \int_F \frac{(S_x^{\text{отс}})^2}{b^2} dF.$$

Теперь первый множитель правой части по своей структуре полностью повторяет то, что мы получили для других силовых факторов, а дополнительный множитель

$$k_y = \frac{F}{I_x^2} \int_F \frac{(S_x^{\text{отс}})^2}{b^2} dF$$

представляет собой некоторый безразмерный коэффициент, зависящий исключительно от геометрической формы

сечения. Этот коэффициент мы обозначим буквой k_y . Вычислять его мы не будем. Скажу только, что сделать это для сечения заданной формы всегда можно. В частности, для прямоугольного сечения этот коэффициент равен $6/5$, для сплошного круглого сечения — $10/9$, а для тонкостенного замкнутого кругового сечения величина $k_y = 2$.

Таким образом, в итоге для работы поперечных сил Q_y и Q_x мы получаем:

$$dU(Q_y) = \frac{k_y Q_y^2 dz}{2GF}; \quad dU(Q_x) = \frac{k_x Q_x^2 dz}{2GF}.$$

Итак, все слагаемые в выражении (1) нами найдены. Интегрируя по длине, получаем выражение энергии для всей балки:

$$U = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_l \frac{M_k^2 dz}{2GI_k} + \int_l \frac{N^2 dz}{2EF} + \int_l \frac{k_x Q_x^2 dz}{2GF} + \int_l \frac{k_y Q_y^2 dz}{2GF}. \quad (2)$$

Следовательно, в каждом конкретном случае, если нам нужно найти энергию, мы предварительно должны найти законы изменения внутренних силовых факторов вдоль оси бруса, а затем надо произвести интегрирование выведенных только что выражений.

Надо, однако, сразу же сказать, что не все слагаемые этого длинного выражения равноценны. Вследствие большой жесткости стержня на сдвиг и на растяжение три последних слагаемых оказываются, как правило, существенно меньше трех первых. Конечно, из этого правила возможны исключения. Может вообще получиться, что три первых слагаемых равны нулю, например для ферменной конструкции, где стержневые элементы работают только на растяжение и сжатие. Тогда в выражении энергии самостоятельное значение приобретает один интеграл — четвертый.

Такие случаи легко распознаются по характеру деформации системы, и относительную оценку роли слагаемых в выражении (2) произвести удастся без особого труда.

Рассмотрим пример определения энергии для балки. Изгибающий момент консольной балки (рис. 64) на

расстоянии z от конца будет Pz . Поперечная сила по длине балки не меняется и равна силе P . Энергией сдвига по сравнению с энергией изгиба пренебрегаем. Таким образом, из шести слагаемых выражения (2) сохраняется только первое, и тогда

$$U = \frac{P^2}{2EI_x} \int_0^l z^2 dz = \frac{P^2 l^3}{6EI_x}. \quad (3)$$

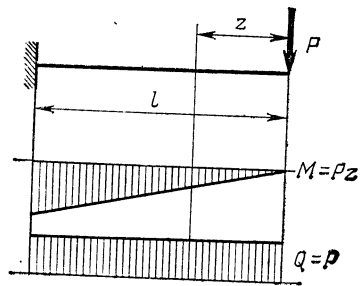


Рис. 64

Рассмотрим еще пример. (Эти примеры пригодятся нам в дальнейшем.)

Ферма состоит из ряда секций (рис. 65). Стержни имеют одинаковую жесткость на растяжение. Длины стержней — l , а подкосов соответственно — $l\sqrt{2}$. На краю фермы нагружена двумя равными, противоположно направленными силами. Требуется определить потенциальную энергию деформации.

ции.

Все стержни работают только на растяжение и сжатие. Следовательно, в выражении энергии пять интегралов обращаются в нуль и остается только один, содержащий нормальные силы N . Для определения энергии нам необходимо предварительно определить усилия в каждой стержне. Отсечем от фермы крайнюю секцию, а в произ-

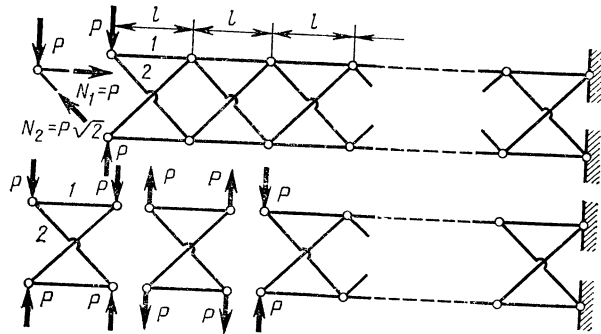


Рис. 65

веденных сечениях приложим неизвестные силы взаимодействия между секциями. Горизонтальные силы здесь обращаются в нуль — им нечем уравновеситься. Вертикальные же силы, как нетрудно сообразить, равны P . На остающуюся часть фермы действуют также силы P , но обратного знака. Если мы отделим еще одну секцию, знак сил снова изменится на обратный, и мы вернемся к той же самой картине нагружения, что была вначале, только число секций уменьшится на две единицы. Различие будет только в чередовании знаков внешних, а соответственно и внутренних сил. Но эти знаки как раз и не будут нас интересовать, поскольку нормальные силы входят под знак интеграла в квадрате.

Рассмотрим первую секцию. Отделяя узел, мы вводим силы N_1 и N_2 . Из условий равновесия легко установить, что

$$N_1 = P; \quad N_2 = P\sqrt{2}.$$

Так как нормальные силы N по длине стержней остаются неизменными, то взамен каждого интеграла мы получим выражение:

$$\frac{N_1^2 l}{2EF} + \frac{N_2^2 l \sqrt{2}}{2EF} = \frac{P^2 l}{2EF} + \frac{2P^2 l \sqrt{2}}{2EF}.$$

Первое слагаемое написано для стержня 1 (рис. 65), а второе — для стержня 2. В каждой секции две таких пары стержней, а самих секций n . Значит, умножая написанную сумму на $2n$, мы и получим искомую энергию деформации фермы:

$$U = n \frac{P^2 l}{EF} (1 + 2\sqrt{2}). \quad (4)$$

3. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В сопротивлении материалов и в механике вообще для решения многих задач бывает удобно рассматривать не отдельные силы, а совокупность сил, некоторые их комбинации, определяемые одним числом. Такие комбинации или группы сил называются обобщенными силами. Множитель, стоящий при обобщенной силе в выражении работы, называют обобщенным перемещением. Сейчас эту терминологию мы поясним примерами.

Пара сил (рис. 66) — простейшая группа сил, которая характеризуется одним параметром — моментом. Значит,

момент — обобщенная сила. Если плечо a пары сил невелико, мы обычно изображаем пару в виде момента M .

Сообщим точкам A и B малые перемещения u_A и u_B . Работа сил P будет $Pu_B - Pu_A$ или же

$$P(u_A - u_B) = Pa \frac{u_A - u_B}{a} = M\varphi,$$

где φ — угол поворота пары сил.

Мы получили таким образом выражение работы для обобщенной силы. В этом выражении работы коэффициент при обобщенной силе является угловое перемещение точки приложения момента. Значит, φ — обобщенное перемещение. Понятно, что речь идет об угловом перемещении в плоскости действия момента.

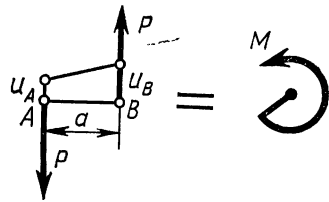


Рис. 66

Все это, конечно, хорошо известно. Мы уже определяли работу момента таким образом. Примеры подобного рода представлены на рис. 67. В первом примере работа момента выражается произведением $M\varphi/2$. Коэффициент $1/2$ вас не должен смущать. Он отражает только линейное возрастание момента на угловом перемещении. При нелинейном законе изменения момента здесь был бы другой коэффициент, а при постоянном моменте, в частности, была бы единица.

На рис. 67, б показано действие двух равных противоположно направленных сил. Обе они вместе — это тоже обобщенная сила. Ее работа определяется произведением силы P на изменение расстояния между точками приложения сил. Следовательно, обобщенным перемещением для такой обобщенной силы является взаимное перемещение точек приложения сил.

Равномерно распределенная нагрузка q (рис. 67, в) есть обобщенная сила. При вычислении работы мы умножаем среднюю элементарную силу $qdz/2$ на местное перемещение u , а затем производим интегрирование работ всех элементарных сил по длине бруса и в итоге получаем

$$\frac{1}{2} q \int u dz = \frac{1}{2} q\Omega,$$

где Ω — представляет собой площадь, ометаемую балкой при ее изгибе. Эта площадь и представляет собой обобщенное перемещение для обобщенной силы q .

Всестороннее давление, действующее на тело (рис. 67, г), тоже обобщенная сила. Вы сами можете доказать, что обобщенным перемещением для давления p будет изменение объема тела ΔV .

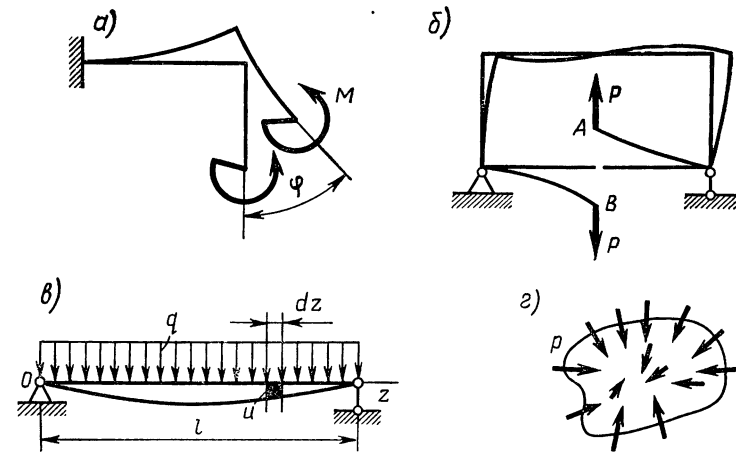


Рис. 67

Обычная сила тоже может рассматриваться как обобщенная. Для нее обобщенным перемещением является проекция полного перемещения точки приложения силы на направление этой силы.

Теперь воспользуемся понятием обобщенных сил и обобщенных перемещений при выводе некоторых теорем.

4. ТЕОРЕМА КАСТИЛИАНО

Имя Кастилиано не относится к числу очень известных. Кастилиано был талантливым инженером из Турина в Италии, жившим во второй половине прошлого века. Свою теорему он сформулировал в дипломной работе, еще будучи студентом. Кастилиано скончался в возрасте 37 лет, который для ученого считается периодом наибольшего развития творческих сил.

Теорема Кастилиано читается следующим образом:

Производная от потенциальной энергии по обобщенной силе есть обобщенное перемещение для этой силы.

Доказывается теорема просто, без громоздких выкладок. Требуется только внимание.

Рассмотрим тело (рис. 68), нагруженное системой сил. Обозначим через U энергию деформированного тела.

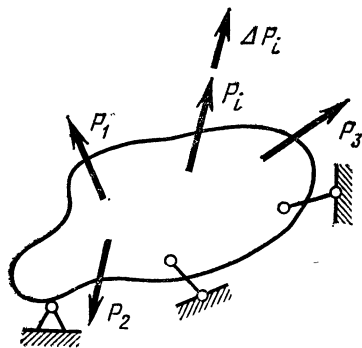


Рис. 68

Сообщим одной из обобщенных сил P_i некоторое приращение ΔP_i . Энергия U получит при этом соответствующее приращение и станет равной

$$U + (\partial U / \partial P_i) \cdot \Delta P_i.$$

Теперь изменим порядок приложения сил. Сначала приложим малую силу ΔP_i , а затем — заданную систему сил. Малая сила вызовет соответственно малое обобщенное перемещение Δu_i . Половина произведения величин ΔP_i и Δu_i представля-

ет собой приобретенную телом энергию от малой силы ΔP_i . Приложим далее систему всех основных сил. Это приведет к тому, что тело приобретает снова энергию U , но, кроме того (обратите внимание!), точка приложения силы ΔP_i получит перемещение u_i и приложенная ранее сила ΔP_i совершит работу на перемещении u_i , и это произведение следует добавить к выражению работы внешних сил

$$\frac{1}{2} \Delta P_i \Delta u_i + U + \Delta P_i u_i.$$

Коэффициент 1/2 перед последним слагаемым не ставится, поскольку на перемещении u_i сила ΔP_i остается неизменной.

Теперь мы приравниваем выражения энергий и, пренебрегая произведением высшего порядка $\Delta P_i \Delta u_i$, приходим к следующему соотношению, которое и утверждает теорема:

$$u_i = \partial U / \partial P_i.$$

Повторяю идею вывода. Сначала прикладывается система сил. Затем одной из обобщенных сил дается неко-

торое приращение. Находим новое значение энергии. Затем меняется порядок приложения сил, восстанавливается энергия U и появляется еще слагаемое работы от приложенной ранее силы на перемещении, вызванном системой приложенных сил. Обычно для начинающего именно это обстоятельство кажется наиболее неожиданным. Прикладываем силы, а какая-то другая сила производит работу!? Да, именно так! Положим балка (рис. 69) нагружена силой P_1 .

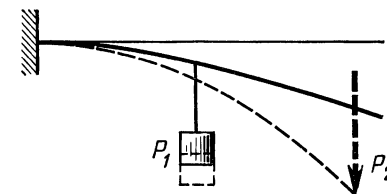


Рис. 69

И представим себе, что я прикладываю теперь еще силу P_2 . Груз P_1 при этом, очевидно, опустится. Потенциальная энергия груза уменьшится, а энергия деформированной балки увеличится за счет работы силы P_1 на перемещении, вызванном силой P_2 .

При выводе теоремы — то же самое.

Далее все, видимо, понятно. Надо только подчеркнуть, что мы оперируем с обобщенными силами. Если дифференцируем энергию по моменту, получаем угловое перемещение точки приложения момента в плоскости момента. Если дифференцируем по давлению, получаем изменение объема. Берем производную по обычной силе, находим проекцию полного перемещения точки приложения силы на направление этой силы.

Когда что-то выведено, всегда хочется проверить полученный результат на различных частных и уже знакомых примерах.

Стержень растянут силами P . Энергия стержня

$$U = P^2 l / 2EF,$$

производная от U по P дает

$$\Delta l = Pl / EF.$$

Верно! Для консоли (см. рис. 64) нами было получено выражение энергии (3):

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI}; \quad \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

Производная от энергии по силе дает нам, как видим, уже знакомое выражение прогиба для консоли.

Вернемся к примеру фермы, представленной на рис. 65. Энергия упругих деформаций (4) нами уже вычислена:

$$U = \frac{nPl}{EF} (1 + 2\sqrt{2}).$$

Если это выражение продифференцировать по силе P , мы получим взаимное перемещение точек приложения сил P :

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2nPl}{EF} (1 + 2\sqrt{2}).$$

В этом примере уже явно видны преимущества теоремы Кастилиано. Определить взаимное смещение точек, не прибегая к теореме Кастилиано, было бы значительно труднее. Пришлось бы искать удлинение каждого стержня, а затем из множества стержней разной длины геометрически составлять деформированную ферму.

Итак, теорема Кастилиано, действительно не противоречит тому, что нам известно. Но всегда ли она применима?

Если мы вернемся к выводу теоремы, то создается впечатление, что никаких ограничений на ее применение и не может быть наложено. Все, как будто, верно! И действительно, все верно, но возникает вопрос: на каком основании, переименовав порядок приложения сил, мы поставили знак равенства между двумя полученными выражениями энергии?

И вот теперь нам необходимо вспомнить рассмотренный ранее принцип независимости действия сил. О нем мы говорили на лекциях 1—2. Было установлено, что результат действия нескольких сил не зависит от порядка их приложения только в том случае, если система линейная, т. е. если между силами и перемещениями существует прямая пропорциональность. Значит, и доказанная только что теорема верна лишь для линейных систем. Кстати, и примеры, которые мы с вами только что рассмотрели, представляют собой примеры линейных систем. Конечно, для практических целей это не так уж и мало. При расчетах конструкций мы в основном имеем дело с линейными системами. И тем не менее условие линейности является достаточно серьезным ограничением, и об этом следует постоянно помнить.

А как быть с нелинейными системами? На этот случай также имеются энергетические теоремы. Выводятся

они на основе принципа возможных перемещений. Этот принцип вам хорошо знаком из механики жесткого тела. Но он применим и к условиям равновесия деформируемого тела. В состоянии равновесия работа внешних сил на возможных перемещениях равна не нулю, как для жесткого тела, а равна изменению внутренней потенциальной энергии на тех же перемещениях.

Воспользуемся этим принципом и докажем следующую теорему.

5. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Эта теорема была выведена примерно лет на сто ранее теоремы Кастилиано и читается она следующим образом:

Производная от потенциальной энергии упругих деформаций по обобщенному перемещению есть обобщенная сила, соответствующая этому перемещению.

Как и все энергетические теоремы, теорема Лагранжа доказывается довольно просто. Будем считать, что энергия деформации упругого тела выражена не через силы, а через перемещения. В принципе это всегда можно сделать, поскольку силы и перемещения между собой связаны.

Итак, пусть мы имеем выражение энергии в виде

$$U(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

где u_1, u_2, \dots — некоторые обобщенные перемещения.

Сообщим системе малые возможные перемещения, иначе говоря, несколько ее деформируем. Тогда внешние силы совершат работу, которая представляет собой сумму работ внешних сил и равна изменению потенциальной энергии на возможных перемещениях, т. е.

$$\sum P_i \delta u_i = \sum \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i.$$

Правая часть у нас написана в форме полного дифференциала, а для возможных перемещений принято обозначение δu_i .

Перенесем все слагаемые влево и перепишем это уравнение в виде

$$\sum \left(P_i - \frac{\partial U}{\partial u_i} \right) \delta u_i = 0.$$

Возможные перемещения δu_i независимы и определяются нашим произволом (если только помнить о наложенных на систему внешних связях). Поэтому, чтобы написанная сумма равнялась нулю, необходимо, чтобы в нуль обращалось каждое слагаемое суммы. Отсюда и вытекает, что производная от энергии по обобщенному перемещению есть обобщенная сила:

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = P_i$$

Теорема доказана. При ее доказательстве уже никаких ограничений на линейность или нелинейность системы не накладывалось. Поэтому теорема Лагранжа применима как к линейным, так и к нелинейным системам.

