

# ТЕЛЕВИЗИОННЫЙ КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

## РАСТЯЖЕНИЕ И КРУЧЕНИЕ

605  
Т31  
УДК 620 1(075)

**В. И. Феодосьев, Ю. Н. Работнов,  
А. В. Дарков, И. В. Родин,  
Б. Я. Лашенников**

**Т31 Телевизионный курс сопротивления мате-  
риалов. Растяжение и кручение. Учеб. пособие  
для вузов. Под ред. В. И. Феодосьева. М.  
«Высш. школа», 1977.**

133 с. с ил.

На обороте тит. авт.: Работнов Ю. Н., Дарков А. В.,  
Феодосьев В. И. и др.

Учебное пособие представляет собой сокращенное изложение лекций по сопротивлению материалов, прочитанных ведущими специалистами по вопросам прочности. Эти лекции сняты на киноплёнку и являются частью полного телекинокурса, передаваемого с телеэкрана для студентов-заочников.

Пособие позволяет студентам сохранить для последующего повторения материал прослушанных лекций.

Предназначается для студентов вузов заочной системы обучения.

Т  $\frac{30106-163}{001(01)-77}$  86-77

605

© Издательство «Высшая школа», 1977 г.

3 / сопротивление / (075)

## ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемый конспект лекций следует рассматривать как приложение к создаваемому в настоящее время телевизионному кинокурсу по сопротивлению материалов. Необходимость такого конспекта диктуется спецификой кинолекций — их сравнительно большой насыщенностью и отсутствием обратной связи от слушателя к лектору. Опыт показывает, что запись лекции с телеэкрана, даже при очень замедленном темпе чтения, представляет большие трудности; частично отвлекает зрелищность самого фильма — включение натуральных кадров и мультипликаций, а кроме того, немалой помехой является необходимость переключать зрение от светящегося экрана к листу бумаги. В результате у слушателя, если он задался целью записать лекцию с экрана, остается чувство неудовлетворенности, а порой — и раздражения. В итоге формируется определенное отношение к кинолекциям, как к зрелищному мероприятию, не оставляющему в руках у учащегося материалов, необходимых для последующего повторения пройденного. Такая точка зрения достаточно основательна и заслуживает внимания. Средством же для устранения указанного органического недостатка телекинолекций может служить заранее составленный конспект, которым учащийся мог бы воспользоваться по своему усмотрению до или после просмотра фильма.

Необходимо однако указать, что учебный кинофильм, как и всякое техническое средство обучения, является всего лишь вспомогательным средством для углубления знаний и никоим образом не освобождает учащегося от необходимости систематически работать с книгами и учебниками. Поэтому на телевизионную лекцию нельзя смотреть как на единственную форму подготовки. Лекции обязательно должны дополняться активной самостоятельной работой и развитием навыков решения задач.

Каждая из включенных в настоящий выпуск кинолекций сдвоенная и соответственно имеет двойную нумерацию (например, лекции 3—4), исключение составляет первая лекция «Введение», номер которой вообще не присвоен.

# ВВЕДЕНИЕ

## 1. РЕАЛЬНАЯ КОНСТРУКЦИЯ И РАСЧЕТНАЯ СХЕМА

Наша лекция первая по курсу сопротивления материалов и мы начнем ее с общих сведений, характеризующих цели и назначение курса. Среди наук, занимающихся вопросами прочности инженерных сооружений, сопротивление материалов как учебная дисциплина занимает вполне определенное место. Это — своего рода азбука расчетов на прочность.

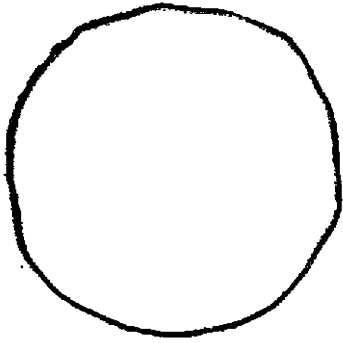


Рис. 1

Прочность есть свойство твердых тел воспринимать действие сил без разрушения. Жесткость — свойство твердых тел незначительно менять свои размеры и форму под действием сил.

Основные положения сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики и в первую очередь — на законы статики, без знания которых изучение курса сопротивления материалов немислимо. В отличие от теоретической механики в сопротивлении материалов рассматриваются задачи, где основную роль играют свойства деформируемого тела, а законы его движения как жесткого целого не только отступают на второй план, но в большинстве случаев попросту несущественны. В то же время вследствие общности основных положений сопротивление материалов может рассматриваться как раздел общей механики, который называется механикой деформируемых твердых тел.

Поскольку сопротивление материалов является прикладной дисциплиной, в этом курсе имеются особенности, заметно отличающие его от уже изучавшихся вами дис-

циплин математического цикла. Наличие и сущность этих особенностей уместно пояснить на простом примере. Рассмотрим простейшую геометрическую задачу.

Дан круг диаметром  $D$ . Чему равна площадь круга? Естественно, вы даёте ответ:  $\pi D^2/4$ .

А вот теперь рассмотрим задачу в несколько иной постановке. Дана фигура, показанная на рис. 1. Чему равна ее площадь?

Вы, очевидно, сразу же спросите меня: «Это, что? Круг»? А я и сам не знаю. Ставится практическая задача, а не классное задание. Ведь в практике проектирования и конструирования никто условий подобного рода не оговаривает. Нужен ответ. Вот вы и думайте!...

Ну, как тут можно поступить? Можно, например, сделать следующее. Мы видим, что заданная фигура похожа на круг. Попробуем обмерить ее в разных направлениях и найдем среднее значение диаметра, а затем дадим ответ: площадь равна  $\pi D^2/4$ .

Естественно, что в этом элементарном примере точность полученного результата не выше точности произведенных замеров. Имеются также погрешности, связанные с точностью рисунка. Но имеется также и погрешность самого подхода, поскольку заданная фигура по форме лишь близка к кругу, но не является таковым. С равным успехом можно было бы представить себе, что заданная фигура близка по форме к эллипсу. Мы тоже получили бы хорошее решение, но, естественно, другое. Полученные результаты были бы различными, но близкими. Выходит, что при решении практических задач мы получаем различные ответы в зависимости от того, какой метод решения взят за основу.

В сопротивлении материалов, да и вообще в механике, а если хотите, во всех естественных науках, исследование любого реального объекта начинается с выбора расчетной схемы, или, как еще говорят, с выбора модели.

Приступая к расчету конструкции, следует прежде всего установить, что в данном случае существенно и что несущественно; необходимо, как говорят, произвести схематизацию объекта и отбросить все те факторы, которые не могут сколь-либо заметным образом повлиять на свойства конструкции в целом. Необходимо абстрагироваться от реально существующих особенностей. Такого рода упрощение во всех случаях совершенно необходимо, так как исследование конкретно взятой конструкции с полным

учетом всех ее свойств принципиально невозможно вследствие их очевидной неисчерпаемости.

Если требуется, например, произвести расчет на прочность каната, поднимающего груз, то в первую очередь надо учесть силу тяжести поднимаемого груза, ускорение, с которым он движется, а при большой высоте подъема, возможно, также и массу самого каната. В то же время

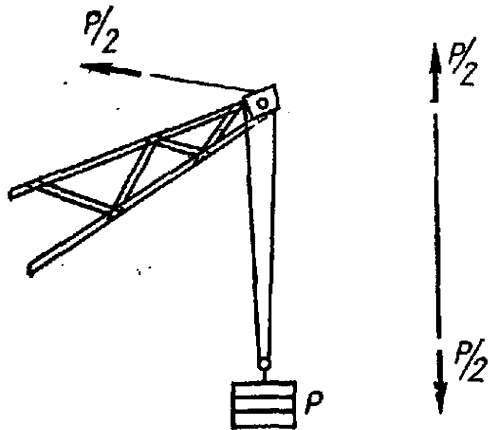


Рис. 2

заведомо надо отбросить влияние таких несущественных факторов, как аэродинамическое сопротивление, возникающее при движении груза, различие сил земного притяжения на различных высотах, изменение температуры с высотой и другие подобные им факторы, число которых неограниченно велико. Далее обычно считается, что прочностные характеристики каната

и его диаметр соответствуют номинальным, хотя и могут колебаться в пределах допуска. В итоге рождается какая-то обобщенная схема.

Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название расчетной схемы.

Расчетная схема для каната (рис. 2) достаточно очевидна. Мысленно освобождаем канат от стрелы крана, от груза и получаем схему растянутого стержня, по концам которого приложены силы  $P/2$ .

Для одного и того же объекта может быть выбрана, вообще говоря, не одна, а несколько расчетных схем в зависимости от того, какая сторона вопроса интересует инженера в данном конкретном случае, а также в зависимости от того, с какой степенью точности требуется решить задачу.

И еще важно следующее... Если для одного объекта может быть предложено несколько расчетных схем, то, с другой стороны, одной расчетной схеме может быть поставлено в соответствие много различных объектов. Это позволяет, исследуя какую-то одну схему, получить решение целого класса задач, которые сводятся к этой схеме. В частности, полученная только что схема растянутого каната или стержня весьма распространена и встречается в практических примерах расчета на прочность.

Возвращаясь к рассмотренной ранее элементарной геометрической задаче, с которой начался этот разговор, можно сказать, что круг, которым мы заменили заданную фигуру, как раз и представляет собой расчетную схему. Эллипс... Это — другая расчетная схема. Можно было бы, наконец, разбить фигуру на множество квадратиков и определить ее площадь, суммируя площади квадратиков. Это была еще одна расчетная схема. Так что схема круга не единственная. Вместе с тем круг как геометрическая абстракция годится не только для решения данной, но и множества других задач.

Выбор расчетной схемы в сопротивлении материалов начинается со схематизации свойств материала. Считается общепринятым рассматривать все материалы как однородную сплошную среду, независимо от особенностей микроструктуры.

Под сплошностью понимается свойство заполнять непрерывно без пустот весь объем в пределах установленных границ. Эта предпосылка настолько универсальна, что правильнее ее относить даже не к выбору расчетной схемы, а скорее к принципам построения всей механики деформируемого тела, или, как говорят, — механики сплошных сред.

Предпосылка о сплошности позволит нам в дальнейшем пользоваться методами анализа бесконечно малых и переходить к пределу, уменьшая размеры площадей и расстояний, хотя это и противоречит молекулярной структуре вещества. Применимость понятия сплошной среды связана, естественно, с требованиями, чтобы размеры детали были существенно большими, чем размеры кристаллических зерен в металле.

К схеме сплошной среды примыкает предположение об однородности материала. Под однородностью понимается неизменность свойств среды в пределах рассматриваемой области или независимость свойств от размеров выделенной частицы.

Сплошная среда наделяется свойствами, отвечающими свойствам реального материала. Так, например, под действием внешних сил реальное тело меняет свою форму и после их снятия восстанавливает ее.

Свойство тел восстанавливать свою первоначальную форму после снятия сил называется *упругостью*.

При решении большинства задач в сопротивлении материалов среда считается идеально упругой. В действи-

тельности реальное тело в какой-то малой степени обнаруживает отступление от свойств совершенной упругости. При больших силах это отступление становится настолько существенным, что среда в принимаемой расчетной схеме наделяется уже другими свойствами.