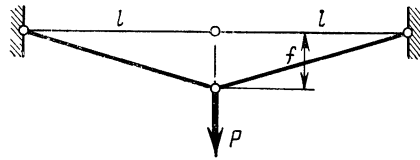


Рис. 70

Рассмотрим пример на применение этой теоремы. Специально возьмем нелинейную систему.

Два шарнирно соединенных стержня расположены на одной прямой (рис. 70) и в среднем шарнире нагружены силой P . Мы эту стержневую систему уже рассматривали, когда говорили о линейных и нелинейных зависимостях для перемещений. Это мгновенный механизм, и зависимость между перемещениями и силой здесь нелинейная. Требуется ее определить.

Пусть точка приложения силы переместилась вниз на величину f . Стержни при этом удлинятся каждый на величину

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + f^2} - l = l \left[\sqrt{1 + f^2/l^2} - 1 \right].$$

Преобразуем это выражение, учитывая, что f существенно меньше чем длина l . Воспользуемся разложением по биному Ньютона и примем

$$\sqrt{1 + \frac{f^2}{l^2}} = 1 + \frac{f^2}{2l^2}.$$

В итоге получим

$$\Delta l = f^2/2l. \quad (5)$$

Теперь вспомним выражение энергии для растянутого стержня

$$U_{\text{ст}} = P^2 l / 2EF.$$

Чтобы воспользоваться теоремой Лагранжа, энергию надо выразить через обобщенное перемещение f . Согласно закону Гука $\Delta l = Pl/EF$. И теперь, имея выражение (5), мы можем исключить Δl , т. е. написать

$$f^2/2l = Pl/EF.$$

И наконец, исключаем силу P из выражения энергии. Тогда

$$U_{\text{ст}} = \frac{1}{8} EF \frac{f^4}{l^3}.$$

Это энергия одного стержня. А их у нас два. Удваиваем и берем производную от полученного выражения по f . Это будет сила P :

$$P = EF f^3 / l^3.$$

Зависимость силы от перемещения оказывается кубической. Перемещение же пропорционально корню кубическому из силы:

$$f = l \sqrt[3]{P/EF}.$$

Итак, что же мы имеем? Мы вывели две родственные теоремы: теорему Кастилиано — производная от энергии по силе равна перемещению — и теорему Лагранжа — производная от энергии по перемещению равна силе. Но первая теорема пригодна только для линейных систем, а вторая — как для линейных, так и для нелинейных.

Возникает вопрос. А нельзя ли теорему Кастилиано подправить, «подлечить» и сделать ее пригодной и для нелинейных систем? Оказывается можно, и я покажу вам как это делается.

Введем понятие дополнительной работы. Что это такое?

Положим, между обобщенной силой и обобщенным перемещением существует какая-то зависимость. Она может быть изображена в виде кривой, показанной на рис. 71. Работа силы на перемещении (она же — энергия упругих деформаций) численно равна площади заштрихованного треугольника. Под дополнительной работой

понимается площадь второго треугольника, дополняющего первый до прямоугольника, т. е. площадь треугольника OAB . Для линейных систем, естественно, мы получаем два равных треугольника, и дополнительная работа равна энергии упругих деформаций. В общем же случае дополнительная работа Φ равняется

$$\phi = \sum P_i u_i - U.$$

Можно доказать, что производная от дополнительной работы по силе есть перемещение, т. е.

$$\partial\phi/\partial P_i = u_i.$$

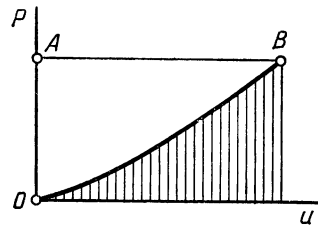


Рис. 71

И вот это выражение справедливо уже не только для линейных, но и для нелинейных систем.

Я не доказываю эту теорему не потому, что это трудно сделать. Доказывается она как раз очень просто. А потому, что эта, будем говорить, модифицированная теорема мало что дает для решения нелинейных задач.

Для того чтобы ею воспользоваться, надо предварительно дополнительную работу выразить через силу, а для этого надо знать зависимость обобщенных перемещений от обобщенных сил, что для нелинейных систем как раз и является предметом поиска. Если же составить функции в неявном виде, то даже в довольно простых случаях дело сведется к дифференциальным уравнениям, решение которых становится предметом последующих забот. Поэтому на начальной стадии освоения энергетических соотношений вам достаточно только знать о том, что такая теорема существует.

А теперь перейдем к следующей теореме.

6. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Теорема читается так: *Работа первой силы на перемещении, вызванном второй силой, равна работе второй силы на перемещении, вызванном первой силой.*

Речь идет, разумеется, об обобщенных силах и обобщенных перемещениях.

Скажем сразу — теорема взаимности работ верна

только для линейных систем, поскольку вытекает она из принципа независимости сил.

Итак, положим, что к упругому телу прикладываются две силы: P_1 и P_2 (рис. 72).

Рассмотрим сначала прямую последовательность приложения сил. Прикладываем силу P_1 . Она совершит работу $P_1 u_{11}/2$. Обобщенное перемещение u здесь снабжено двумя индексами. Первый соответствует той точке, где возникло перемещение,

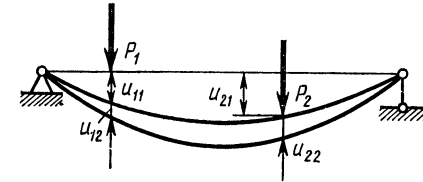


Рис. 72

а второй — силе, под действием которой оно возникло. Таким образом, обобщенное перемещение u_{1i} относится к точке i и вызвано силой с индексом 1 . Приложим теперь вторую силу. Она совершит, в свою очередь, работу $P_2 u_{22}/2$.

Когда мы приложили вторую силу, точка приложения первой не осталась на месте. Она получила дополнительное перемещение под действием второй силы, т. е. u_{12} . И на этом перемещении приложенная ранее сила P_1 совершит работу $P_1 u_{12}$. Здесь коэффициент $1/2$ не ставится: сила на перемещении u_{12} свою величину не меняет. Итак при прямой последовательности приложения сил мы получаем работу:

$$P_1 u_{11}/2 + P_2 u_{22}/2 + P_1 u_{12}.$$

Теперь изменим порядок приложения сил. Прикладываем сначала силу P_2 , а затем — P_1 . Тогда рассуждая аналогичным образом получим:

$$P_2 u_{22}/2 + P_1 u_{11}/2 + P_2 u_{21}.$$

Согласно принципу независимости действия сил приравниваем полученные работы и приходим к выводу, что

$$P_1 u_{12} = P_2 u_{21}. \quad (6)$$

Теорема доказана. Работа первой силы на перемещении, вызванном второй силой, равна работе второй силы на перемещении, вызванном первой силой.

Из этой теоремы вытекает ряд следствий, о которых сейчас говорить было бы преждевременно: ссылок на нее

последуют в дальнейшем. Сейчас же можно сказать, что теорема взаимности работ дает возможность решать некоторые задачи в столь общей постановке, что даже трудно представить себе, как можно их было бы решить иным способом.

Рассмотрим пример.

Тело произвольной формы (рис. 73, а) нагружено двумя равными силами P , приложенными в точках A и B . Требуется определить изменение объема тела.

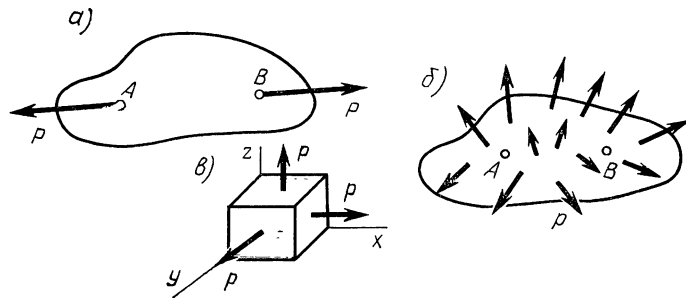


Рис. 73

На первый взгляд задача прямо-таки неразрешимая, а между тем она довольно просто решается с помощью теоремы взаимности работ.

В дополнение к заданному рассмотрим второй вид нагружения того же тела (рис. 73, б) — нагружение равномерно распределенным растягивающим «давлением» p . Теперь мы имеем две системы сил: система P и P и давление p . Согласно теореме взаимности работ работа давления p на искомом изменении объема от сил P равна работе сил P на изменении расстояния между точками A и B под действием давления p , т. е.

$$p \cdot \Delta V_p = P \cdot \Delta (AB)_p.$$

Здесь ΔV_p — искомое изменение объема, а $\Delta (AB)_p$ — удлинение отрезка (AB) под действием растягивающего давления p .

Сначала найдем относительное удлинение по оси x , вызванное однородным растяжением p . Каждый элемент, выделенный из всесторонне растянутого тела, оказывается под действием напряжений p по трем осям. Вследст-

вие действия напряжения по оси x получаем удлинение p/E . Напряжения, действующие по осям y и z , уменьшают это удлинение на величины $\mu p/E$ каждая. Таким образом,

$$\epsilon_x = p(1 - 2\mu)/E.$$

Умножаем ϵ_x на длину отрезка (AB) . Тогда

$$\Delta (AB)_p = (AB) \frac{p}{E} (1 - 2\mu),$$

и выражение (7) дает:

$$\Delta V_p = P (AB) \frac{1 - 2\mu}{E}.$$

Совсем простой ответ. И это независимо от формы тела и от того, в каких точках тела приложены силы P . Важно лишь расстояние между этими точками.

С помощью теоремы взаимности работ можно решить много любопытных задач и из нее же вытекает еще одна, последняя на сегодня, теорема.

7. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Теорема читается так: Сила, приложенная в точке 1, вызывает в точке 2 такое же перемещение, какое она вызвала бы в точке 1, будучи приложенной в точке 2.

Речь идет опять же об обобщенных перемещениях.

В выражении (6) полагаем $P_1 = P_2$ и тогда $u_{12} = u_{21}$. Теорема, таким образом, доказана. Написанное равенст-

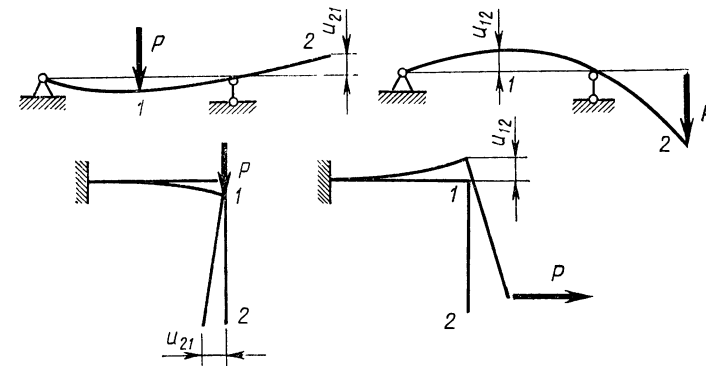


Рис. 74

во как раз и соответствует формулировке теоремы. На рис. 74 показаны примеры двух балок в двух случаях нагружения, а также отмечены отрезки u_{12} и u_{21} , равные один другому.

Итак, мы рассмотрели общим счетом четыре энергетические теоремы. Это теорема Кастилиано, теорема Лагранжа, теоремы взаимности работ и взаимности перемещений. Одна из них, а именно теорема Лагранжа, пригодна и для нелинейных систем. Эти теоремы понадобятся нам в дальнейшем, и уже на следующей лекции мы воспользуемся теоремой Кастилиано для разработки эффективного способа определения перемещений в общем случае нагружения балок. Мы будем обращаться в дальнейшем и к другим теоремам.

ЛЕКЦИИ 27—28

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МОРА

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В этой лекции мы рассмотрим задачу определения перемещений в статически определимых стержневых системах.

Мы уже знаем, что применяемые на практике инженерные сооружения обладают достаточной жесткостью, и возникающие в них перемещения можно считать весьма малыми по сравнению с характерными размерами сооружения. Определение таких перемещений относится к числу линейных задач.

Вопрос для нас не новый. При изучении растяжения (сжатия), кручения и изгиба мы уже сталкивались с задачей определения перемещений. Но мы рассматривали только частные задачи, а сейчас мы постараемся рассмотреть этот вопрос с достаточно общих позиций.

Когда определяются перемещения, возникающие вследствие деформации тела, необходимо твердо условиться о начале отсчета, ибо в сопротивлении материалов перемещения тела как жесткого целого не являются предметом специального изучения. Было бы, например, неправильно ставить вопрос о том, как найти перемещение сечения A растянутого стержня, изображенного на рис. 75, *а*. Постановка вопроса о перемещениях не имеет смысла, пока не указаны связи, исключаящие смещение стержня как жесткого целого или пока не указано, отно-

сительно каких точек определяются перемещения. Можно говорить, например, о перемещении правого конца стержня относительно левого или о перемещении правого конца при условии закрепления среднего сечения. И ответы будут разными. Или, например, при изгибе... Балка, показанная на рис. 75, *б* в двух вариантах нагружения, имеет одну и ту же эпюру изгибающих моментов и соответственно будут одинаковыми упругие линии; они могут

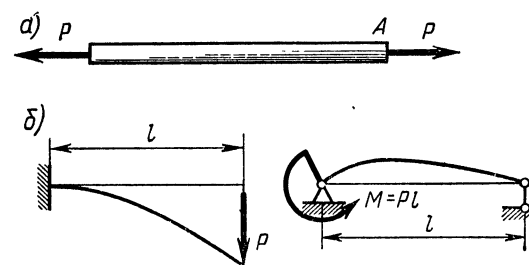


Рис. 75

быть совмещены простым переносом кривой как жесткого целого. Но возникающие перемещения в одной и той же точке будут различными, смотря по тому, как закреплена балка.

Обычно при расчетах стержневых систем нет необходимости вычислять функции перемещений, т. е. выражения для перемещений всех сечений. Достаточно знать несколько характерных перемещений. Например, горизонтальные и вертикальные перемещения некоторых узлов или сечений, т. е. проекции их полных перемещений на некоторые неподвижные оси. Кстати, проекции перемещений на оси x , y , z обозначаются обычно через u , v , w . На предыдущей лекции для обобщенных перемещений мы использовали обозначение u , снабжая его двумя индексами. В дальнейшем систему индексации мы сохраним. Первый индекс содержит в себе признак направления перемещения, а второй — признак силы, вызвавшей это перемещение.

Однако сохранив индексацию, мы взамен обозначения u_{ik} (и это важно для дальнейшего) будем пользоваться обозначением Δ_{ik} , считая, что Δ_{ik} есть линейное перемещение точки или угловое перемещение сечения в i -м направлении под действием k -го силового фактора. Причем там, где это необходимо, под Δ будем понимать не только

абсолютные, но и относительные (взаимные) перемещения двух точек или сечений. В предыдущей лекции, где при доказательстве энергетических теорем обозначение Δ служило символом приращения функции, мы для обозначения перемещений предпочли воспользоваться обозначением u .

Теперь вспомним теорему Кастилиано: производная от потенциальной энергии U по обобщенной силе есть обобщенное перемещение, соответствующее этой силе.

Эта теорема для линейных систем обладает как уже говорилось, достаточной универсальностью и вполне применима и к стержневым системам, которыми мы намерены заниматься. Однако ее непосредственное применение для определения перемещений представляет заметные неудобства.

Во-первых, теорема Кастилиано, можно сказать, избыточно аналитична. Она требует при вычислении энергии удерживать буквенное выражение, по крайней мере, той силы, по которой предстоит брать производную. А ведь нередки случаи, когда нагрузки задаются не в буквенном, а в численном виде.

Во-вторых, теорема Кастилиано в том виде, в каком мы с ней познакомились, дает возможность определять перемещения только той точки, в которой приложена сила, да к тому же только по направлению этой силы. На практике же необходимо располагать более широкими возможностями.

От этих неудобств, однако, нетрудно освободиться, если воспользоваться методом Мора.

2. ВЫВОД ФОРМУЛЫ МОРА

Основная идея метода Мора для определения перемещений стержневых систем заключается в следующем.

Если нам нужно определить перемещение в какой-то точке стержневой системы, где не приложены внешние силы, мы специально прикладываем там некоторую фиктивную силу Φ в том направлении, в котором ищем перемещение. Затем следует вычислить энергию системы с учетом этой силы, после чего можно взять и производную от энергии по этой силе. Когда это сделано, остается только вспомнить, что $\Phi=0$. Все эти операции выполняются в общем виде, что и представляет собой вывод формулы Мора.

В дальнейшем мы будем исходить из выведенного в предыдущей лекции общего выражения энергии для стержневой системы:

$$U = \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_l \frac{M_k^2 dz}{2GI_k} + \int_l \frac{N^2 dz}{2EF} + \int_l \frac{k_x Q_x^2 dz}{2GF} + \int_l \frac{k_y Q_y^2 dz}{2GF}.$$

Рассмотрим произвольную пространственную упругую систему, которая на рис. 76 представлена в виде консольного стержня с ломаной осью. Допустим, что при некоторой заданной нагрузке нам необходимо определить хотя бы вертикальное перемещение в сечении A .

Если в этом сечении приложить направленную в нужном направлении силу Φ , то, все силовые факторы во всех сечениях бруса, вообще говоря, изменятся, и вместо, например, M_x , M_y и т. д. мы получим:

$$M_{x\Phi} + M_{xP}; \quad M_{y\Phi} + M_{yP}; \dots,$$

где первое слагаемое представляет собой силовой фактор, порожденный в сечении балки системой заданных внешних сил, а второе — добавочный силовой фактор, вызванный силой Φ .

Естественно, что все дополнительные силовые факторы, снабженные индексом Φ , изменяясь вдоль оси балки, пропорциональны силе Φ , и мы можем написать:

$$M_{x\Phi} = M_{x1}\Phi; \quad M_{y\Phi} = M_{y1}\Phi; \dots$$

Здесь коэффициенты пропорциональности M_{x1} , M_{y1} ... представляют собой соответствующие силовые факторы, возникающие в сечениях балки от вспомогательной единичной силы $\Phi=1$, приложенной в сечении A (рис. 76).