Сплошная среда принимается, как правило, изотропной, т. е. предполагается, что упругие и прочие свойства выделенного из тела образца не зависят от его угловой ориентации. Отдельно взятый кристалл металла анизотропен. Но если в выделенном объеме содержится весьма большое количество произвольно ориентированных кристаллов, то материал в целом можно рассматривать как изотропный. Существуют, однако, и анизотропные среды. Анизотропно дерево; существует технологическая анизотропия и металлов.

Схематизация в сопротивлении материалов не ограничивается свойствами материала. Она распространяется и на систему сил. Наиболее универсальным приемом является здесь введение сосредоточенных сил, заменяющих некоторые распределенные нагрузки. Такое упрощение применимо, понятно, только в том случае, если размеры поверхности, по которой происходит передача усилий, малы по сравнению с общими размерами тела. Ясно, что в реальных конструкциях передача усилия в точке неосуществима и сосредоточенная сила представляет собой понятие, свойственное только расчетной схеме.

Возникающие при деформации перемещения масс связаны с возникновением кинетической энергии. Однако если силы меняются медленно, этой энергией можно пренебречь по сравнению с потенциальной энергией деформированного тела и считать, что в любой момент нагружения система находится в равновесии. Это — схема так называемого статического нагружения.

Весьма важными при выборе расчетной схемы являются упрощения, вводимые в геометрию конструктивных элементов. Во многих случаях форма тел может быть сведена к схеме бруса или к схеме оболочки. Эти две схемы являются основными. Под брусом понимается всякое тело, одно из измерений которого (длина) много больше двух других (рис. 3). Основная характерная особенность бруса заключается в возможности пренебречь размерами поперечного сечения по сравнению с длиной бруса. Поэтому и точность последующего расчета, проведенного по этой схеме, не может быть выше той, к которой

приводит сделанное пренебрежение. Заметим, что бóльшая часть вопросов, рассматриваемых в сопротивлении материалов, относится к расчету бруса. Это определяется прежде всего простотой геометрической схемы бруса, а также ее доминирующим положением среди множества применяемых в технике элементов.

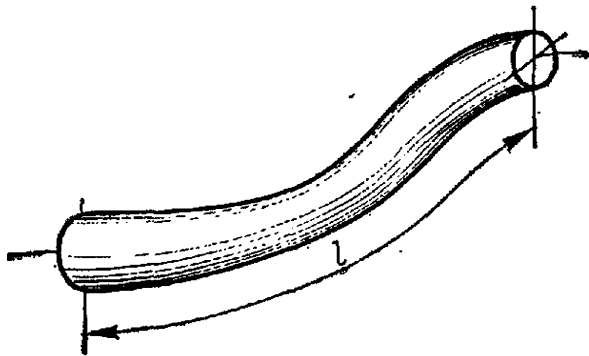


Рис. 3

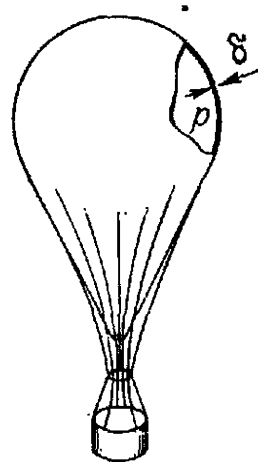


Рис. 4

Вторая типовая геометрическая схема — схема оболочки (рис. 4). Под оболочкой понимается тело, одно из измерений которого (толщина) много меньше двух других. К схеме оболочки сводится расчет таких конструктивных элементов, как стенки баков, купола зданий и безопорные перекрытия.

## 2. ПРЕДМЕТ КУРСА «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

В сопротивлении материалов излагаются приемы анализа типичных расчетных схем, практически общих для большей части инженерных конструкций. В основном, как это уже говорилось, это — схема бруса. Вместе с тем, многообразие современных инженерных задач столь велико, что в пределах одной дисциплины невозможно изложить специфические особенности прочностных расчетов по всем разделам техники. В связи с этим возникает необходимость создания специальных дисциплин, дополняющих сопротивление материалов для особо важных инженерных направлений.

Расчетные схемы, выходящие за рамки общетехнических и свойственные конкретно взятой области техники, рассматриваются в разделах инженерной механики, название которых начинается со слов «строительная

механика...», например, строительная механика сооружений, строительная механика корабля, самолета и т. д. Эти дисциплины посвящены в основном развитию эффективных методов анализа тех расчетных схем, которые наиболее типичны для данной отрасли техники.

Вопросы выбора наиболее целесообразных расчетных схем, а также вопросы необходимой степени надежности реальных конструкций наиболее полно излагаются в технических дисциплинах, название которых начинается со слова «прочность»: прочность корабля, прочность самолета,...

Границы между всеми перечисленными дисциплинами не совсем строги и бывает так, что некоторые разделы строительной механики после подробного и глубокого изучения приобретают достаточную общность и занимают прочное место в курсе сопротивления материалов. Особое влияние на развитие курса сопротивления материалов оказывает математическая теория упругости. Различие между этими двумя дисциплинами заключается как в круге рассматриваемых задач, так и в глубине исследования. Математический аппарат в сопротивлении материалов выглядит как средство для решения прикладной задачи, и расчет проводится в пределах той точности, которая уже заложена выбором расчетной схемы. В прикладных вопросах нет смысла стремиться к высокой точности, раз уж допущены заметные погрешности при выборе расчетной схемы.

Для теории упругости такого рода подчиненность аналитического аппарата практическим целям не характерна. Теория упругости не скована необходимостью дать краткую рекомендацию к расчету. Это позволяет провести детальное изучение не только конкретных задач, но в первую очередь общих законов и методов.

Теория упругости богата не только множеством решенных задач. Трудом многих поколений ученых, главным образом, прошлого и настоящего веков созданы основы механики деформируемых систем и заложены принципы, соблюдение которых стало нормой во всех дисциплинах, прямо или косвенно связанных с вопросами прочности. Позже, при изучении курса сопротивления материалов, мы будем пользоваться многими упрощающими предположениями общего характера, но не следует забывать, что их достоверность обеспечена исследованиями, проведенными методами теории упругости. Теория упругости,

таким образом, не только обогащает сопротивление материалов новыми задачами и новыми постановками проблем, но, образно говоря, обеспечивает тылы в тех упрощенных методах, которыми мы пользуемся каждодневно.

### 3. СИЛЫ ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ

Сила является мерой механического взаимодействия тел. Если конструкция рассматривается изолированно от окружающих тел, а практически это неизбежно, то их действие на рассматриваемую конструкцию заменяется силами, которые мы называем внешними. Их величина и характер распределения зависят в первую очередь от того, где проходит граница между рассматриваемым объектом и окружающими его телами.

Положим, нас интересует прочность железнодорожной платформы (рис. 5, а). Это — объект нашего исследования. Если этот объект рассматривается изолированно, то его взаимодействие с окружающим миром заменяется системой сил (рис. 5, б). Эти силы для нашего объекта — внешние. В их число включается не только сила тяжести  $P$  перевозимого груза, но и реакции опор  $R_1$  и  $R_2$ , дополняющие систему внешних сил до равновесной. Если границы объекта расширить и совместно с платформой рассматривать одновременно и рельсы, на которых она покоится, то система внешних сил, естественно, изменится (рис. 5, в), и мы должны будем исключить силы  $R_1$  и  $R_2$ , но ввести силы  $R'_1$  и  $R'_2, \dots$ , которые возникают в точках контакта рельса со шпалами.

Таким образом, взаимодействие рассматриваемого объекта с телами, расположенными за пределами условно очерченной границы объекта, характеризуется силами, которые мы называем внешними. Взаимодействие между

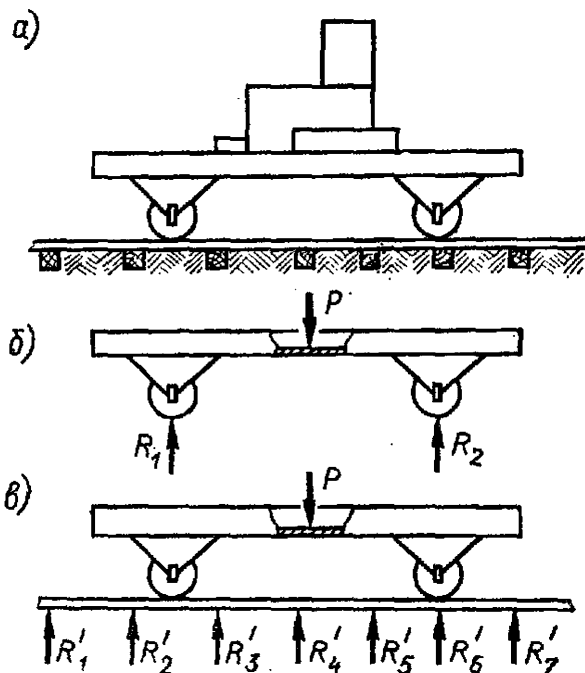


Рис. 5

частями рассматриваемого объекта *внутри* очерченных границ характеризуется внутренними силами. Так в нашем примере силы взаимодействия колес с рельсами  $R_1$  и  $R_2$ , когда мы исключили рельсы, были внешними. В случае же, когда границы объекта были расширены (рис. 5, в), эти силы стали внутренними.

Внутренние силы возникают не только между отдельными взаимодействующими частями механизма, но и во-

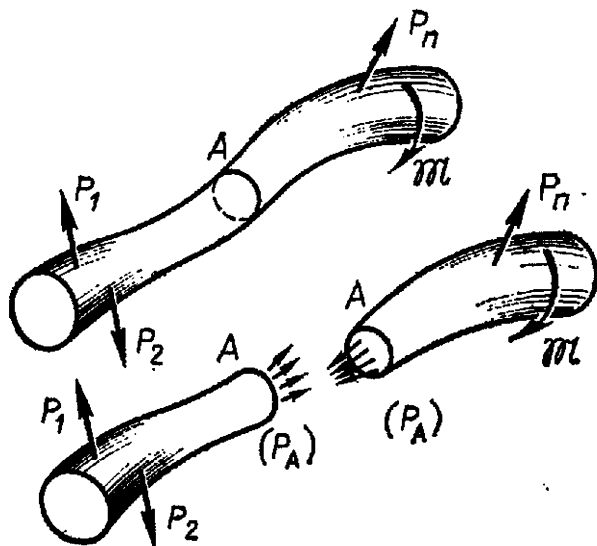


Рис. 6

обще между всеми смежными частицами тела при нагружении.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса (рис. 6). Пусть к нему приложена некоторая нагрузка, т. е. система внешних сил  $P_1, P_2, \dots$ , удовлетворяющая условиям равновесия. Внутренние силы, возникающие в бресе, можно выявить, представив себе, что брус мысленно раз-

делен на две части, например, сечением  $A$ . Такой прием выявления внутренних сил называется в сопротивлении материалов *методом сечений*.

Так как связи между частями тела устранены, необходимо действие правой части на левую и левой на правую заменить системой сил, которую мы обозначим  $(P_A)$ . Это и есть внутренние силы в сечении. В другом сечении силы, естественно, будут другими.

Внутренние силы характеризуют механическое взаимодействие между частицами тела, расположенными по разные стороны от мысленно проведенного сечения. Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны. Правая часть действует на левую точно так же, как и левая на правую, и система сил в плоскости для левой части обратна по знаку системе сил, действующих на правую часть. И еще ... Внутренние силы — чисто поверхностные. Это — принцип. Мы просто принимаем, что взаимодействие частиц, расположенных по разные стороны сечения, является чисто контактным и что частицы, расположенные в глубине правой и левой частей рассеченного тела, в этом взаимодействии не участвуют.