Таким образом, после приложения силы Φ энергия системы будет следующей:

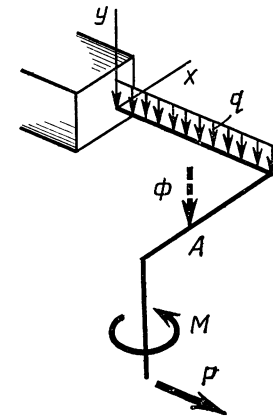


Рис. 76

$$U = \int_l \frac{(M_{xP} + M_{x1}\Phi)^2 dz}{2EI_x} + \int_l \frac{(M_{yP} + M_{y1}\Phi)^2 dz}{2EI_y} +$$

$$+ \int_l \frac{(M_{кP} + M_{к1}\Phi)^2 dz}{2GI_k} + \int_l \frac{(N_P + N_1\Phi)^2 dz}{2EF} +$$

$$+ \int_l \frac{k_x(Q_{xP} + Q_{x1}\Phi)^2 dz}{2GF} + \int_l \frac{k_y(Q_{yP} + Q_{y1}\Phi)^2 dz}{2GF}.$$

Взяв производную по Φ и положив далее $\Phi=0$, мы приходим к окончательному выражению формулы Мора

$$\Delta_{AP} = \int_l \frac{M_{xP} M_{x1} dz}{EI_x} + \int_l \frac{M_{yP} M_{y1} dz}{EI_y} + \int_l \frac{M_{кP} M_{к1} dz}{GI_k} +$$

$$+ \int_l \frac{N_P N_1 dz}{EF} + \int_l \frac{k_x Q_{xP} Q_{x1} dz}{GF} + \int_l \frac{k_y Q_{yP} Q_{y1} dz}{GF}.$$

Входящие в эти выражения внутренние силовые факторы, имеющие единичный индекс, должны вычисляться от единичной вспомогательной силы $\Phi=1$, приложенной в заданной точке в заданном направлении. И несмотря на то, что мы положили $\Phi=0$, «след» этой силы как раз и сохраняется в виде единичных функций, входящих под знак каждого из шести интегралов Мора.

Подведем теперь итог сделанному. Чтобы найти перемещение в заданной точке стержневой системы, мы должны сначала определить законы изменения всех внутренних силовых факторов, вызванных заданной системой внешних сил. Далее в заданной точке в заданном направлении прикладывается единичная сила и от нее (отдельно — от нее!) определяются законы изменения тех же внутренних силовых факторов. После определения внутренних сил берутся интегралы от соответствующих произведений, входящих под знак интегралов Мора. Практически интегрирование ведется по участкам, а полученные для участков результаты затем алгебраически суммируются.

Не нужно только бояться обилия интегралов, входящих в формулу Мора. Мы уже знаем, что эти слагаемые, как правило, существенно различаются по величине. Если балка работает на изгиб под действием сил, лежащих

в одной плоскости, мы учитываем только первый интеграл из шести. Если определяются перемещения в стержневой ферме, основным слагаемым является четвертый из написанных здесь интегралов. Об этом уже говорилось на предыдущей лекции.

3. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПО МОРУ

Определим перемещение конца консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 77).

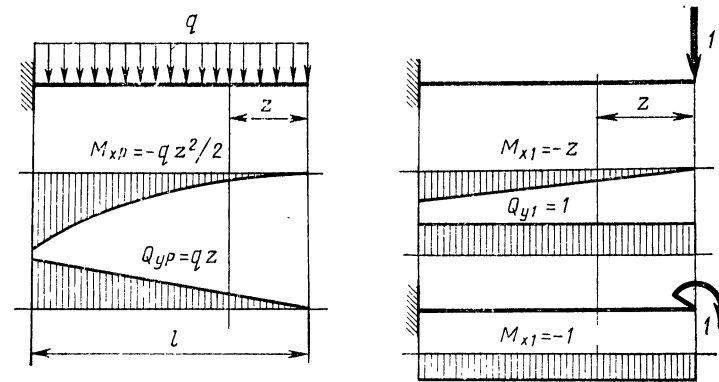


Рис. 77

В поперечных сечениях балки возникает изгибающий момент и поперечная сила. Функции M_{xP} и Q_{yP} представим для наглядности в виде эпюр:

$$M_{xP} = -\frac{qz^2}{2}; \quad Q_{yP} = qz.$$

Далее рассматриваем вспомогательное состояние балки, нагруженной на конце единичной силой. Здесь $M_{x1} = -z$; $Q_{y1} = 1$.

Эпюры от единичной силы показаны на рис. 77.

Формула Мора теперь запишется в виде:

$$y_{\max} = \int_0^l \frac{qz^2 \cdot z \cdot dz}{2EI_x} + \int_0^l \frac{k_y \cdot qz \cdot 1 dz}{GF},$$

или

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{k_y ql^2}{2GF}.$$

Первое слагаемое представляет собой перемещение вследствие изгиба (искривления) стержня. Второе слагаемое — перемещение вследствие сдвига.

Для сравнительной оценки двух слагаемых рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения со сторонами b и h . Тогда

$$I_x = bh^3/12; \quad F = bh; \quad k_y = 6/5; \quad G \approx 0,4E.$$

В итоге получим

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{8EI_x} \left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right).$$

Как видим, порядковая оценка перемещения, обусловленного сдвигом, по сравнению с перемещением изгиба определяется квадратом отношения h/l по сравнению с единицей. По определению брус — это тело, у которого одно из измерений (длина) много больше размеров поперечного сечения. Следовательно, в данном случае и во всех других ему подобных сдвиговой составляющей перемещений по сравнению с изгибной мы с полным основанием можем пренебречь.

Мы сейчас определили линейное перемещение конца бруса. А как определять угловые перемещения?

Все рассказанное на предыдущей лекции об обобщенных силах и перемещениях, а также ход вывода уравнения Мора подсказывает нам очевидное решение: для определения угловых перемещений все операции полностью сохраняются, но вместо единичной силы в том сечении, где мы хотим найти угол поворота, следует прикладывать единичный момент. Например, если мы хотим найти угол поворота крайнего сечения балки, показанной на рис. 77, то вводим вспомогательное нагружение единичным моментом. Тогда $M_{x1} = -1$, а $Q_{y1} = 0$, и

$$y' = \theta_{\max} = \int_0^l \frac{k_y qz^2 dz}{2EI_x} = \frac{ql^3}{6EI_x}.$$

Рассмотрим еще пример. Разрезанное кольцо (рис. 78) нагружено двумя равными и противоположно направленными силами. Требуется определить взаимное смещение точек приложения сил P .

Поскольку силы P перпендикулярны плоскости кольца, то силовые факторы, действующие в плоскости кольца, во всех сечениях равны нулю. Отличными от нуля будут крутящий момент, изгибающий момент и поперечная сила. Ролью последней пренебрегаем.

В сечении, имеющем угловую координату φ , крутящий и изгибающий моменты будут:

$$M_{\kappa P} = PR(1 - \cos \varphi);$$

$$M_{xP} = PR \sin \varphi.$$

Для определения искомого взаимного смещения сечений 1 и 2 прикладываем к кольцу соответствующую обобщенную единичную силу, т. е. две противоположно направленные единичные силы. Как видим, единичный крутящий и изгибающий моменты отличаются от $M_{\kappa P}$ и M_{xP} лишь тем, что они будут в P раз меньше. Таким образом,

$$M_{\kappa 1} = R(1 - \cos \varphi); \quad M_{x1} = R \sin \varphi.$$

Взаимное смещение сечений 1 и 2 по Мору будет:

$$\Delta = \int_0^{2\pi} \frac{M_{\kappa P} M_{\kappa 1} R d\varphi}{GI_{\kappa}} + \int_0^{2\pi} \frac{M_{xP} M_{x1} R d\varphi}{EI_x}.$$

Подставляем выражения моментов:

$$\Delta = \frac{PR^3}{GI_{\kappa}} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi + \frac{PR^3}{EI_x} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi$$

и после интегрирования получим

$$\Delta = \pi PR^3 \left(\frac{3}{GI_{\kappa}} + \frac{1}{EI_x} \right).$$

Перемещение состоит из двух слагаемых. Первое определяется кручением, второе — изгибом кольца. Первое

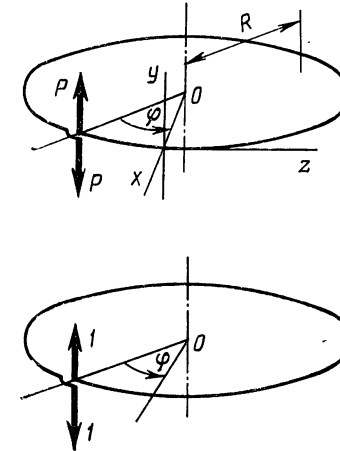


Рис. 78

заметно больше второго. Например, для кругового сплошного сечения $I_y = 2I_x$, и при $G = 0,4E$ перемещение, возникающее вследствие кручения, оказывается почти в четыре раза больше изгибного.

Мы познакомились с методом Мора на примерах определения прогибов прямой балки постоянного сечения, а также балки кругового очертания. Как видим, вычисления в этих случаях сравнительно несложны. Подынтегральные функции простые, а вычислять интегралы Мора гораздо проще, чем писать уравнения упругой линии.

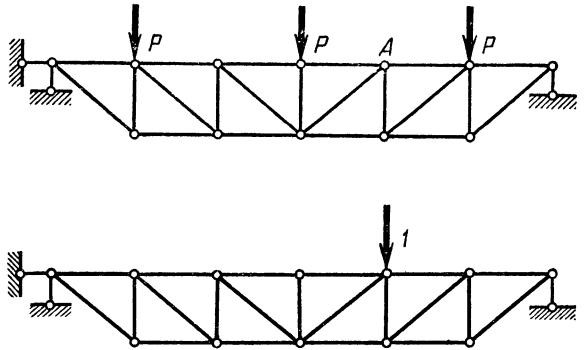


Рис. 79

В некоторых случаях можно вообще обойтись без интегрирования и ограничиться простым суммированием найденных составляющих для перемещений.

Простейший пример замены интеграла Мора суммами мы встречаем при определении перемещений узлов ферм.

Используем метод Мора для определения, например, вертикального перемещения узла *A* фермы, показанной на рис. 79.

Здесь из шести интегралов Мора мы должны воспользоваться только одним, содержащим нормальные силы N_P и N_1 . Сначала надо определить усилия N_{Pi} в каждом стержне фермы от заданной системы сил. Затем надо рассмотреть нагружение фермы единичной силой и определить N_{1i} . Искомое перемещение будет:

$$\Delta = \sum \int \frac{N_{Pi} N_{1i} dz}{EF_i}$$

На длине каждого стержня усилия постоянны. Постоянна также и жесткость EF_i . Они выносятся за знак интеграла, и формула Мора принимает вид

$$\Delta = \sum \frac{N_{Pi} N_{1i} l_i}{EF_i},$$

где l_i — длина i -го стержня, а суммирование ведется по числу стержней.

Таким образом, перемещение в узлах фермы определяется как сумма произведений соответствующих усилий от нагрузки и от единичного воздействия, умноженных на коэффициенты податливости l_i/EF_i .

Такого рода вычисления для сложных ферм можно автоматизировать и возложить все вычисления на цифровую машину.

Интересно, что эту формулу для вычисления перемещений узлов фермы лет на десять раньше Мора вывел знаменитый физик Максвелл — один из создателей теории электромагнетизма. Поэтому рассматриваемый нами прием вычисления перемещений иногда называют методом Максвелла — Мора. Работа Максвелла была написана очень сложно и не была понята современниками. Мор выполнил свои исследования независимо от Максвелла и в более общей форме.

Вернемся, однако, к общему случаю определения перемещений, когда эпюры внутренних сил имеют более сложную форму, чем в фермах, где на длине каждого стержня нормальные силы постоянны. В этих более сложных случаях удобны специальные приемы вычисления интегралов Мора, которые мы сейчас и рассмотрим.

4. СПОСОБ ВЕРЕЩАГИНА

Допустим, что жесткости стержней на отдельных прямолинейных участках постоянны. Тогда при вычислении интеграла Мора жесткость (на растяжение, кручение — все равно...) выходит за знак интеграла, а под интегралом остается произведение двух функций. Например, функции изгибающего момента от заданных сил и функции изгибающего момента от единичного воздействия. Первая из этих функций в общем случае может быть любой, а вот что касается второй, то на прямолинейных участках стержня она остается линейной. Таким образом получается, что на участке *ab* (рис. 80) нам необходимо

взять интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейна.

Продолжим линейную эпюру M_1 до точки пересечения с осью z и примем эту точку за начало координат. Ординату M_1 можно написать в виде kz , где k — угловой коэффициент прямой. Таким образом получаем интеграл

$$\int_a^b M_P M_1 dz = k \int_a^b M_P z dz.$$

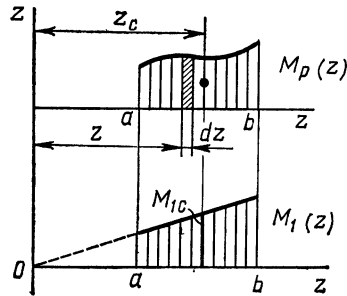


Рис. 80

Произведение $M_P z dz$ представляет собой элементарную площадку грузовой криволинейной эпюры. Следовательно, интеграл, стоящий в правой части написанного равенства, представляет собой статический момент грузовой эпюры относительно оси y .

Статический момент можно написать в виде произведения площади грузовой

эпюры Ω на координату ее центра тяжести z_c , т. е.

$$k \int_a^b M_P z dz = \Omega k z_c.$$

Но $k z_c$ представляет собой ординату линейной эпюры под центром тяжести грузовой эпюры.

Таким образом, при вычислении интеграла от произведения двух функций, из которых одна линейная, можно обойтись простым перемножением площади нелинейной эпюры на ту ординату линейной, которая располагается под центром тяжести нелинейной эпюры.

В этом и заключается способ, или, как говорят обычно, правило, Верещагина.

Найдем, например, угол поворота крайнего сечения A балки, показанной на рис. 81. Жесткость балки на изгиб EI постоянная.

Построим эпюры от заданной силы P и от единичного момента, приложенного в сечении A . Вторая эпюра линейная для всей длины балки. Следовательно, пользуясь правилом Верещагина, мы можем найти искомый угол

поворота, умножив площадь верхней эпюры на среднюю ординату нижней эпюры и поделив это произведение на EI , т. е.

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \frac{Pl}{4} l \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{16EI}.$$

Способ вычисления интегралов от произведения функций, из которых одна линейна, иногда называют способом перемножения эпюр. Его предложил в 1925 г. студент Московского института инженеров транспорта А. Верещагин. Этот способ получил широкое распространение и известен сейчас каждому инженеру, изучившему курс сопротивления материалов.

В последнее время в связи с внедрением в расчеты вычислительной техники вычисление интегралов Мора часто производят с помощью квадратурных формул численного анализа — общих формул вычисления определенных интегралов.

Особенно удобна для этого формула Симпсона — одна из самых распространенных квадратурных формул, которая известна студентам еще из курса математики.

Остановимся на некоторых особенностях ее применения.

5. ФОРМУЛА СИМПСОНА

Вычисление определенного интеграла на отрезке ab (рис. 82) гладкой функции $f(z)$ можно выполнить приближенно по формуле Симпсона, в которую входят ординаты $f(a)$, $f(b)$ и $f(c)$:

$$\int_a^b f(z) dz \approx \frac{l}{6} [f(a) + 4f(c) + f(b)].$$

При вычислении интеграла Мора функция $f(z)$ равна произведению двух функций, деленному на жесткость l/I . Поэтому формула Симпсона запишется в виде

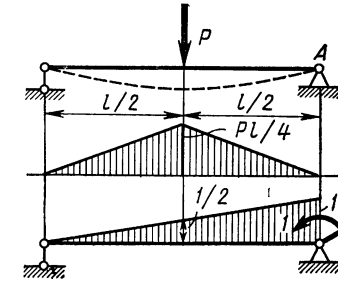


Рис. 81

$$\int_a^b \frac{M_P M_1 dz}{EI} \approx \frac{l}{6} \left[\left(\frac{M_P M_1}{EI} \right)_a + 4 \left(\frac{M_P M_1}{EI} \right)_c + \left(\frac{M_P M_1}{EI} \right)_b \right].$$

Эта формула приближенная, но если жесткость EI на участке ab постоянная, формула Симпсона в практически важных случаях дает точный результат.

Очевидно результат будет точным, если $f(z)$ представляет собой квадратичную параболу или прямую. Формула Симпсона оказывается точной и в случае, если $f(z)$ — полином третьей степени. В этом случае $f(z)$ отличается от квадратичной параболы, проведенной через три точки, кубической функцией, дающей нулевую площадь, заштрихованную на рис. 82.

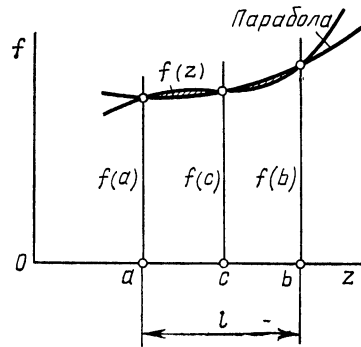


Рис. 82

Формула Симпсона используется и при ручном счете, причем особенно часто в случае распределенных нагрузок. Рассмотрим пример.

Найдем горизонтальное перемещение правой опоры для рамы, нагруженной распределенной нагрузкой q (рис. 83).

Первый этап вычислений: строим эпюру моментов от заданной нагрузки q . На вертикальном участке эпюра параболическая, на горизонтальном — линейная.

Второй этап: рассматриваем вспомогательное состоя-

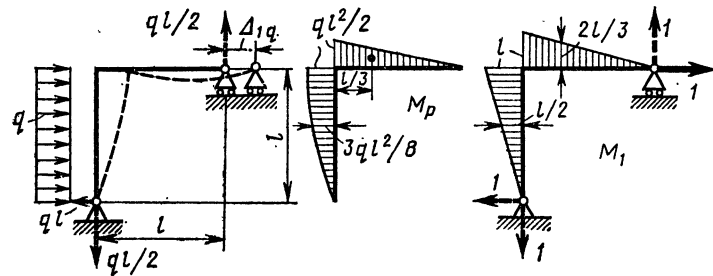


Рис. 83

ние — по направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу и строим эпюру M_1 .

И наконец, вычисляем интеграл Мора

$$\Delta = \int \frac{M_P M_1 dz}{EI}$$

на первом вертикальном участке рамы по формуле Симпсона: умножаем $l/6EI$ на сумму произведений

$$0 + 4 \cdot \frac{3}{8} ql^2 \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{2} l.$$

На втором участке воспользуемся правилом Верещагина. Площадь треугольника равна $ql^3/4$. Центр тяжести находится на расстоянии $2l/3$ от правой опоры. Ордината единичной эпюры в этой точке равна $2l/3$.