Это положение иногда называют принципом ближнего действия.

Понятно, что внутренние силы распределены по сечению, вообще говоря, довольно сложным образом. Но во всех случаях они должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия равновесия для правой и левой частей бруса в отдельности. Символически эти условия можно записать в виде:

$$(P_n)_л + (P_A) = 0.$$

Здесь под символом  $(P_n)_л$  мы понимаем сумму проекций внешних сил или сумму моментов внешних сил, приложенных к левой отсеченной части бруса относительно какой-то системы осей. Под величиной же  $(P_A)$  понимается то же самое для внутренних сил в сечении левой части бруса. Таким образом, написанное выражение символически представляет шесть уравнений равновесия, которые могут быть составлены для левой части бруса. То же самое можно написать и для правой части бруса. Только величину  $(P_A)$  здесь следует взять с обратным знаком

$$-(P_A) + (P_n)_п = 0.$$

Но поскольку система внешних сил сама по себе удовлетворяет условиям равновесия, то

$$(P_n)_л + (P_n)_п = 0,$$

и мы видим, что написанные ранее уравнения для левой и правой частей становятся тождественными. Если два первых уравнения сложить, то мы получим третье. Это значит, что главный вектор и главный момент внутренних сил  $(P_A)$  в сечении могут с равным успехом определяться из условий равновесия либо левой, либо правой частей рассеченного тела — безразлично.

#### **4. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ БРУСА**

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил в сечении (рис. 7, а) к центру тяжести сечения. В результате получим главный вектор  $\bar{R}$  и главный момент  $\bar{M}$  (рис. 7, б). Выберем далее систему координат  $x, y, z$  с началом в точке  $O$ . Ось  $z$  направим

по внешней нормали к сечению, а оси  $x$  и  $y$  расположим в его плоскости.

Разложим главный вектор и главный момент по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . В результате получим шесть составляющих, которые называют *внутренними силовыми факторами* в поперечном сечении бруса (рис. 7, в). Каждый из шести силовых факторов имеет свое название и общепринятое обозначение.

Составляющую внутренних сил по нормали к сечению  $N$  (или  $N_2$ ) называют *продольной* или *нормальной* силой

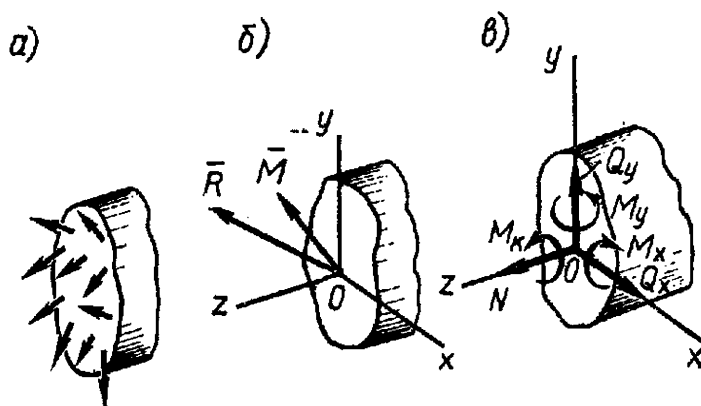


Рис. 7

в сечении. Силы  $Q_x$  и  $Q_y$  называют *поперечными силами*. Момент  $M_k$  (или  $M_2$ ) относительно оси  $z$  называют *крутящим моментом* в сечении. Моменты  $M_x$  и  $M_y$  относительно осей  $x$  и  $y$  называют *изгибающими моментами*.

Если внешние силы заданы, то все силовые факторы в сечении определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части бруса — левой или правой, результат будет тот же.

По аналогии с указанным наименованием силовых факторов проводится и классификация видов нагружения бруса.

Так, если на каком-то участке бруса в поперечных сечениях возникает только нормальная сила  $N$ , а прочие силовые факторы обращаются в нуль, то говорят, что на этом участке имеет место растяжение или сжатие в зависимости от направления силы  $N$ .

Итак, растяжение — это такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только продольная (нормальная) сила, а прочие пять силовых факторов обращаются в нуль.

Кручение — это такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только крутящий момент  $M_k$ , а прочие силовые факторы равны нулю.

Если внешние силы приложены к брусу таким образом, что в его поперечных сечениях возникает только изгибающий момент, то говорят, что имеет место чистый изгиб в той или иной плоскости, в зависимости от плоскости действия момента. Обычно в поперечных сечениях наряду с изгибающим моментом в той же плоскости возникает еще и поперечная сила. Такой случай нагружения также представляет собой изгиб, но в отличие от чистого его называют поперечным изгибом.

Далее возможны различные комбинированные виды нагружения; кручение с изгибом, изгиб с растяжением и пр.

Для того чтобы определить на растяжение, изгиб или кручение работает брус или какая-либо его часть, необходимо воспользоваться методом сечений и из условий равновесия установить, какие силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса. Это легко усваивается в процессе практического решения задач, а пока важно отметить следующее. Вводя внутренние силовые факторы, мы получаем возможность свести необозримое многообразие типов нагрузок и конструктивных форм бруса к относительно узкому классу задач о поведении бруса в условиях растяжения, кручения или изгиба. Внутренние силовые факторы в решающей мере характеризуют степень нагруженности бруса в данном сечении независимо от того, под действием каких внешних сил возникли эти силовые факторы.

Естественно, что определение внутренних силовых факторов представляет собой только первый шаг на пути оценки прочности конструкции. Дело в том, что при их определении мы совершенно не учитываем абсолютных размеров сечения бруса. А между тем в зависимости от толщины бруса или его диаметра и, конечно, в зависимости от свойств материала брус способен выдержать большую или меньшую нагрузку. Таким образом, нужно ввести в рассмотрение еще какие-то характеристики внутренних сил и свойств материала. Начнем с характеристики внутренних сил, называемой напряжением.

## 5. НАПРЯЖЕНИЕ

Напряже н и е — это мера интенсивности внутренних сил в точке.

Рассмотрим поперечное сечение бруса или даже вообще любого тела (рис. 8). В этом сечении возникает какая-то система внутренних сил, так или иначе распределенных по площади сечения. В окрестности некоторой точки  $K$  выделим элементарную площадку  $\Delta F$ . Заметим, что в сопротивлении материалов площадь принято обозначать буквой  $F$ , поэтому приведенное здесь обозначение не случайно и к нему следует привыкать сразу.

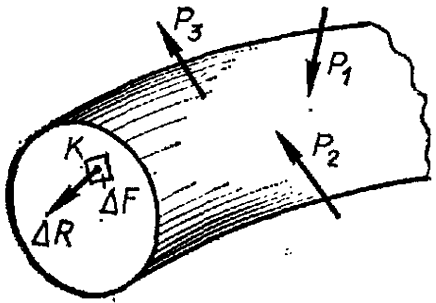


Рис. 8

Положим, что на площадке  $\Delta F$  возникает внутренняя сила  $\Delta R$ . Направление этой силы может быть любым. За среднее напряжение на площадке  $\Delta F$  принимаем отношение

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta R}{\Delta F}.$$

Будем уменьшать площадку  $\Delta F$ , стягивая ее к точке  $K$ . Поскольку мы приняли, что материал или, как мы говорим, среда, является сплошной, то возможен предельный переход и  $\Delta F$  может уменьшаться до нуля. В пределе получим

$$p = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}.$$

Векторная величина  $p$  представляет собой полное напряжение в точке  $K$  данного сечения. Напряжение имеет размерность силы, деленной на площадь. В технике напряжение измеряют обычно в килограммах-силы на квадратный сантиметр или на квадратный миллиметр. При применении Международной системы единиц СИ в качестве единицы измерения напряжения удобно принять  $\text{Н/мм}^2$ ;  $1 \text{ Н/мм}^2 \approx 10 \text{ кгс/см}^2$ .

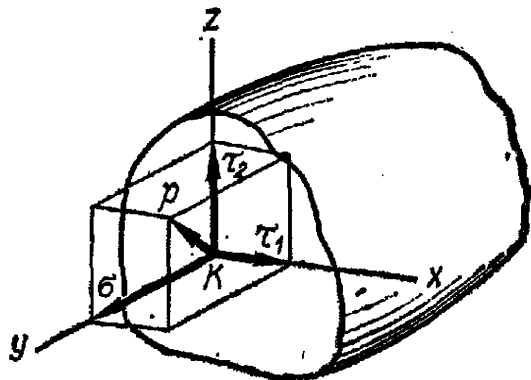


Рис. 9

Полное напряжение  $p$  может быть разложено на три составляющие: по нормали к плоскости сечения и по двум осям, лежащим в плоскости сечения (рис. 9). Проекцию полного напряжения на нормаль обозначают буквой  $\sigma$  и называют нормальным напряжением. Составляющие в плоскости сечения называют касательными напряжениями и обозначают буквой  $\tau$ . В зависимости от расположения и наименования осей, по которым раскладывается вектор полного напряжения,  $\sigma$  и  $\tau$  снабжаются системой индексов, порядок которых будет установлен в дальнейшем. Если бы через ту же точку  $K$  в теле была проведена другая секущая площадка, то на ней, вообще говоря, мы обнаружили бы другое полное напряжение и другими были бы соответствующие ему  $\sigma$  и  $\tau$ .

Совокупность напряжений для множества площадок, проходящих через точку, образует напряженное состояние в точке. Напряженное состояние в точке, как мы узнаем в дальнейшем, определяется шестью компонентами и представляет собой понятие более сложное, чем те, с которыми вы до сих пор встречались. Свойства напряженного состояния имеют очень большое значение в механике деформируемого тела и будут подробно рассмотрены в дальнейшем. Начало же курса связано с изучением наиболее простых и наиболее часто встречающихся частных случаев напряженного состояния.

Перейдем теперь к основным понятиям, связанным с изменением формы тела под действием нагрузок.

## 6. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ

Все существующие в природе твердые тела не являются абсолютно жесткими и под действием внешних сил в какой-то мере меняют свою форму (деформируются). Это существенно влияет на законы распределения внутренних сил в напряженном теле, хотя само по себе изменение формы, как правило, незначительно и обнаруживается в большинстве случаев только при помощи чувствительных инструментов.

Точки тела при его деформации меняют свое положение в пространстве. Так, например, точка  $A$  (рис. 10) заняла положение  $A'$ . Вектор, имеющий начало в точке недеформированного тела, а конец в той же точке дефор-

мированного тела, называется полным перемещением точки. Его проекции на неподвижные оси носят название перемещений по осям.

Кроме линейного перемещения, можно ввести понятие углового перемещения. Если рассмотреть отрезок прямой

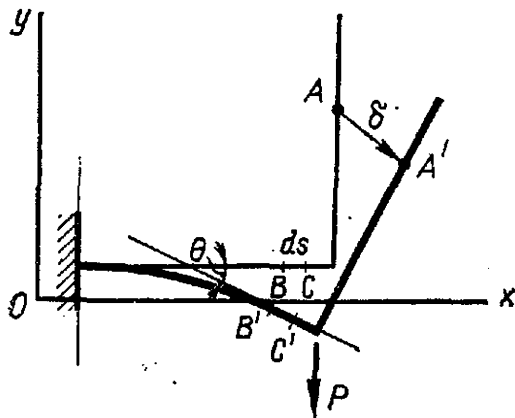


Рис. 10

$ds$  между двумя близкими точками  $B$  и  $C$  (рис. 10), то легко установить, что при деформации тела этот отрезок поворачивается в пространстве на некоторый угол, который мы называем угловым перемещением отрезка  $ds$ .