Производя суммирование произведений, получаем

$$\Delta = \frac{3}{8} \frac{ql^4}{EI}.$$

Аналогично используются формулы Симпсона и правило Верещагина при вычислении перемещений пространственных систем.

Определим, например, вертикальное перемещение сечения A , возникающее под действием горизонтальной силы P (рис. 84).

Сначала построим эпюры изгибающих и крутящих моментов от силы P , а растяжением и сдвигом стержней будем пренебрегать.

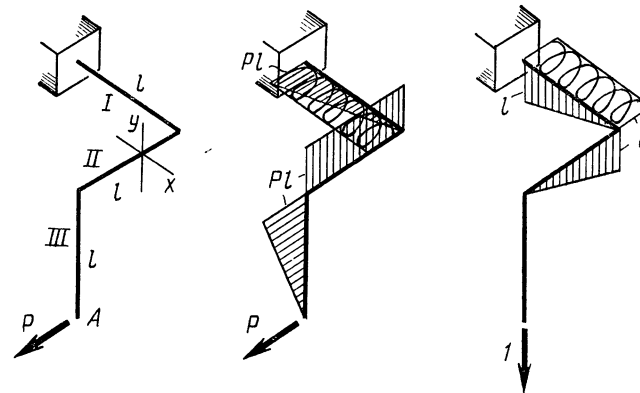


Рис. 84

**СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.
МЕТОД СИЛ**

1. СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

Изучая материал предыдущих лекций, вы, конечно, оценили и поняли то особое место, которое занимают внутренние усилия в расчетах прочности и жесткости стержневых систем. Продольные и поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты тем или иным образом входят во все соотношения для напряжений и упругих перемещений.

Для определения внутренних усилий нами систематически применялось одно и то же аналитическое средство — уравнения равновесия. С помощью этих уравнений, записанных для стержня в целом, мы сначала находили опорные реакции, а затем, пользуясь методом сечений и записывая уравнения равновесия для части бруса, определяли все внутренние силы.

До поры до времени этот подход себя оправдывал, и у вас могло сложиться впечатление об его универсальности. В действительности это не так. Уравнения равновесия в условиях статического нагружения, конечно, всегда выполняются, но в ряде случаев для определения опорных реакций и внутренних сил этих уравнений попросту недостаточно. Поэтому возникает необходимость составлять некие дополнительные уравнения, которые формулируются вне связи с условиями равновесия. Об этом мы и будем говорить в нашей лекции.

С некоторыми случаями «нехватки» уравнений статики вы уже познакомились в начале нашего курса, т. е. при рассмотрении вопросов растяжения-сжатия и кручения. Но это знакомство было первым и недостаточно глубоким. Сейчас этот вопрос мы рассмотрим с более общих позиций.

Если уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций и внутренних усилий в стержневой системе, то такая система называется статически неопределимой.

Избыток числа неизвестных (реакций опор и внутренних усилий) над числом независимых уравнений статики, которые могут быть составлены для данной системы, на-

Затем построим эпюры изгибающих и крутящих моментов от единичной силы, направленной по вертикали (рис. 84).

Далее производится перемножение эпюр. Эпюры изгибающих моментов, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях, не перемножаются. Это следует из общей формулы Мора, где под знаком интеграла находятся произведения $M_{xP}M_{x1}$ и $M_{yP}M_{y1}$, но не $M_{xP}M_{y1}$. Поэтому на участке I , по Верещагину, перемножаются только эпюры крутящих моментов. Площадь $P l^2$ умножается на ординату l и произведение делится на $G I_k^1$ первого участка. Перед произведением ставится знак минус, поскольку крутящий момент от заданной силы и единичной — направлены в разные стороны. На втором участке получаем произведение $P l^2 \cdot l/2$, которое берется со знаком минус и делится на жесткость $E I_x^{II}$. На третьем участке — нуль.

Итак,

$$\Delta = - P l^3 \left(\frac{1}{2 E I_x^{II}} + \frac{1}{G I_k^1} \right).$$

Знак минус, полученный в ответе, свидетельствует о том, что перемещение направлено не по единичной силе, а против нее, т. е. вверх.

В заключение необходимо отметить, что интегралами Мора можно пользоваться и за пределами применимости закона Гука. Но интегралы необходимо писать в несколько измененном виде. Например, для изгиба

$$\int_l \frac{M_{xP} M_{x1}}{E I_x} dz = \int_l M_{x1} \frac{dz}{\rho},$$

где $1/\rho$ изменение кривизны бруса, понимаемое чисто геометрически, независимо от причин, вызвавших это искривление. Для растяжения составляющий интеграл надо писать в виде:

$$\int_l \frac{N_D N_1}{E F} dz = \int_l N_1 \epsilon dz,$$

где ϵ — относительное удлинение, независимо от того, упругое оно или неупругое.

зывается степенью статической неопределенности. Таким образом, степень статической неопределенности равна числу лишних неизвестных.

Иногда слово «степень» не произносят, а говорят проще — «система статически неопределима четыре раза», «система один раз статически неопределима» и т. д. Нередко можно слышать еще менее строгое словопользование — «система единойжды (дважды, трижды) статически неопределима».

Оценка степени статической неопределенности в общем довольно простая, но особо ответственная, потому что именно с нее и начинается анализ статически неопределимой системы.

Можно сказать, что в статически неопределимых системах успеху определения внутренних сил и опорных реакций с помощью уравнений равновесия мешают как бы «лишние» связи. Например, для балки, показанной на рис. 85, а, правую опору можно рассматривать как лишнюю. И в самом деле, заделка левого конца балки полностью устраняет возможность перемещения балки как жесткого целого; обеспечивает ее кинематическую неизменяемость. Точно так же и для балки, показанной на рис. 85, б, можно считать лишними три опоры. Для кинематической неизменяемости вполне достаточно, например, двух опор: левой и еще одной из четырех.

То минимальное число связей, при котором достигается кинематическая неизменяемость системы, носит название необходимого числа связей. Для балок, показанных на рис. 85, это число равно трем.

Любая связь, наложенная сверх необходимого числа, оказывается для обеспечения кинематической неизменяемости лишней, или, как принято говорить, дополнительной, связью.

Конечно, словосочетания «дополнительная связь», «лишняя неизвестная» — это всего лишь условные выражения, которые нельзя понимать буквально. Лишняя связь является избыточной, если мы хотим обеспечить кинематическую неизменяемость. Но она далеко не лиш-

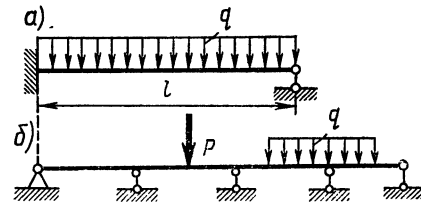


Рис. 85

няя, если мы подумаем о прочности системы, о величине сил, которые может выдержать балка (рис. 85).

Введение каждой новой дополнительной связи приводит к возникновению дополнительной неизвестной. В каждой из дополнительных опор, показанных для балок (рис. 85), возникает дополнительная вертикальная сила, подлежащая определению. Таким образом, степень статической неопределенности системы равна числу дополнительных связей, наложенных на систему.

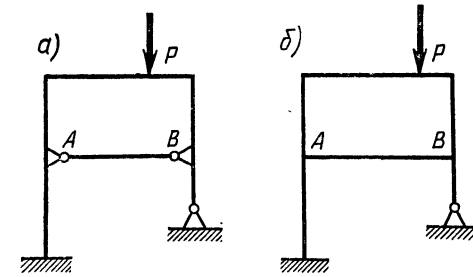


Рис. 86

Но не следует думать, что дополнительные усилия возникают лишь в результате внешних ограничений на перемещения отдельных сечений стержневой системы. Во многих случаях связи представляют собой ограничения, наложенные на взаимное смещение сечений. Такие связи часто называют внутренними. Пример внутренней связи показан на рис. 86, а. Здесь нерастяжимый стержень AB, шарнирно соединенный с вертикальными стойками рамы, обеспечивает равенство горизонтальных перемещений точек A и B. Тем самым на раму кроме двух внешних лишних связей наложена еще одна лишняя внутренняя связь. Система, таким образом, три раза статически неопределима.

Если же в точках A и B убрать шарниры и тем самым полностью замкнуть контур (рис. 86, б), то мы получим уже не одну, а три внутренние дополнительные связи. Действительно, для определения внутренних сил в сечениях рамы контур необходимо разрезать, но с тем условием, что сечения по одну и другую сторону от разреза друг относительно друга не поворачиваются и не смещаются ни в вертикальном, ни в горизонтальном направле-

ниях. Таким образом, рама, показанная на рис. 86,б, пять раз статически неопределима; у нее три дополнительные связи внутри и две — внешние.

Из рассмотренного примера мы видим, что число опор еще не характеризует полностью степень статической неопределимости. Важны не только внешние, но и внутренние связи. И развивая тему о шарнирах, можно сказать, что врезанный в раму шарнир, допуская взаимный поворот смежных сечений, тем самым снимает одну связь. Если рама, показанная на рис. 86,б, пять раз статически неопределима, то два врезанных шарнира (рис. 86,а) снимают две связи, и рама становится статически неопределимой три раза.

Понятие статической неопределимости относится, разумеется, не только к балочным и рамным системам, но и к фермам. Мало того, теория статически неопределимых систем получила свое первое и наиболее важное приложение и развитие именно при расчетах металлических ферм железнодорожных мостов в середине прошлого века.

2. ИДЕЯ МЕТОДА СИЛ ОСНОВНАЯ СИСТЕМА

Итак, мы знаем, что расчетные схемы многих стержневых конструкций представляют собой статически неопределимые системы и что условия статики, примененные сами по себе, в известном смысле бессильны. Вопрос заключается в том, как набрать нужное число уравнений для определения реакций опор и внутренних сил, как раскрыть статическую неопределимость? Один из наиболее широко применяемых методов достижения этой цели состоит в следующем.

После того как установлена степень статической неопределимости, заданная система мысленно освобождается от лишних связей, так что образуется статически определимая и вместе с тем кинематически неизменяемая система. Она называется основной системой. Далее действие отброшенных связей заменяется соответствующими силами и моментами. Получается, что к основной системе кроме заданной нагрузки прикладываются неизвестные силы по числу отброшенных связей. После этого формулируются условия, основанные на простой, но вполне общей идее: величины неизвестных сил должны быть

такими, чтобы в основной системе выполнялись кинематические ограничения, в действительности наложенные на заданную систему лишними связями. В этом способе за неизвестные принимаются силы, возникающие в отброшенных дополнительных связях, и соответственно он называется методом сил. Существуют и другие методы, но о них мы пока говорить не будем.

Для иллюстрации процедуры применения метода сил вернемся к балке, показанной на рис. 85,а. Балка статически неопределима один раз. Принимая за лишнюю связь правую опору, получаем основную схему, показанную на рис. 87.

Теперь к статически определимой балке прикладываем заданную нагрузку q и неизвестную силу X . Далее формулируем основное соотношение: перемещение конца консольной балки, вызванное заданной нагрузкой q и неизвестной силой X , должно быть равно нулю. Перемещение определяется известным нам способом, и, не останавливаясь на подробностях, можно написать:

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = 0.$$

Здесь l — длина балки, EI — жесткость, которую мы считаем постоянной. Первое слагаемое написанного уравнения представляет собой прогиб, вызванный распределенной нагрузкой q , а второе слагаемое — прогиб, вызванный силой X .

Из уравнения немедленно находим

$$X = 3ql/8.$$

Статическая неопределимость раскрыта, и дальше, зная реакцию опоры, мы без труда можем построить эпюры моментов и поперечных сил.

Для каждой статически неопределимой стержневой системы можно указать, как правило, сколь угодно много основных систем. В частности, для только что рассмотренной балки можно в любом сечении врезать шарнир (рис. 88) и ввести неизвестный момент X , величина кото-

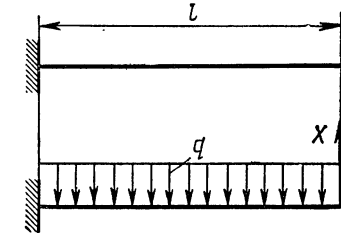


Рис. 87

рого будет различной, смотря по тому, где врезан шарнир. Поскольку местоположение врезанного шарнира зависит от нашего произвола, можно сказать, что здесь имеется возможность получить сколь угодно большое число основных систем.

Возникает естественный вопрос, какому же из возможных вариантов основной системы отдать предпочтение?

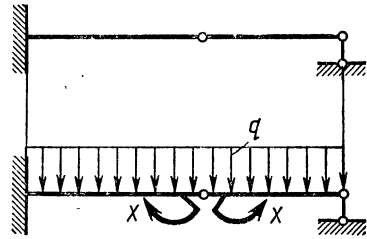


Рис. 88



Рис. 89

Может быть они все равноценны? Забегая несколько вперед, укажем, что это не так. Неудачный выбор основной системы может привести к значительному увеличению трудоемкости решения, а в некоторых случаях и к снижению точности. Кроме того, при выборе основной системы можно впасть в грубую ошибку.

Нельзя формально руководствоваться только одним правилом образования основной системы, а именно, что число отбрасываемых связей долж-

но быть равным степени статической неопределимости. Этого недостаточно. Надо обязательно следить еще и за тем, какие связи отбрасываются. Некоторые связи отбрасывать недопустимо.

Например, в рассмотренной только что балке было неправильно отбросить связь, запрещающую горизонтальное смещение в заделке (рис. 89). При такой основной системе балка приобретает кинематическую изменчивость. Она свободно может перемещаться в горизонтальном направлении. Следовательно, при выборе основной системы надо следить кроме всего прочего и за кинематической неизменяемостью всей системы и отдельных ее частей.

3. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Итак, положим, что основная система выбрана и притом выбрана правильно. Все лишние неизвестные силы и моменты приложены к основной системе. Условимся эти

неизвестные обозначать буквой X с индексами 1, 2, 3, т. е. X_1, X_2, X_3, \dots , независимо от того, является ли неизвестное силой или моментом.

Соответственно индексам 1, 2, 3, ..., будем через $\Delta_{1k}, \Delta_{2k}, \dots$, обозначать и взаимные линейные или угловые перемещения по направлениям 1, 2, 3, ... Второй индекс при Δ обозначает номер той силы, под действием которой

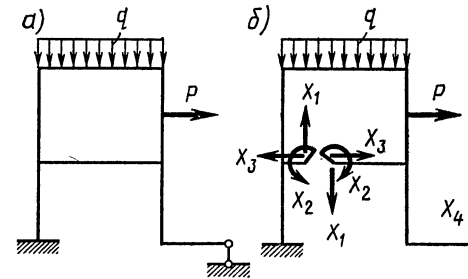


Рис. 90

возникло перемещение Δ_{ik} . Об этом принципе обозначения взаимных перемещений мы уже говорили на предыдущей лекции. Важно отметить, что мы не оговариваем природы возникновения перемещения Δ_{ik} . Оно может возникнуть и в результате растяжения стержней, в результате изгиба или кручения. Это для нас никакого значения не имеет.

Рассмотрим некоторую обобщенную систему, показанную на рис. 90, а. То обстоятельство, что она четыре раза статически неопределима, ничуть не будет нарушать общности наших последующих рассуждений.

Разрезая замкнутый контур, введем три неизвестных X_1, X_2, X_3 . Отбрасывая правую опору, введем неизвестное X_4 . Теперь, пользуясь принятым обозначением для взаимных перемещений, мы можем написать

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{1P} = 0.$$

Так как у всех слагаемых этой суммы первым стоит индекс «единица», то речь, очевидно, идет о взаимном вертикальном перемещении соседних сечений в месте разреза. Первое слагаемое — это перемещение, вызванное силами X_1 , второе — моментом X_2 , далее — X_3 и X_4 . А вот что касается перемещения Δ_{1P} , то предполагается,

что оно вызвано не только силой P , а полной совокупностью внешних заданных сил.

Далее мы можем написать

$$\Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{2P} = 0.$$

Здесь первым стоит индекс «два». Значит речь идет о взаимном перемещении по направлению X_2 . Но X_2 есть момент. Следовательно, под Δ_{2k} понимается не линейное, а угловое взаимное перемещение сечений в месте разреза.

Аналогичным образом можно написать еще два недостающих уравнения для определения четырех неизвестных. Но неизвестные пока скрыты внутри символов Δ_{ik} . Чтобы «обнажить» эти неизвестные, мы будем рассуждать следующим образом. Написав уравнения в виде суммы перемещений, вызванных различными силами, мы молчаливо следовали принципу независимости действия сил. Но это допустимо лишь для линейных систем. Следовательно, перемещения Δ_{ik} пропорциональны соответствующим силам X_k , и мы можем написать:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k,$$

где δ_{ik} — коэффициент пропорциональности. Ясно, что δ_{ik} — это перемещение по i -му направлению, вызванное действием силы X_k при условии, что ее значение равно единице. По этому признаку величины δ_{ik} называются единичными перемещениями. Они полностью определяют собственные структурными, геометрическими и жесткостными свойствами стержневой системы и не зависят от внешней нагрузки. На конкретных вычислениях мы остановимся несколько позже, а сейчас запишем нашу систему уравнений в окончательном виде:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0;$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0.$$

Перемещения Δ_{iP} от заданных сил оставлены в том виде, в каком они были написаны ранее. Они как раз и отражают влияние внешней нагрузки.

Полученная система линейных уравнений носит общий характер. Она расширяется или сужается в зависимости

от числа неизвестных. Она остается верной независимо от того, с плоской или пространственной системой мы имеем дело. И она с равным успехом может применяться как к рамам, так и к ферменным системам. Эти уравнения называются каноническими уравнениями метода сил.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Способы определения перемещений нами рассматривались на предыдущей лекции. Напомним, что для этой цели обычно исходят из формулы Мора

$$\Delta_{iP} = \int \frac{M_i M_P dz}{EI}.$$

Это знакомый вам вариант записи для расчета балок и рам, когда можно пренебрегать перемещениями, возникающими вследствие растяжения и сдвига. Здесь M_i — изгибающий момент, вызываемый единичной i -й силой, которая действует в заданном направлении, а M_P — изгибающий момент, который вызван системой внешних сил.

Если же нам необходимо определить перемещение в i -м направлении, вызванное k -й единичной силой, то написанный выше интеграл Мора принимает вид:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k dz}{EI},$$

где M_i и M_k — моменты от единичных сил.

Так как от перестановки множителей подынтегральное выражение не меняется, то, очевидно, $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, и матрица коэффициентов системы канонических уравнений оказывается симметричной относительно главной диагонали. Кстати, заметим, что равенство $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ вытекает также из уже знакомой нам теоремы взаимности перемещений.

В тех случаях, когда рама имеет прямолинейные участки с постоянной жесткостью, коэффициенты системы канонических уравнений без труда определяются по правилу Верещагина.

Рассмотрим пример раскрытия статической неопределенности рамы, показанной на рис. 91. Рама два раза статически неопределима. Естественно выбрать основную систему, отбросив правую шарнирную опору, и ввести

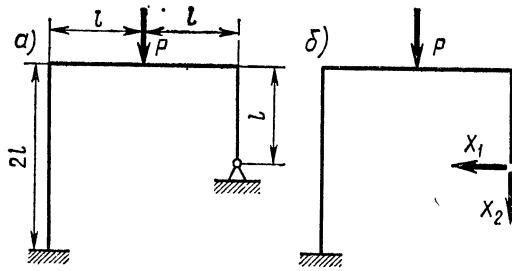


Рис. 91

взамен ее две силы X_1 и X_2 . Система канонических уравнений для двух неизвестных имеет вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\Delta_{1P};$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -\Delta_{2P}.$$

Теперь надо вычислить коэффициенты и свободные члены этой системы уравнений. Для этого построим эпюры моментов от заданной силы P и от единичных сил, заменяющих неизвестные X_1 и X_2 (рис. 92). Далее воспользуемся правилом Верещагина. Для определения δ_{11} надо умножить первую единичную эпюру саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(3 \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l + 2l^2 \cdot l \right) = \frac{3l^3}{EI}.$$

Легко определяются и остальные коэффициенты как результат перекрестного попарного перемножения трех эпюр:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2l^3}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{32l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{Pl^3}{2EI}; \quad \Delta_{2P} = \frac{29Pl^3}{6EI}.$$

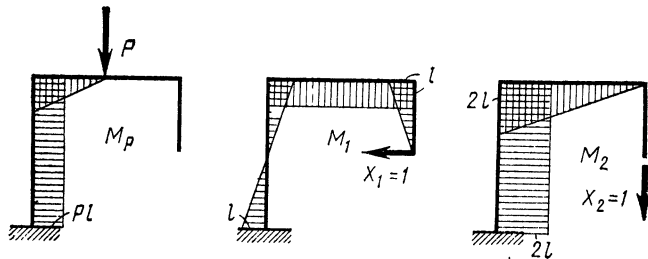


Рис. 92

Вводя коэффициенты в систему канонических уравнений, после необходимых сокращений получим:

$$3X_1 + 2X_2 = -\frac{P}{2};$$

$$2X_1 + \frac{32}{3}X_2 = -\frac{29}{6}P.$$

Решение системы уравнений дает:

$$X_1 = \frac{13}{84}P; \quad X_2 = -\frac{27}{56}P.$$

Знак «минус» при неизвестном X_2 указывает нам на то, что эта сила была нами ошибочно направлена вниз. На самом деле она направлена вверх.

Теперь остается построить суммарную эпюру изгибающих моментов. Удобнее всего это сделать, складывая алгебраически ординаты эпюры моментов заданных сил с ординатами двух эпюр единичных сил, умноженных соответственно на X_1 и X_2 , т. е.

$$M = M_P + M_1X_1 + M_2X_2.$$

На рис. 93 показана суммарная эпюра для рассматриваемой рамы.

Статическая неопределимость, как видим, несомненно вносит в вычислительную процедуру расчета определенные трудности. Но дело не в расчетных трудностях. Статически неопределимые системы обладают некоторыми особенностями, по существу отличающими их от статически определимых систем.

Статически неопределимые системы обладают, как правило, большей надежностью. Попросту говоря, выход из строя какой-либо связи, хотя бы из-за некачественного ее изготовления, сколь бы он ни был неприятен сам по себе, еще не влечет за собой пагубных последствий. Кинематическая неизменяемость системы сохраняется. Все, что воспринимала до разрушения эта связь, воспримут другие. Иное дело статически определимая система. По-

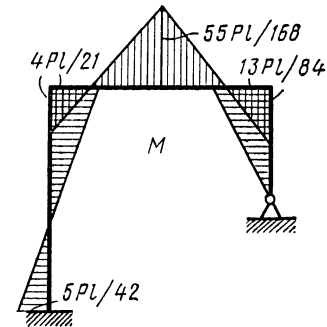


Рис. 93

сле выхода из строя какой-либо связи система превращается в механизм и теряет несущую способность.

Другая особенность статически неопределимых систем (и, пожалуй, отрицательная особенность) состоит в их чувствительности к изменениям температуры. Нагрев элементов конструкции статически определимой системы не приводит к возникновению температурных напряжений. В статически неопределимых системах, как правило, возникают температурные напряжения. Об этом мы говорили на одной из предыдущих лекций. И еще, вспомним, речь шла о монтажных напряжениях. Неточности в изготовлении отдельных узлов статически неопределимой системы вызывают внутренние монтажные усилия. Поэтому элементы статически неопределимых систем нуждаются в повышенных требованиях к точности изготовления.

ЛЕКЦИИ 31—32

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД СИЛ (продолжение)

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ ПРИ РАСКРЫТИИ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

На предыдущей лекции мы познакомились с одним из наиболее эффективных методов раскрытия статической неопределимости систем — с методом сил.

Решение задачи, как мы видели, сводится к системе канонических уравнений. Несмотря на то что эти уравнения линейны и их решение не представляет принципиальных трудностей, при большом числе неизвестных решение становится достаточно трудоемким. Именно поэтому целесообразно использовать любую возможность для упрощения уравнений метода сил. Конечно, степень статической неопределимости системы мы изменить не можем. Она предопределена наложенными связями. Но с помощью надлежащего выбора основной системы можно обратить в нуль ряд коэффициентов δ_{ik} и соответственно разбить систему n связанных уравнений на несколько независимых систем более низкого порядка. В частности, в стержневых системах, обладающих определенной регулярностью геометрических и жесткостных свойств, всегда можно упростить структуру канонических уравнений и снизить трудоемкость расчета. И среди таких систем в

первую очередь должны быть названы те, которые обладают свойствами симметрии.

Симметричной считается рама, для которой может быть указана плоскость, называемая плоскостью симметрии. Она разделяет раму на две части таким образом, что одна из них как по форме контура, так и по характеристикам жесткости является зеркальным отображением другой. Например, рама, показанная на рис. 94, имеет вертикальную плоскость симметрии, и правая часть рамы является зеркальным отображением левой.

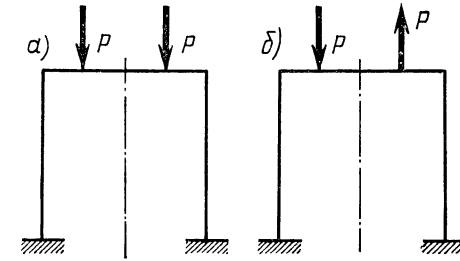


Рис. 94

Однако симметрия конструкции еще не означает симметрии системы. Симметрия системы требует также и симметрии нагрузки. Необходимо, чтобы нагрузка, действующая на левую часть рамы, была бы зеркальным отображением нагрузки, действующей на правую часть (рис. 94,а). Если же силы, приложенные к левой части симметричной рамы, по величине являются зеркальным отображением сил, приложенных к правой части, но противоположны им по знаку, то такая нагрузка называется кососимметричной или антисимметричной (рис. 94,б).

Заметим, что любую произвольную нагрузку, приложенную к симметричной раме, можно разложить на симметричную и кососимметричную составляющие. Поясним

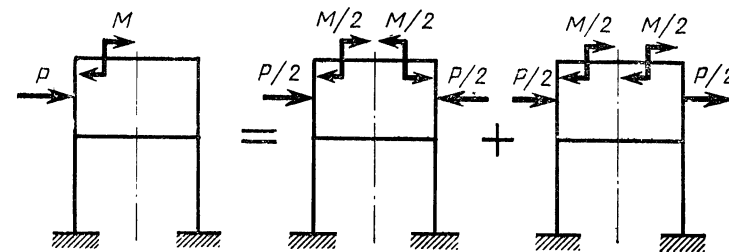


Рис. 95

эту процедуру разделения на примере рамы, показанной на рис. 95. Принцип довольно ясен. Сила, приложенная к одной части рамы, разделяется на две равные части, а ко второй половине рамы добавляются и вычитаются такие же равные друг другу слагаемые. В итоге нагрузки для двух новых систем (симметричной и кососимметричной) при совмещении дают нам заданную систему сил. В дополнение к проведенной классификации внешних сил следует разделить на две категории и внутренние силы.

Если рама разрезается некоторым сечением на две части, то в рассматриваемом сечении мы обнаруживаем

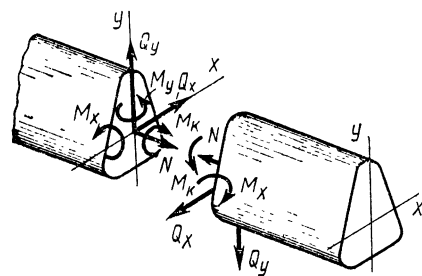


Рис. 96

в общем случае шесть силовых факторов (рис. 96). Относительно средней плоскости, как плоскости зеркального отображения, они обладают неодинаковыми свойствами. Нормальная сила N и изгибающие моменты M_x и M_y — симметричны, а поперечные силы Q_x и Q_y и крутящий момент M_k — кососимметричны.

Теперь, когда введены все необходимые нам понятия прямой и косой симметрии внешних и внутренних сил, можно уже непосредственно перейти к раскрытию статической неопределенности симметричных стержневых систем и посмотреть, к каким же упрощениям приводит учет свойств симметрии.

Сразу же следует отметить, что эти упрощения возникают не «автоматически», а достигаются лишь при надлежащем выборе основной системы.

Ограничимся рассмотрением системы, показанной на рис. 94. Эта рама три раза статически неопределима. Относительно невысокая степень статической неопределенности позволит нам, с одной стороны, не отягощать рассуждения громоздкими выкладками, а с другой — не нарушит общности суждений.

Итак, рассмотрим раму, показанную на рис. 94,а. Разрежем ее по плоскости симметрии и введем три неизвест-

ных X_1 , X_2 и X_3 , а далее построим соответствующие им три единичные эпюры изгибающих моментов (рис. 97).

Для определения коэффициентов системы канонических уравнений

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = -\Delta_{1P};$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\Delta_{2P};$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = -\Delta_{3P}$$

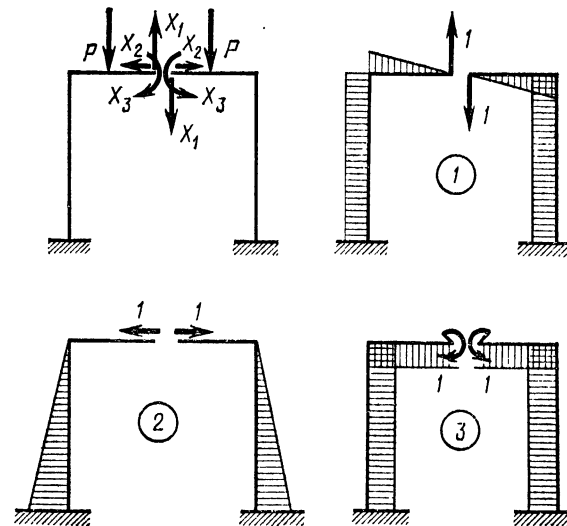


Рис. 97

нам необходимо произвести попарное перемножение трех построенных единичных эпюр. Но рассматривая эти эпюры, нельзя не обратить внимания на то, что кососимметричный силовой фактор X_1 порождает кососимметричную эпюру изгибающих моментов, а симметричные силовые факторы X_2 и X_3 , дают соответственно симметричные эпюры.

Вследствие свойств симметрии рамы результат перемножения эпюр для ее левой половины равен по величине произведению эпюр правой половины. Но если перемножается симметричная эпюра на кососимметричную, то произведение для правой и левой половин рамы противоположны по знаку. Следовательно, в результате мы по-

лучаем нулевое значение коэффициента. В данном примере в нуль обращаются коэффициенты δ_{12} , δ_{21} , δ_{13} и δ_{31} , и система канонических уравнений упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 &= -\Delta_{1P}; \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{33}X_3 &= -\Delta_{2P}; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= -\Delta_{3P}. \end{aligned}$$

Мы видим, что система канонических уравнений распалась на две независимые. Первая система включает одно, а вторая — два уравнения. При этом, хотя общее число неизвестных не изменилось, определяются они не из совместного решения системы трех уравнений, а из решения двух более простых систем, что дает несомненные преимущества.

Обобщая, можно сказать, что для симметричной рамы независимо от характера внешних сил симметричные и кососимметричные неизвестные силовые факторы определяются независимо. Но при этом нужно конечно помнить, что речь идет не о произвольно выбранной системе неизвестных, а только о тех, которые возникают в сечениях, проходящих через плоскость симметрии.

И наконец, для симметричных рам решение существенно упрощается в случае симметричных и кососимметричных нагрузок.

Если заданная нагрузка симметрична, то и эпюра изгибающих моментов от внешних сил будет симметричной. И тогда правые части подсистемы уравнений, содержащих кососимметричные факторы, обращаются в нуль. Это означает, что при симметричной нагрузке кососимметричные силовые факторы в плоскости симметрии равны нулю.

Если заданная нагрузка кососимметрична, то и эпюра изгибающих моментов будет кососимметричной, и, следовательно, в плоскости симметрии в нуль обращаются симметричные силовые факторы.

Конкретизируем сказанное примером той же самой рамы, нагруженной кососимметричным образом (см. рис. 94, б).

Снова разрежем раму по плоскости симметрии (рис. 98). Раз нагрузка кососимметрична, то в сечении изгибающий момент и нормальная сила как симметрич-

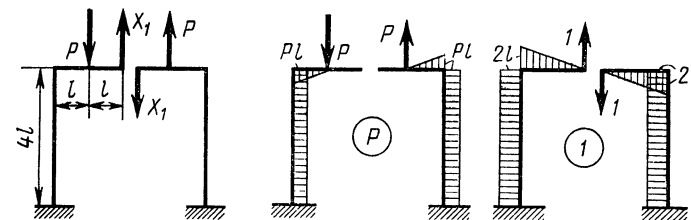


Рис. 98

ные силовые факторы обращаются в нуль. Остается только поперечная сила X_1 и остается только одно уравнение

$$\delta_{11}X_1 = -\Delta_{1P}.$$

Далее строим эпюры моментов от сил P и от единичной силы. После перемножения эпюр получаем:

$$\delta_{11} = \frac{112l^3}{3EI}; \quad \Delta_{1P} = -\frac{106Pl^3}{6EI}; \quad X_1 = \frac{53}{112}P.$$

Остается построить суммарную эпюру, накладывая на эпюру моментов от заданных сил эпюру моментов от единичной силы, где ординаты увеличены в X_1 раз. Суммарная эпюра показана на рис. 99.

В заключение надо заметить, что обычно в целях упрощения мы предполагаем, что перемещения вследствие сдвига и растяжения-сжатия стержней пренебрежимо малы по сравнению с перемещениями, возникающими вследствие изгиба. Во многих случаях это вполне оправдано. И все же при проектировании многих реальных и ответственных сооружений возникает необходимость вести расчет, принимая во внимание не только роль поперечных и осевых сил, но и при условии переменной жесткости на растяжение и изгиб. В результате трудоемкость расчета возрастает, но принципиальная схема остается прежней. Различие заключается лишь в том, что при определении коэффициентов δ_{ik} и нагрузочных членов Δ_{ip} канонических уравнений следует исходить не из правила

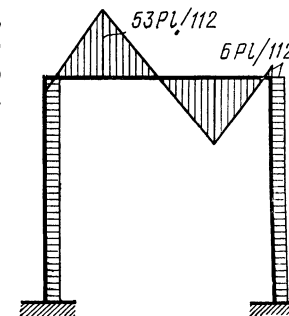


Рис. 99

Верещагина, а из интеграла Мора в его общей форме:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k dz}{EI(z)} + \int \frac{N_i N_k dz}{EF(z)} + \int \frac{k Q_i Q_k dz}{GF(z)}.$$

При определении отдельных интегралов в этом выражении приходится обращаться к приемам численного интегрирования.

2. НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ И УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Неразрезные балки принадлежат к числу весьма распространенных конструкций и в определенном смысле обладают свойством регулярности, используемым при раскрытии статической неопределенности.

Следует заметить, что в теории стержневых статически неопределимых систем неразрезная балка занимает особое положение. Будучи простейшей статически неопределимой системой, она сыграла (да и до сих пор играет) роль некоего пробного камня, на котором проверялись и оттачивались различные методы раскрытия статической неопределенности. И в этом смысле история создания методов расчета неразрезной балки, по существу, представляет собой историю методов раскрытия статически неопределимых стержневых систем вообще.

Мы уже не раз говорили, что трудности раскрытия статической неопределенности во многом определяются выбором варианта основной системы. Для неразрезной балки, показанной, например, на рис. 100, казалось бы наиболее естественно образовать основную систему путем удаления промежуточных опор и введением неизвестных реакций опор X_1, X_2, \dots

Из приведенных на рис. 100 в качестве примера эпюр моментов от единичных сил X_1 и X_k видно, что мы можем вычислить коэффициенты δ_{ik} системы канонических уравнений. Однако, такой вариант выбора основной системы, который кажется на первый взгляд самым естественным, в действительности неудачен, особенно при большом числе промежуточных опор. И вот почему.