Перемещение, как кинематический параметр, включает в себя составляющие, свойственные не только деформируемому, но и жесткому телу,

и специфические особенности деформируемого тела здесь в чистом виде не выделены. Поэтому, подобно тому, как мы ввели понятие напряжений для характеристики интенсивности внутренних сил в точке, мы введем теперь понятие интенсивности изменения формы, также связанное с состоянием в точке.

Рассмотрим точки  $A$  и  $B$  напряженного тела, расположенные друг от друга на расстоянии  $s$  (рис. 11). После того как тело изменило форму, эти точки заняли положение  $A'$  и  $B'$  и расстояние между ними увеличилось на  $\Delta s$ .

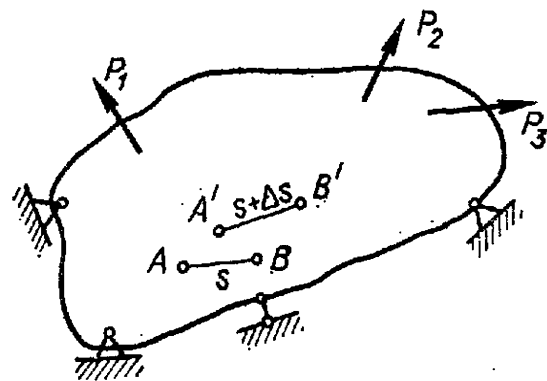


Рис. 11

Отношение приращения длины  $\Delta s$  к начальной длине  $s$  назовем средним относительным удлинением на отрезке  $AB$

$$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{s}.$$

Будем уменьшать отрезок  $s$ , приближая точку  $B$  к точке  $A$ . В пределе получим

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s} = \epsilon_{AB}.$$

Величину  $\epsilon_{AB}$  называют линейной деформацией (или — просто деформацией) в точке  $A$  по направлению  $AB$ . В той же точке, но в другом направлении деформация, вообще говоря, будет другой. Если рассматриваются деформации в направлении координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ , в обозначение  $\epsilon$  вводятся соответствующие индексы, и мы пишем обычно  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ .

Следует обратить внимание, что с этого момента слово «деформация» приобретает для нас двойкий смысл. В обиходном языке — в жизни — под деформацией мы понимаем вообще всякое изменение формы тела без какой бы то ни было количественной оценки. В крайнем случае мы можем сказать «сильно» или «слабо» деформировалось тело. В сопротивлении материалов и в теории упругости «деформация» имеет свое определение, данное выше, и является не качественной, а количественной мерой изменения формы в окрестности точки.

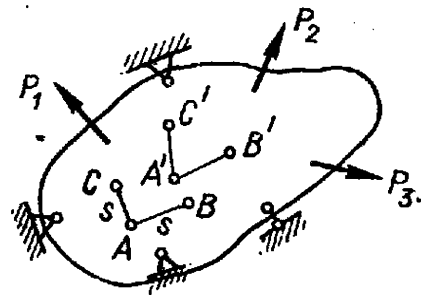


Рис. 12

Деформация измеряется в отвлеченных единицах или в процентах отношения  $\Delta s$  к  $s$ . Обычно деформации малы по сравнению с единицей. Для упругого тела это — десяти-тысячные или тысячные доли, а если в процентах, то сотые или десятые доли процента.

Кроме линейной деформации, вводится понятие и угловой деформации. Рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном теле двумя отрезками  $AB$  и  $AC$  (рис. 12). После нагружения тела точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  переместятся и займут положение  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , а угол, бывший прямым, станет либо тупым, либо острым. Теперь, аналогично тому, как мы это делали при определении линейной деформации, станем приближать точки  $B$  и  $C$  к точке  $A$ . В пределе получим разность углов  $BAC$  и  $B'A'C'$  в следующем виде:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (\widehat{BAC} - \widehat{B'A'C'}) = \gamma_{BAC}.$$

Величину  $\gamma_{BAC}$  называют угловой деформацией или углом сдвига в точке  $A$  в плоскости  $BAC$ . В координатных плоскостях углы сдвига обозначаются через  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{xy}$ .

Перечисленные деформации или, как говорят, компоненты деформации в точке меняются в зависимости от ориентации осей. Совокупность линейных и угловых деформаций по различным плоскостям, проходящим через заданную точку, образует деформированное состояние в точке.

Деформации выражаются через перемещения и точно так же, как перемещения, могут быть определены, если известен закон распределения деформаций по объему тела. Эта взаимосвязь чисто геометрическая и не зависит от свойств материала.

## ЛЕКЦИИ 1—2

### **ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

#### **1. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ**

Во введении говорилось о том, что любая практическая задача, связанная с расчетом на прочность, требует предварительной схематизации. Сохраняется существенное и отбрасывается второстепенное — несущественное. Этих необходимых упрощений обычно недостаточно. Когда расчетная схема уже выбрана, мы вынуждены принять еще некоторые предпосылки, являющиеся дальнейшим развитием идеализации реальной конструкции. Нужно соблюсти какую-то не совсем очевидную меру между необходимыми упрощениями и целесообразной точностью, ибо иногда может получиться так, что точность, приобретенная большой ценой, окажется не столь уж и нужной, а то и просто иллюзорной.

Вообще такого рода соображения носят обычно частный характер и зависят, в первую очередь, от особенностей задачи. Но есть и общие положения, которые являются необходимой нормой в механике деформируемого тела. Если хотите, это — своего рода нормы поведения. В некоторых исключительных случаях от них, конечно, можно и нужно отойти, но считаться с ними абсолютно необходимо.