Во-первых, все неизвестные X_1, X_2, \dots войдут во все уравнения системы канонических уравнений, ибо коэффициенты δ_{ik} , как правило, в нуль не обращаются. Во-вторых, значения единичных перемещений оказываются такими, что при решении системы уравнений возникают ма-

лые разности больших чисел. При этом для обеспечения достаточной точности расчета требуется производить все промежуточные вычисления с большим числом значащих цифр. И наконец, последнее и, пожалуй, самое огорчительное обстоятельство. Окончательные значения элементов изгиба балки (моменты, поперечные силы, прогибы в отдельных сечениях и т. п.) всегда будут вычисляться

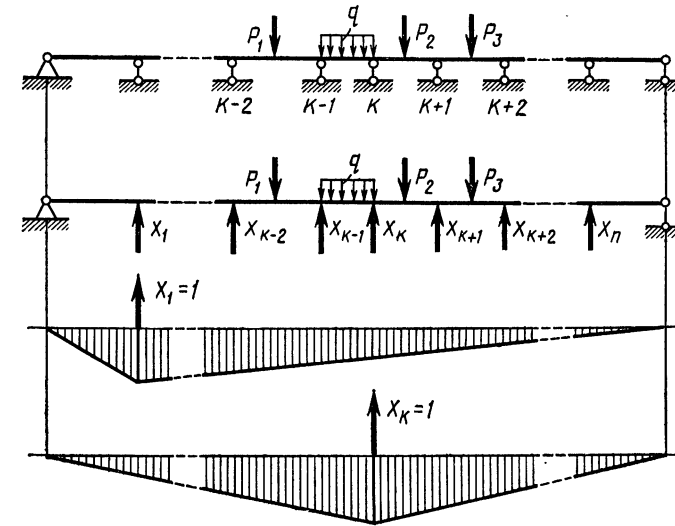


Рис. 100

как малая разность двух относительно больших величин, одна из которых соответствует действию всей внешней нагрузки в предположении, что промежуточные опоры отсутствуют, а другая — действию всех лишних реакций при том же предположении. Все эти соображения о недостатках выбранной основной системы имеют общее и, можно сказать, принципиальное значение вообще для всех статически неопределимых систем.

Сказанное можно пояснить примером. Положим, что нужно решить следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$4X_1 + 2X_2 = 5;$$

$$1,59X_1 + 0,8X_2 = 3.$$

Воспользуемся правилом Крамера и напишем выражение для X_1 в виде отношения двух определителей

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0,8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1,59 & 0,8 \end{vmatrix}} = \frac{4-6}{3,2-3,18} = -100.$$

Обратите внимание на знаменатель. Он представляет собой малую разность двух относительно больших чисел.

Теперь предположим, что первый коэффициент в первом из уравнений содержит ошибку всего в один процент, и вместо 4 следует принять 4,04. Из этой, казалось бы, малой причины вытекают весьма большие следствия. Теперь для X_1 получим:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0,8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4,04 & 2 \\ 1,59 & 0,8 \end{vmatrix}} = \frac{4-6}{3,232-3,18} = -38,5.$$

Как видим, всего из-за одного процента погрешности в одном коэффициенте знаменатель, а следом за ним и искомое неизвестное меняются в два с половиной раза. А все виновата малая разность больших чисел.

Из сказанного ясно, что выбор метода расчета и выбор основной системы надо по возможности подчинить следующим требованиям:

а) в каждое из уравнений системы должно входить по возможности меньшее число неизвестных;

б) при решении системы уравнений не должны возникать малые разности больших чисел.

Этим требованиям удовлетворяет вариант основной системы, полученной путем мысленного включения, «врезания» в балку внутренних шарниров над опорами (рис. 101). Здесь действие отброшенных связей между пролетами заменяется неизвестными моментами взаимодействия $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Моменты, показанные на рисунке, условимся считать положительными.

Посмотрим, к какому виду приводится типичное, скажем k -е, уравнение метода сил

$$\delta_{k1}X_1 + \dots + \delta_{k, k-1}X_{k-1} + \delta_{kk}X_k + \delta_{k, k+1}X_{k+1} + \dots + \delta_{kn}X_n = -\Delta_{kP}.$$

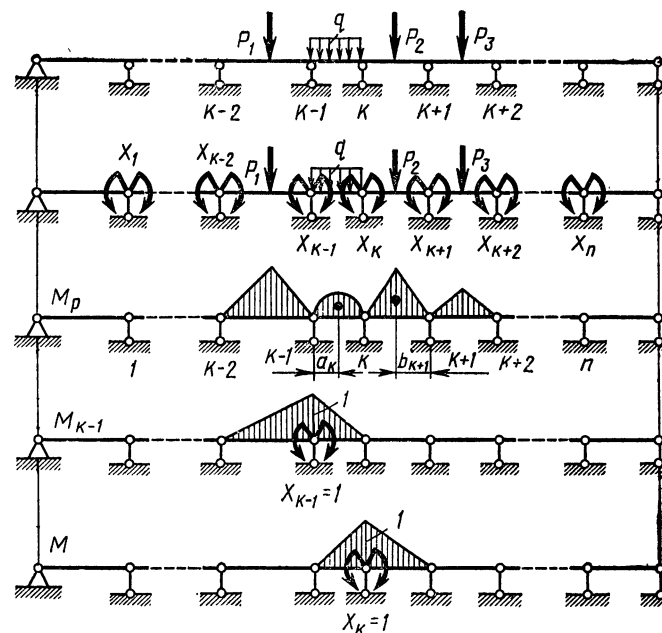


Рис. 101

Для определения коэффициентов этого уравнения необходимо располагать эпюрами изгибающих моментов от заданных внешних сил и от единичных моментов. Эпюры от заданных сил строятся для каждого пролета как для свободно опертой балки. Конечно, конкретный вид этих эпюр определяется характером изменения внешней нагрузки в пределах пролета. Далее строятся эпюры от опорных единичных моментов; они очень просты и показаны на рис. 101.

Судя по виду этих эпюр, нетрудно сообразить, что в k -м уравнении обратятся в нуль все коэффициенты, кроме $\delta_{k, k-1}, \delta_{k, k}, \delta_{k, k+1}$ и Δ_{kP} , и оно примет следующий вид:

$$X_{k-1}\delta_{k, k-1} + X_k\delta_{k, k} + X_{k+1}\delta_{k, k+1} = -\Delta_{kP}.$$

Полученное уравнение содержит только три неизвестных момента независимо от общего числа пролетов балки и носит название уравнения трех моментов.

Вывод уравнения трех моментов относится к числу важных достижений нашей науки середины XIX столетия.

Этот вывод был предложен выдающимся французским ученым Клапейроном, имя которого сохранилось не только в теории сопротивления материалов, но и в общей физике (теории газов). Небезынтересно отметить, что Клапейрон долго жил в Петербурге, в течение ряда лет работал в качестве профессора в Путейском институте, участвовал в проектировании Исаакиевского собора и нескольких висячих мостов в тогдашней русской столице. В 1830 г. Клапейрон впервые в России прочитал курс сопротивления материалов. Имя Клапейрона бережно сохраняется поныне в Ленинградском институте железнодорожного транспорта.

Вернемся к уравнению трех моментов. В дальнейшем примем для простоты, что жесткость балки на изгиб EI остается постоянной и одинаковой для всех пролетов. Тогда с помощью правила Верещагина мы без труда можем определить все коэффициенты уравнения:

$$\delta_{k, k-1} = \frac{l_k}{6EI}; \quad \delta_{k, k} = \frac{1}{3EI} (l_k + l_{k+1}); \quad \delta_{k, k+1} = \frac{l_{k+1}}{6EI};$$

$$\Delta_{kP} = \left(\frac{a_k \Omega_k}{l_k} + \frac{b_{k+1} \Omega_{k+1}}{l_{k+1}} \right) \frac{1}{EI}.$$

Здесь Ω_k и Ω_{k+1} — площади эпюр моментов заданных нагрузок на k -м и $(k+1)$ -м пролетах; a_k и b_{k+1} — расстояния от центров тяжести этих эпюр до опор $(k-1)$ -й и $(k+1)$ -й соответственно.

Подставив найденные значения коэффициентов в исходное уравнение, получим

$$X_{k-1} l_k + 2X_k (l_k + l_{k+1}) + X_{k+1} l_{k+1} =$$

$$= -6 \left(\frac{\Omega_k a_k}{l_k} + \frac{\Omega_{k+1} b_{k+1}}{l_{k+1}} \right).$$

Из совместного решения уравнений трех моментов определяются неизвестные моменты, после чего без особого труда можно построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Рассмотрим пример балки, показанной на рис. 102.

Система три раза статически неопределима. Врезаем на трех промежуточных опорах шарниры и вводим три неизвестных момента X_1 , X_2 и X_3 . Мы видим, что основная система представляет собой совокупность четырех не связанных между собой балок, для каждой из которых можно без труда построить эпюры изгибающих моментов от заданных сил (рис. 102). Теперь обратимся к уравнению

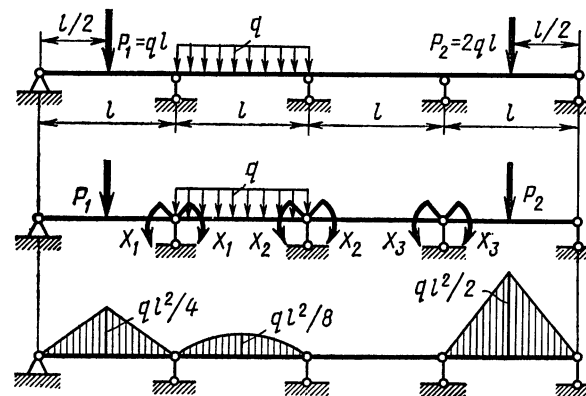


Рис. 102

трех моментов. Для опоры, которой присвоен номер «один», это уравнение напишется так:

$$X_0 + 4X_1 + X_2 = -\frac{6}{l^2} (\Omega_1 a_1 + \Omega_2 b_2).$$

Но момент на нулевой опоре равен нулю ($X_0=0$), а площади эпюр моментов от внешних сил для первого и второго пролета будут:

$$\Omega_1 = \frac{ql^3}{8}; \quad \Omega_2 = \frac{ql^3}{12}.$$

Расстояние от нулевой опоры до центра тяжести эпюры первого пролета составляет $a_1=l/2$. На втором пролете $b_2=l/2$. В итоге уравнение трех моментов принимает вид

$$4X_1 + X_2 = -\frac{5}{8} ql^2.$$

Аналогично можно составить еще два уравнения для опор 2 и 3:

$$X_1 + 4X_2 + X_3 = -\frac{ql^2}{4};$$

$$X_2 + 4X_3 = -\frac{3}{4} ql^2.$$

Решая совместно полученные три уравнения, находим:

$$X_1 = -\frac{73}{448} ql^2; \quad X_2 = \frac{12}{448} ql^2; \quad X_3 = -\frac{87}{448} ql^2.$$

Статическая неопределимость раскрыта. Остается построить эпюру изгибающих моментов. Она получается путем сложения эпюр моментов заданных сил с эпюрами от опорных моментов. Для этого обычно перевертывают эпюры от опорных моментов и накладывают на эпюру моментов от заданных сил (рис. 103). Полученные заштрихованные участки сносятся затем на горизонтальную прямую, и мы получаем таким образом окончательную суммарную эпюру изгибающих моментов.

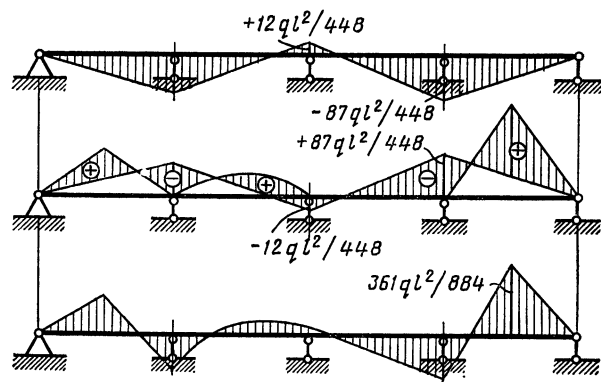


Рис. 103

3. ПЛОСКО-ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор мы рассматривали только плоские рамы, нагруженные системой сил, лежащих в ее плоскости. Однако нередко бывает так, что сама конструкция относится к категории плоских, но нагрузка ориентирована произвольно относительно этой плоскости и сообщает системе некие пространственные свойства. Такие системы называются плоско-пространственными.

При их анализе всегда целесообразно разложить внешние силы на составляющие двух типов — в плоскости конструкции и перпендикулярно ей. После определения внутренних сил в каждой из этих систем необходимо их соответствующим образом наложить друг на друга.

На первой схеме мы останавливаться не будем — это уже изученная нами плоская система, а все внимание мы сосредоточим на системах второго класса: рама плоская, а нагрузка действует перпендикулярно плоскости рамы.

Говоря дальше о плоско-пространственных системах, будем иметь в виду только этот случай нагружения.

В общем случае нагружения любой рамной конструкции в сечениях стержня возникает шесть внутренних силовых факторов — три силы и три момента (рис. 104). Это относится и к плоским системам при их произвольном нагружении. Но если нагрузка лежит в плоскости рамы, то из этих шести усилий три обращаются в нуль и сохраняется только нормальная сила N , поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . И напротив, если речь идет о нагружении рамы силами, перпендикулярными ее плоскости, то в сечениях возникают только три остальных усилия: поперечная сила Q_x , изгибающий момент M_y и крутящий момент M_K .

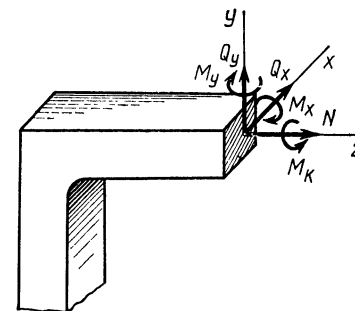


Рис. 104

Короче говоря, разделению внешней нагрузки на нагрузку в плоскости конструкции и перпендикулярную этой плоскости соответствует и разделение внутренних усилий на две группы — группу сил, лежащих в плоскости и не лежащих в плоскости.

Такое деление, однако, предусматривает необходимость условия, что одна из главных осей сечения также лежит в плоскости рамы. Если это условие не соблюдается, то, очевидно, рама, нагруженная в своей плоскости, будет изгибаться и из плоскости.

Отмеченное деление сил на два класса существенно упрощает раскрытие статической неопределимости плоско-пространственных систем. А кроме того, следует иметь в виду, что при раскрытии статической неопределимости любых плоско-пространственных и просто пространственных систем имеется возможность во многих случаях воспользоваться свойствами симметрии и косо́й симметрии, которые рассматривались нами для плоских систем, но полностью сохраняются и для пространственных.

Рассмотрим плоско-пространственную раму, показанную на рис. 105. Рама симметрична, и, разрезая ее по плоскости симметрии, мы получим неизвестную попереч-

ную силу X_1 , направленную перпендикулярно плоскости рамы, крутящий X_2 и изгибающий X_3 моменты.

Напишем систему канонических уравнений:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = -\Delta_{1P};$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = -\Delta_{2P};$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = -\Delta_{3P}$$

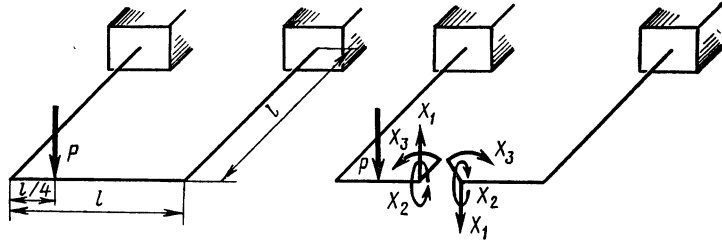


Рис. 105

и построим эпюры изгибающих и крутящих моментов от заданной и от единичных сил (рис. 106).

Нетрудно установить, что благодаря симметрии рамы коэффициенты $\delta_{13} = \delta_{31}$ и $\delta_{23} = \delta_{32}$ обращаются в нуль, и система принимает вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\Delta_{1P};$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -\Delta_{2P};$$

$$\delta_{33}X_3 = -\Delta_{3P}.$$

В принципе все остается тем же, что и в рассмотренных ранее примерах, и нам остается только остановиться на некоторых подробностях вычисления остальных, не обращающихся в нуль коэффициентов.

Мы опять будем исходить из правила Верещагина. Но теперь нам придется производить перемножение эпюр не только изгибающих, но и крутящих моментов. Например, при определении Δ_{1P} нам надо перемножить сначала эпюры изгибающих моментов:

$$\frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l - \frac{1}{2} \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{5}{6} \frac{l}{2} \right] =$$

$$= -\frac{133}{384} \frac{Pl^3}{EI},$$

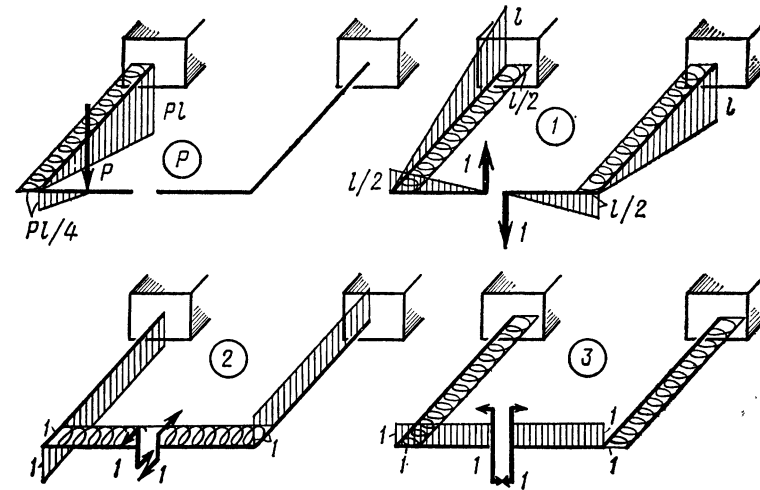


Рис. 106

а затем произвести перемножение эпюр крутящих моментов

$$-\frac{1}{GI_K} \frac{Pl}{4} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{8} \frac{Pl^3}{GI_K}.$$

Эти величины должны быть теперь просуммированы, и мы получим

$$\Delta_{1P} = -\frac{133}{384} \frac{Pl^3}{EI} - \frac{1}{8} \frac{Pl^3}{GI_K}.$$

Для завершения вычислений надо, по крайней мере, знать, в каком соотношении находится жесткость на изгиб EI с жесткостью на кручение GI_K . Это зависит в первую очередь от формы сечения. Так, для стержня квадратного сечения $a \times a$ момент инерции относительно центральной оси равен $a^4/12$, а значение $I_K = 0,141a^4$ (это значение сообщалось вам на лекции о кручении бруса некруглого сечения). Если принять, что $G = 0,4E$, то отношение $EI/GI_K = 1,30$. В таком случае искомое перемещение можно записать в виде

$$\Delta_{1P} = -\frac{133}{384} \frac{Pl^3}{EI} - 1,3 \frac{1}{8} \frac{Pl^3}{EI} = -0,509 \frac{Pl^3}{EI}.$$

Аналогично можно вычислить и остальные коэффициенты

$$\delta_{11} = \frac{1,4l^3}{EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{l^2}{EI}; \quad \delta_{22} = \frac{3,3l}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{3,6l}{EI}; \quad \Delta_{2P} = \frac{0,5Pl^2}{EI}; \quad \Delta_{3P} = -\frac{0,356Pl^2}{EI}.$$

И теперь система канонических уравнений принимает вид:

$$1,4X_1l - X_2 = 0,509Pl;$$

$$-X_1l + 3,3X_2 = -0,5Pl;$$

$$3,6X_3 = 0,356Pl.$$

Откуда

$$X_1 = 0,326P; \quad X_2 = -0,0528Pl; \quad X_3 = 0,0989Pl.$$

Теперь остается построить суммарную эпюру изгибающих и крутящих моментов, складывая, как обычно, эпюры от заданных сил с единичными эпюрами, умноженными на соответствующие значения найденных неизвестных X_1 , X_2 и X_3 (рис. 107).

Рассматривая эту эпюру, мы замечаем, что возникающие в раме крутящие моменты относительно невелики. В связи с этим возникает мысль, нельзя ли ими вообще пренебречь. И действительно, это возможно. Но так поступают обычно в случае, если жесткость стержней на кручение относительно невелика. Таким свойством обладают, как нам хорошо известно, открытые тонкостенные профили, например двутавровый профиль.

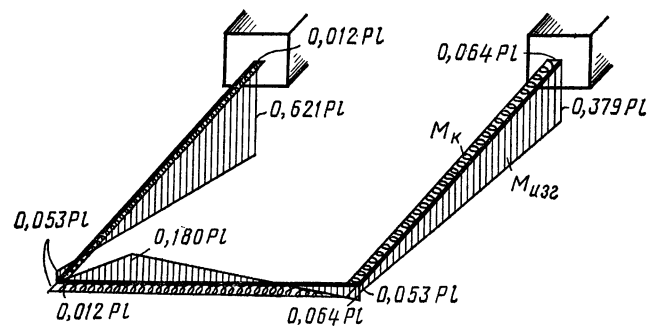


Рис. 107

Если жесткость на кручение весьма мала, мы можем считать, что поперечная балка (ригель) шарнирно скреплена с двумя консолями. Тогда система становится статически определимой, и изгибающие моменты в сечениях рамы определяются из условий равновесия (рис. 108).

Итак, мы научились находить внутренние усилия в статически неопределимых плоских и плоско-пространственных системах, а это позволяет перейти к вычислению

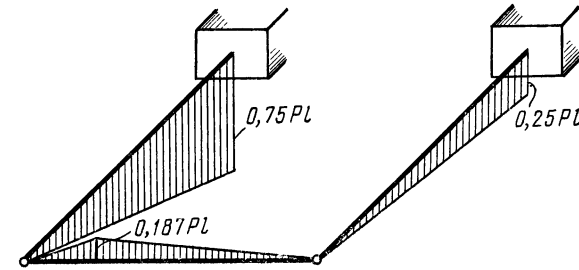


Рис. 108

напряжений, т. е. к расчету на прочность. Если форма и размеры сечений заданы, эта задача решается, как мы видели, без особого труда. Хуже обстоит дело, если перед конструктором стоит задача подбора сечений проектируемой рамы. Здесь складывается обычная для реального проектирования ситуация: для подбора сечений нужно знать внутренние усилия, а их нельзя найти, если сечения неизвестны.

Это затруднение преодолевается обычно способом последовательных приближений. Сначала надо задаться некоторыми, более или менее произвольными, соотношениями между жесткостями на кручение и на изгиб и найти внутренние усилия. Затем по найденным усилиям подбираются необходимые размеры сечений и вычисляется соотношение жесткостей. Как правило, они получаются отличными от тех, которыми задались вначале. После этого статически неопределимая система рассчитывается заново. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет найден оптимальный вариант конструкции, удовлетворяющий требованиям прочности и, например, условию минимального веса.

4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Если статическая неопределимость раскрыта, мы можем рассчитать конструкцию не только на прочность, но и на жесткость. Понятно, расчет на жесткость предполагает определение перемещений. Но определение перемещений в статически неопределимых системах имеет некоторые принципиальные особенности, на которых нам и следует в заключение остановиться.

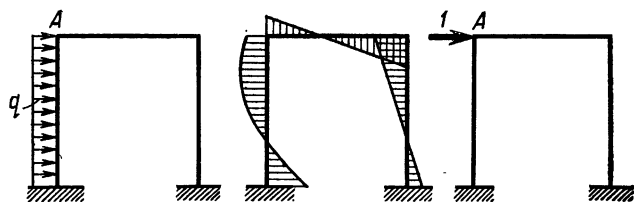


Рис. 109

Пусть для примера речь идет о раме, показанной на рис. 109. Допустим, что статическая неопределимость уже раскрыта и мы построили эпюру изгибающих моментов, но нам надо определить горизонтальное перемещение в точке A. Значит, нам надо в этой точке приложить единичную силу и построить соответствующую ей эпюру моментов, а затем произвести перемножение эпюр, как это и следует из правила Верещагина.

И вот здесь обнаруживается огорчительная необходимость повторного раскрытия статической неопределимости для построения единичной эпюры моментов. Работа по раскрытию статической неопределимости как бы удваивается.

Однако возникшие трудности преодолеваются весьма просто. Заданная статически неопределимая система полностью тождественна статически определимой системе, например, показанной на рис. 110, если только неизвестные X_1 , X_2 и X_3 нами определены по правилам раскрытия статической неопределимости. Эпюра изгибающих моментов будет такой же, как показано на рис. 109. Такими же будут и перемещения. А раз так, то перемещения мы можем искать не в заданной статически неопределимой, а в тождественной ей статически определимой раме. Поэтому и единичную силу мы приложим к статически определимой

раме (рис. 110). Единичная эпюра теперь строится без труда. При этом заметим: единичную силу мы можем прикладывать к *любой* статически определимой системе, полученной из заданной путем отбрасывания дополнительных связей.

Таким образом, после того как статическая неопределимость раскрыта, определение перемещений в статически неопределимой системе ничуть не сложнее определения перемещений в статически определимых системах.

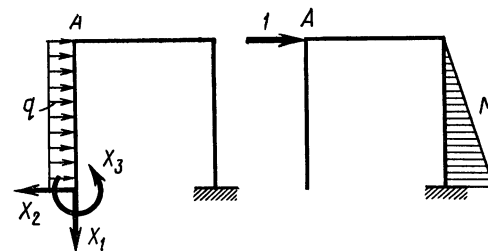


Рис. 110

ЛЕКЦИИ 33—34

ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

1. УПРУГИЕ И ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Расчетные соотношения, которые были изложены в предыдущих лекциях, в подавляющем большинстве относятся только к линейно деформируемым материалам и справедливы лишь при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности. Конечно, несмотря на такое ограничение, эти соотношения очень важны, так как в эксплуатационных условиях напряжения в элементах конструкции, как правило, ниже предела пропорциональности и близкого к нему предела упругости; во всяком случае, обычно именно к этому стремится конструктор, всегда опасаящийся нежелательных последствий перехода конструкции в «запредельное» состояние. Но чтобы правильно оценить действительные опасности, связанные с таким переходом, необходимо углубиться в закономерности поведения элементов конструкции в условиях, когда наряду с упругими возникают и пластические деформации. Есть и еще одна причина, которая придает большое

практическое значение анализу пластического деформирования. Дело в том, что «запредельное» нагружение лежит в основе многих технологических процессов, например навивки пружин, холодной и горячей гибки труб, штамповки тонкостенных сосудов, вытяжки гильз и многих других производственных операций. Изучению основных закономерностей

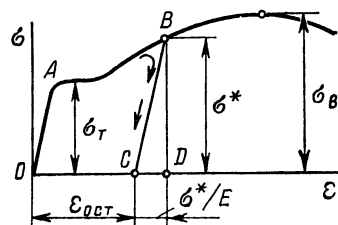


Рис. 111

пластического деформирования и посвящена настоящая лекция. На рис. 111 показана знакомая вам диаграмма испытания малоуглеродистой стали. По оси абсцисс отложена деформация, а по оси ординат — напряжение. На диаграмме отмечена площадка текучести и соответствующее ей напряжение — предел текучести σ_T . Точке максимума кривой соответствует предел прочности — отношение максимальной силы к начальной площади сечения образца.

Такая диаграмма получается при прямом монотонном нагружении образца, когда задается его удлинение, а силовой измеритель фиксирует возникающее при этом усилие. Наблюдая монотонное нагружение, нельзя получить сведений об упругости материала, т. е. о его способности восстанавливать первоначальные размеры после разгрузки образца. Для того чтобы судить об упругости или неупругости, необходимо изучить, как выглядит процесс разгрузки.

Если материал вполне упругий, то после разгрузки длина образца полностью восстанавливается, независимо от того, линейна или нелинейна его характеристика. Таким образом нелинейность зависимости $\sigma = \sigma(\epsilon)$ и существенные отклонения от закона Гука в принципе не обязательно означают, что материал неупругий — материал может вести себя упруго, оставаясь нелинейно деформируемым.

Однако большинство реальных конструкционных материалов, и в частности малоуглеродистая сталь, для которой построена эта диаграмма, обладают свойством упругости только в относительно узких пределах, пока напряжение не превосходит некоторого определенного

уровня — предела упругости, довольно близкого к пределу текучести.

Мы уже знаем, что за пределами упругости диаграмма разгрузки не повторяет диаграмму нагружения, а следует только ее линейной части, т. е. если мы создадим в образце напряжение σ^* (рис. 111), то при разгрузке диаграмма будет иметь вид прямой BC , параллельной начальному участку нагружения OA . Эта особенность поведения материалов обычно называется законом Герстнера.

Ф. Герстнер, установивший этот закон, был организатором и первым директором созданного в 1806 г. в Праге Чешского технического института. Любопытно, что позже сын Герстнера возглавил в России строительство первой железной дороги из Петербурга в Царское Село (ныне город Пушкин).

В соответствии с законом Герстнера, мы практически отождествляем пределы упругости и пропорциональности, хотя и должны по сути признавать смысловое различие этих величин, как и самих понятий упругости и пропорциональности.

Итак, когда мы выходим за рамки закона Гука, связь между напряжениями и деформациями становится не только нелинейной, но оказывается к тому же еще и неоднозначной, а кроме того, она зависит и от истории нагружения. Поэтому, если напряжения превосходят предел пропорциональности и предел упругости, все те соотношения, которые были выведены нами ранее с использованием закона Гука, становятся неверными «вдвойне». При решении задач за пределом упругости надо прежде всего условиться об истории нагружения, а оказавшись за пределом пропорциональности, надо позаботиться о том, как отразить реальную зависимость напряжений от деформаций, не следующую уже закону Гука.

Для описания зависимости между σ и ϵ при прямом нагружении существует много приемов. Их многообразие обусловлено вполне определенными причинами. Прежде всего получаемые из испытания образцов диаграммы весьма различны и зависят в первую очередь от типа материала. Аппроксимирующая диаграмму функция должна возможно точно отражать полученную кривую. И наконец, она должна содержать минимальное число параметров от избыточности которых усложняется дальнейшее решение, а от недостатка — снижается его точность.

Для описания нелинейной зависимости, характеризующей свойства пластически деформируемых материалов, лучше отказаться от искусственных аналитических выражений, претендующих на описание всей диаграммы монотонного нагружения, а воспользоваться упрощенной схемой, показанной на рис. 112, а. Эта диаграмма содержит всего два участка, описанных прямыми с различными углами наклона. Первый участок соответствует условиям применения закона Гука, а второй — упрощенно

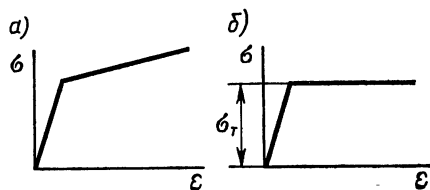


Рис. 112

описывает процесс монотонного «запредельного» нагружения. Для некоторых материалов можно пойти еще дальше и принять, что второй участок представляет собой горизонтальную прямую (рис. 112, б). Эта прямая описывает пластическое деформирование, которое считается происходящим при неизменном напряжении; оно здесь обозначено через σ_r . Это предельное напряжение есть одновременно и предел текучести, и предел пропорциональности, и предел упругости.

Материал, свойства которого описываются такой схематизированной диаграммой, называется идеальным упруго-пластичным материалом. Его механические свойства определяются всего двумя постоянными — модулем упругости E и пределом текучести σ_r . И в дальнейшем мы будем пользоваться этим упрощенным представлением. С помощью модели идеального пластичного материала можно без особого труда уловить и количественно описать многие своеобразные явления, характерные для рассматриваемого класса задач.

2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим некоторые простейшие системы, элементы которых обладают свойствами идеальной пластичности. Начнем со статически определимых систем и обратимся к достаточно простому, но характерному случаю (рис. 113).

Жесткая балка шарнирно закреплена слева, а справа подвешена к стержню из идеального упруго-пластичного материала. Внешняя нагрузка q равномерно распределена по длине балки l . Растягивающее усилие в стержне определяется однозначно из уравнений равновесия и равно, очевидно, $ql/2$. Следовательно, напряжение в сечениях стержня будет $\sigma = ql/2F$.

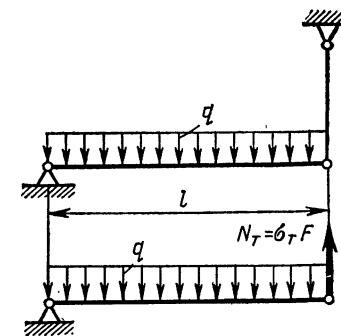


Рис. 113

Когда в процессе увеличения внешних сил напряжение в стержне достигнет предельного значения σ_r , удлинение стержня становится неопределенным. Можно сказать, что система при этом утрачивает свойства геометрической неизменяемости и превращается в механизм. Обобщая, можно сказать, что вообще в любой статически определимой системе, когда одно определяемое из уравнений равновесия усилие достигает предельного значения, происходит как бы выключение связи. Она не может дать больше положенного, и вслед за этим теряется свойство кинематической неизменяемости системы.

На рис. 114 показан еще один пример подобного рода — закручивание стержня тонкостенного замкнутого профиля. Наибольшее касательное напряжение возникает в наиболее тонком участке контура и равно, как мы знаем,

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{2F \cdot \delta_{\min}}$$

Если напряжение τ_{\max} достигнет некоторого предельного значения, замкнутый контур как бы разрезается в продольном направлении и превращается в открытый профиль, сопротивление которого на кручение, как мы знаем, неизмеримо меньше,

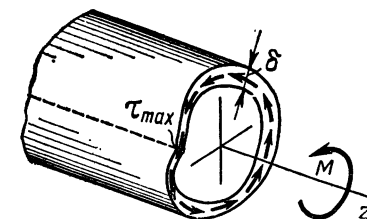


Рис. 114

чем у замкнутого профиля. Таким образом, не будет ошибкой, если мы скажем, что по достижении касательным напряжением предельного значения стержень превращается в механизм.

При использовании любых упрощенных, идеализированных схем и понятий надо, однако, иметь в виду, что обнаруживаемые в результате анализа эффекты лишь приближенно и схематично отражают истинные реальные явления. Это полностью, конечно, относится и к нашим задачам. Обнаруженная в наших рассуждениях полная утрата геометрической неизменяемости и потеря несущей способности есть следствие принятой схемы идеального упруго-пластичного материала. В действительности приближение к пределу текучести будет сопровождаться резким (хотя и не стопроцентным) падением жесткости конструкции. Наши рассуждения представили это свойство реальной конструкции в крайнем, можно сказать, заостренном виде. Такое «заострение» действительных свойств типично для многих теорий сопротивления материалов; вы уже с ними встречались на предыдущих лекциях и не раз встретитесь в последующих. Впрочем, это относится не только к нашей дисциплине, но и ко всем тем, где используются упрощенные, схематизированные модели, например к гидродинамике и аэродинамике.

3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим пример статически неопределимой системы, показанной на рис. 115. Эта простая система позволит нам выявить своеобразие запредельного нагружения вообще любых статически неопределимых систем. Стержни, на которых подвешена балка, будем считать одинаковыми, а балку по-прежнему абсолютно жесткой.

При малом значении внешней нагрузки q оба стержня находятся в упругом состоянии и усилия в них определяются известным способом раскрытия статической неопределимости. Понятно, что усилие в правом стержне больше, чем в левом: его удлинение при жесткой балке в два раза больше.

При постепенном увеличении нагрузки будет достигнуто состояние, при котором в правом стержне возникнут пластические деформации, а левый останется в упругом состоянии. Вследствие этого система сохраняет некоторый резерв для последующего сопротивления увели-

чивающейся нагрузке, хотя усилие в правом стержне и застыло на определенном уровне. Здесь следует обратить внимание на то, что на этом этапе жизни конструкции (рис. 115, б) система является статически определимой. Действительно, поскольку усилие в правом стержне известно, усилие в левом определяется из уравнения равновесия. Вот результат:

$$N_1 = 2(qa - \sigma_T F).$$

Таким образом, по достижении предельного состояния одна из связей как бы выключается, а число статической неопределимости уменьшается на единицу.

При дальнейшем увеличении нагрузки снимается еще одна связь и в данном случае система превращается в механизм (см. рис. 115, в). Из условия равновесия легко определяется и соответствующее этому состоянию значение предельной нагрузки:

$$q_{\text{пред}} = 3\sigma_T F / 2a.$$

График, показанный на рис. 116, отражает процесс монотонного нагружения системы. По оси абсцисс отложено вертикальное перемещение конца балки f , а по оси ординат — значение нагрузки q . Первый участок ломаной прямой соответствует упругому нагружению. Этот участок заканчивается, когда в правом стержне возникает текучесть. Далее, на втором участке происходит нагружение системы с фиксированным предельным значением силы в правом стержне. Жесткость системы, характеризующаяся наклоном отрезка диаграммы (рис. 116), меньше, чем на первом эта-

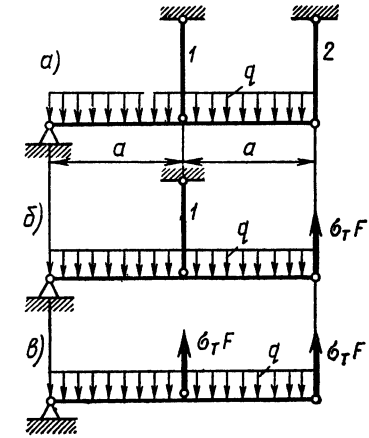


Рис. 115

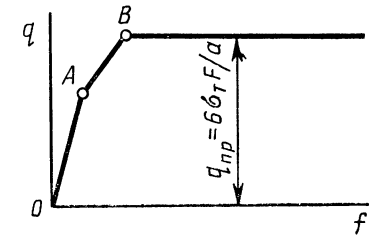


Рис. 116

пе. Наконец, наступает предельное состояние системы. Любопытно, что при возрастании нагрузки система постепенно становится все более простой с расчетной точки зрения. Для построения первого участка приведенной диаграммы нужно раскрыть статическую неопределимость. Построение второго участка проще: здесь нужно рассматривать статически определимую систему. Что же касается предельного значения нагрузки, то ее можно найти без поэтапного рассмотрения предыдущих участков диаграммы, записывая уравнение равновесия для предельного состояния и считая усилия в стержнях известными и равными предельным. Между прочим заметим, если балка не вполне жесткая, то предельная нагрузка все равно имеет то же самое значение (конечно, если сама балка не разрушится при меньших нагрузках).

Таким образом, в процессе нагружения наша система дважды преобразуется, меняет свою структуру. Такие преобразования связаны с выключением связей и характерны вообще для всех статически неопределимых систем. Последовательное выключение наиболее напряженных связей означает постепенное понижение порядка статической неопределимости и приводит к превращению ее в статически определимую систему, а затем — в механизм.

Конечно, поэтапное рассмотрение всего процесса превращения многократно статически неопределимой системы в механизм — дело хлопотное, хотя в принципе и не очень сложное. Однако предельную нагрузку можно найти сразу из уравнений равновесия в предельном состоя-

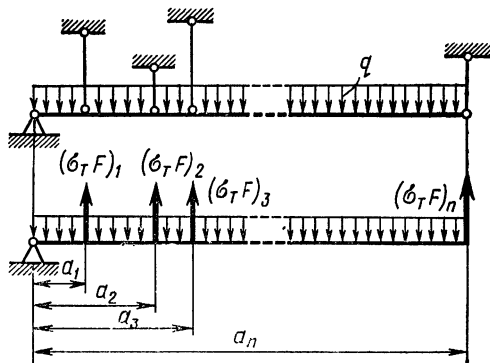


Рис. 117

нии. Например, для системы, показанной на рис. 117, предельная нагрузка определяется из очевидного уравнения равновесия:

$$\frac{qa_n^2}{2} = \sum_1^n (\sigma_T F)_i a_i.$$

Любопытно, что задача определения предельной нагрузки во много раз проще определения упругих напряжений в статически неопределимой системе. Но, конечно, рассматривая только предельное состояние, мы упускаем из поля зрения многие подробности протекающего при нагружении процесса.

4. РАСЧЕТ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ НАГРУЗКАМ

Стремясь исключить возникновение пластических деформаций, конструктор всегда назначит такие размеры, чтобы уровень напряжений, возникающих в условиях эксплуатации, был ниже предела текучести. Коэффициент запаса, о котором уже достаточно говорилось на прошлых лекциях, представляет собой отношение предела текучести к рабочему напряжению и характеризует «удаленность» состояния конструкции от того порога, за которым неизбежны остаточные деформации. С этим вопросом мы хорошо знакомы.

Вместе с тем возможен и другой подход к расчету на прочность. Под коэффициентом запаса можно понимать отношение предельной нагрузки к рабочей, эксплуатационной нагрузке. Он показывает, во сколько раз должна увеличиться рабочая нагрузка, чтобы несущая способность конструкции была полностью исчерпана. Этот коэффициент запаса в отличие от коэффициента запаса по напряжениям называется коэффициентом запаса по разрушающим нагрузкам.

Коэффициенты запаса ни в коем случае не следует противопоставлять друг другу и считать один истинным, а другой ложным. Каждый из них хорош в своем месте. В одних случаях целесообразно рассчитывать по одному методу, в других — по другому. Например, все элементы машиностроения, где сочленение деталей происходит по определенной системе допусков и посадок, рассчитываются, как правило, по допускаемым напряжениям. Это детали двигателей внутреннего сгорания, коленчатые валы и пр. Это упругие элементы приборов и вообще пружины,

где надо следить не только за прочностью, но и за упругостью. Здесь расчет по напряжениям просто неизбежен. Расчет по разрушающим нагрузкам характерен для авиации и ракетостроения, особенно для конструкций одноразового действия. Здесь коэффициент запаса определяется по разрушающим нагрузкам и проверяется путем специально поставленных испытаний ответственных элементов вплоть до полного их разрушения в лабораторных условиях.

Определение разрушающих нагрузок несравненно проще, чем определение напряжений. И эта простота во многих случаях окутывает сохраняющееся у нас неведение о подробностях и деталях возникающего в отдельных узлах напряженного состояния.

5. ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ОСТАТОЧНЫЕ СИЛЫ

До сих пор мы говорили о процессах, которые протекают в стержневых статически неопределимых системах при монотонном увеличении внешних сил, но пока умалчивали о том, что будет, если систему вывести за пределы упругих деформаций, а затем разгрузить. Легко понять, что после разгрузки статически определимой системы внутренние силы и напряжения обращаются в нуль, хотя остаточные деформации и сохраняются. Что же касается статически неопределимой системы, то она после разгрузки сохраняет не только остаточные деформации, но и остаточные напряжения. Нагрузки нет, а внутренние силы есть. Они самоуравновешены.

Для того чтобы разобраться в этом вопросе, мы рассмотрим уже знакомую нам статически неопределимую систему, показанную на рис. 115.

При постепенном возрастании нагрузки происходит удлинение обеих стержней, причем удлинение второго стержня вдвое больше, чем первого. Поэтому на упругой стадии деформирования усилие во втором стержне вдвое больше. Но вот во втором стержне возникла текучесть, и рост второго усилия прекращается, а усилие в первом стержне продолжает возрастать. Не дожидаясь пока нагрузка q достигла предельного значения, зафиксируем ее на уровне q^* . Из условий равновесия определяем усилие N_1 (см. рис. 115,б). Запишем здесь же и значение силы N_2 :

$$N_1 = 2(q^*a - \sigma_T F); \quad N_2 = \sigma_T F.$$

Теперь произведем разгрузку. Согласно закону Герстнера разгрузка следует линейному закону. Поэтому мы можем вычислить силы N_1 и N_2 при разгрузке так, как будто стержни деформируются упруго. При этом, конечно, надо раскрыть статическую неопределимость. Операция эта нам хорошо знакома и мы получим усилия, соответствующие разгрузке:

$$N_{1\text{раз}} = \frac{2}{5} q^* a; \quad N_{2\text{раз}} = \frac{4}{5} q^* a.$$

Теперь эти усилия остается вычесть из усилий, которые возникли в стержнях при нагрузке, и мы получим:

$$N_{1\text{ост}} = 2(q^*a - \sigma_T F) - \frac{2}{5} q^* a = 2 \left(\frac{4}{5} q^* a - \sigma_T F \right);$$

$$N_{2\text{ост}} = \sigma_T F - \frac{4}{5} q^* a = - \left(\frac{4}{5} q^* a - \sigma_T F \right).$$

Так как $4q^*a/5 > \sigma_T F$, то остаточное усилие в первом стержне растягивающее, а во втором — сжимающее, и обе остаточные силы образуют самоуравновешенную систему: относительно левой шарнирной опоры они дают равные и противоположно направленные моменты.

Если нагружение доведено до предельного состояния, т. е. если $q^* = 3\sigma_T F/2a$, после чего произведена разгрузка, то мы получим

$$N_{1\text{ост}} = \frac{2}{5} \sigma_T F; \quad N_{2\text{ост}} = - \frac{1}{5} \sigma_T F.$$

Рассмотренная статически неопределимая система удобна для нас как некий эталонный пример, на котором достаточно просто поясняется и понятие предельной силы, и способ определения остаточных сил. Но этим, в сущности, значение рассмотренной системы и исчерпывается. Практического интереса она не представляет. И сейчас мы обратимся к более важной с этой точки зрения задаче об изгибе упруго-пластической балки.

6. ИЗГИБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ

На рис. 118 показана эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе. Эта эпюра нам хорошо известна. Пусть изгибающий момент велик и напряжение нигде — даже в наиболее напряжен-

ных точках — не превосходит предела текучести. Посмотрим, как будет видоизменяться эпюра по мере возрастания изгибающего момента. Сначала, очевидно, все ординаты эпюры будут пропорционально увеличиваться, но форма эпюры останется той же. Наконец, напряжения в крайних точках сечения достигнут предела текучести. Это граница чисто упругого деформирования балки, чему соответствует изгибающий момент $M_T = \sigma_T W_x$. В частности,

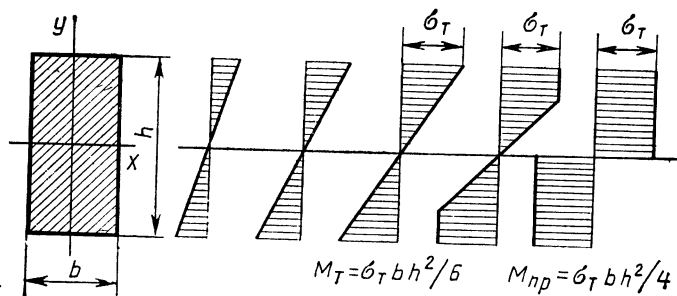


Рис. 118

если сечение балки имеет прямоугольную форму, то этот изгибающий момент составляет $\sigma_T b h^2 / 6$. При дальнейшем возрастании изгибающего момента деформации будут возрастать, но в пластически растягиваемой и сжимаемой зонах напряжения не могут быть больше предела текучести, который при растяжении и сжатии мы считаем одинаковым. Если изгибающий момент увеличивать и дальше, то размеры пластических зон будут увеличиваться, пока не будет достигнуто предельное состояние. Здесь полностью исчерпывается несущая способность балки.

Предельное значение момента определить очень просто. Эпюра напряжений в сечении имеет вид двух прямоугольников и сводится к паре сил с плечом $h/2$. А каждая сила равна произведению предела текучести σ_T и площади сечения $bh/2$, т. е.

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}.$$

Предельный момент, как видим, в полтора раза больше ранее найденного момента $\sigma_T b h^2 / 6$, который соответствует первому появлению текучести в сечении.

Чтобы придать выражению предельного момента привычную форму, обозначим $bh^2/4$ через $W_{\text{пр}}$, и тогда

$$M_{\text{пр}} = \sigma_T W_{\text{пр}}.$$

Величину $W_{\text{пр}}$ называют пластическим моментом сопротивления. Для прямоугольного сечения он на 50% больше обычного момента сопротивления W_x . Эти 50% и определяют те дополнительные возможности сопротивления, которые еще таятся в прямоугольном сечении после того, как появились первые признаки пластических деформаций.

Соотношение между пластическим и обычным «упругим» моментом сопротивления зависит от формы сечения. Для прямоугольника — 1,5, для круга — 1,7, для ромба — 2,00. Для двутавра отношение $W_{\text{пр}}$ к W_x равно приблизительно 1,17. В общем, можно заметить, чем рациональнее форма сечения по обычной оценке напряжений, тем ближе значение $W_{\text{пр}}$ к значению W_x и тем меньше числовое различие между расчетами по напряжениям и по предельным нагрузкам.

Теперь посмотрим, что будет происходить, если увеличивать внешний момент сверх предельного значения. Рассмотрим в качестве примера обычную двухопорную балку, показанную на рис. 119. Когда изгибающий момент в среднем сечении балки достигнет значения $\sigma_T W_x$, появятся первые признаки пластических деформаций. Если нагрузку увеличивать и далее, то по достижении моментом предельного значения балка теряет несущую способность. В наиболее напряженном сечении образуется, как говорят, пластический шарнир. Балка как бы надламывается, превращаясь в механизм. Предельное значение силы определяется из очевидного равенства.

$$P_{\text{пр}} l / 4 = \sigma_T W_{\text{пр}}.$$

Рассмотрим еще пример (рис. 120). Балка зашкреплена по концам и нагружена равномерно распределенной нагрузкой q . Судя по эпюре изгибающих моментов, нетруд-

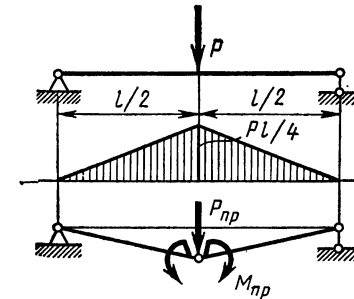


Рис. 119

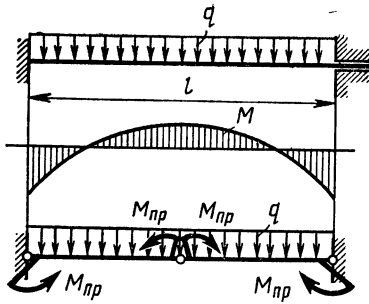


Рис. 120

но установить, что по мере роста нагрузки сначала появятся два пластических шарнира в заделке, справа и слева. Но балка при этом, став шарнирно опертой, несущей способности не теряет. Она превратится в механизм, если образуется еще один пластический шарнир — на этот раз посередине пролета (рис. 120). Рассматривая усло-

вия равновесия системы с тремя шарнирами, легко определить предельное значение нагрузки:

$$\frac{q_{пр} l^2}{8} = 2M_{пр},$$

где $M_{пр} = \sigma_T W_{пр}$, а $W_{пр}$ зависит от формы поперечного сечения балки.

На рис. 121 показана П-образная рама, нагруженная силой P . Предельное состояние равновесия наступает

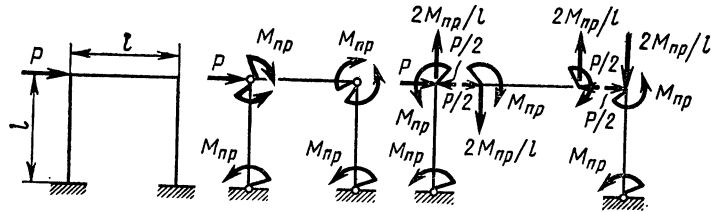


Рис. 121

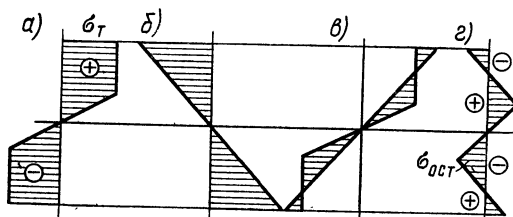


Рис. 122

после образования четырех пластических шарниров. Из условия равенства нулю суммы моментов относительно шарнира А (рис. 121) без труда определяется предельная нагрузка

$$\frac{P_{пр} l}{2} = 2M_{пр}.$$

Из приведенных примеров можно сделать совершенно справедливый вывод о том, что определить предельную нагрузку для рамы значительно проще, чем раскрыть ее статическую неопределимость. И это довольно существенный довод в пользу применения и развития расчетов по предельным нагрузкам.

Заканчивая вопрос об упруго-пластическом изгибе балки, рассмотрим остаточные напряжения, которые сохраняются в поперечных сечениях балки после ее разгрузки. Эпюра этих напряжений имеет довольно любопытный вид, а принцип ее построения нам должен быть ясен из предыдущего.

Разгрузка подчиняется закону Герстнера, т. е. закону упругих деформаций. Значит, из эпюры напряжений, полученных при нагружении (рис. 122, а), надо вычесть линейную эпюру (рис. 122, б), приводящуюся к тому же моменту, который был приложен при нагружении. Линейную эпюру разгрузки перевортываем и накладываем на эпюру нагрузки. Далее получаем разность ординат, из которых и формируется эпюра остаточных напряжений $\sigma_{ост}$ (рис. 122, в). Эпюра остаточных напряжений самоуравновешена. Нормальная сила и изгибающий момент в сечении равны нулю.

Подведем итоги. Несмотря на достаточную условность использованной нами модели идеального упруго-пластического материала, нам удалось обнаружить и аналитически описать явления и эффекты, которые принципиально нельзя уловить, если исходить из представлений о чисто упругих деформациях. Конечно, в особо ответственных случаях рассмотренная модель также нуждается в уточнениях. Это относится ко многим практическим задачам, рассматривать которые в этой первой ознакомительной лекции у нас нет возможности.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора	3
Лекции 17—18. Чистый изгиб (А. В. Дарков)	4
Лекции 19—20. Напряжения при поперечном изгибе (А. В. Дарков)	19
Лекции 21—22. Косой изгиб и внецентренное растяжение-сжатие (А. В. Дарков, М. Г. Яковенко)	30
Лекции 23—24. Определение перемещений при изгибе прямого бруса (В. И. Феодосьев)	47
Лекции 25—26. Потенциальная энергия и основные энергетические теоремы (В. И. Феодосьев)	70
Лекции 27—28. Определение перемещений методом Мора (Б. Я. Лашеников)	90
Лекции 29—30. Статически неопределимые системы. Метод сил (Я. Г. Пановко, В. А. Постнов)	105
Лекции 31—32. Статически неопределимые системы. Метод сил (продолжение) (Я. Г. Пановко, В. А. Постнов)	116
Лекции 33—34. Основы расчетов на прочность при наличии пластических деформаций (Я. Г. Пановко)	135

Телевизионный курс сопротивления материалов

ИЗГИБ И СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Под общей редакцией В. И. Феодосьева

Зав. редакцией К. И. Аношина
Мл. редактор Н. М. Иванова
Художник О. В. Камаев
Художественный редактор Н. К. Гуторов
Технический редактор Е. И. Герасимова
Корректор Р. К. Косинова

ИБ № 2871

Изд. № От-329. Сдано в набор 06.06.80. Подп. в печать 30.10.80. Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 7,98 усл. печ. л. 7,14 уч.-изд. л. Тираж 15 000 экз. Зак. № 521. Цена 25 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.
Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.