Если какие-то предпосылки носят общий характер и лежат в основе решения подавляющего числа задач, их называют руководящими правилами или принципами. Этим вопросам как раз и будет посвящена основная часть

настоящей лекции. Но сначала мы должны поговорить о законе Гука.

Роберт Гук, английский ученый-естествоиспытатель, жил во второй половине XVII в. Проводя опыты над различного типа пружинами, стержнями и натянутыми нитями, он пришел к выводу, что вызываемые силами перемещения пропорциональны величине действующих сил.

Положим, некоторая балка нагружена силой  $P$  (рис. 13). Перемещение некоторой точки  $A$  под действием силы  $P$  пропорционально этой силе. Следовательно,

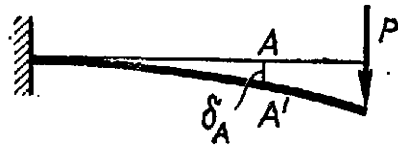


Рис. 13

$$\delta_A = kP,$$

где под  $\delta_A$  понимается перемещение точки  $A$ , а под  $k$  — некоторый коэффициент пропорциональности. Этот коэффициент зависит, очевидно, от физических свойств материала, от геометрических размеров тела и от взаимного расположения рассматриваемой точки и точки приложения силы, вообще — от свойств системы. Представленная зависимость носит название закона Гука для системы.

Таким образом, закон Гука это есть закон прямой пропорциональности между силами и перемещениями. Однако следует сразу оговориться, что такая трактовка этого закона для нас является лишь предварительной, имеющей в основном исторический характер. Коэффициент пропорциональности  $k$ , который здесь введен, зависит от очень большого числа параметров; он включает в себя как влияние физических свойств материала, так и геометрических особенностей системы. Поэтому для решения большинства задач сопротивления материалов (что и будет сделано в дальнейшем) удобнее трактовать закон Гука не как условие пропорциональности между силами и перемещениями, а как пропорциональность между компонентами напряжений и деформаций в точке. В такой формулировке вводимые коэффициенты пропорциональности представляют собой константы материала (только материала!) и уже не связаны с геометрическими особенностями системы в целом. Это будет уже закон Гука не для системы, а для среды, для материала.

В рассматриваемом примере, в частности, пропорциональность между силами и перемещениями можно рассма-





Если бы в дополнение к силам  $P_1$  и  $P_2$  мы ввели бы еще силу  $P_3$ , то тогда получили бы

$$\delta_A = k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3,$$

т. е. все сказанное легко обобщается на любое число сил.

Итак, в основе принципа независимости сил лежит предположение о линейной зависимости между перемеще-

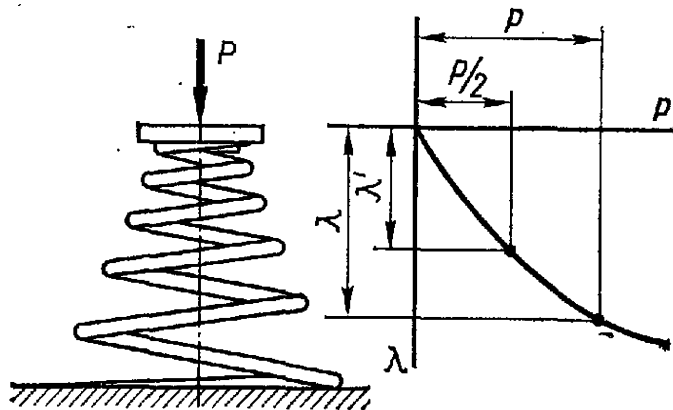


Рис. 15

ниями и силами, а также связанное с ним предположение об обратимости процесса нагрузки и разгрузки. Если система линейная, принцип независимости действия сил к ней применим, если нелинейная — неприменим.

На рис. 15 показана коническая пружина. При ее нагружении, начиная с некоторой величины силы  $P$ , нижние витки постепенно садятся на опорную плоскость и выключаются из работы. Поэтому жесткость пружины по мере ее сжатия увеличивается и ее характеристика (график зависимости перемещения, т. е. осадки пружины, от силы) оказывается нелинейной (рис. 15).

Пусть под действием силы  $P$  пружина получила осадку  $\lambda$ . Рассмотрим силу  $P$  как сумму двух сил:  $P/2$  и  $P/2$ , и попытаемся воспользоваться принципом независимости сил. Обозначим осадку пружины под действием силы  $P/2$  через  $\lambda'$ . Величина  $\lambda'$  конечно больше, чем  $\lambda/2$ .

Принцип независимости действия сил гласит, что действие суммы сил равно сумме их действий. Действие первой силы  $P/2$  вызвало осадку  $\lambda'$ . Такую же осадку вызвала бы и вторая сила  $P/2$ , действуя на ненагруженную пружину. Сумма их действий (осадок) равна  $2\lambda'$ . Действие же суммы сил, т. е. осадка от силы  $P$ , равна  $\lambda$ . Оказывается, что  $2\lambda' \neq \lambda$ . Принцип нас обманул. Произошло это потому, что мы без оснований применили его

к нелинейной системе. Если бы характеристика была линейной, указанного противоречия у нас не возникло и  $2\lambda'$  равнялось бы  $\lambda$ .

Вообще можно сказать, что линейность системы и принцип независимости сил почти синонимы; они равноценны и практически имеют один и тот же смысл. Это широко используется в сопротивлении материалов и будет положено в основу некоторых теорем, с которыми вы познакомитесь в дальнейшем.

Перейдем к следующему принципу.

### 3. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Этот принцип часто называется также принципом начальных размеров. Он основан на том, что в подавляющем большинстве случаев перемещения, возникающие в конструкции, малы, и форма тела меняется незначительно. Это позволяет при составлении уравнений равновесия рассматривать конструкцию как жесткую, как недеформированную, имеющую те же размеры, какие она имела до нагружения.

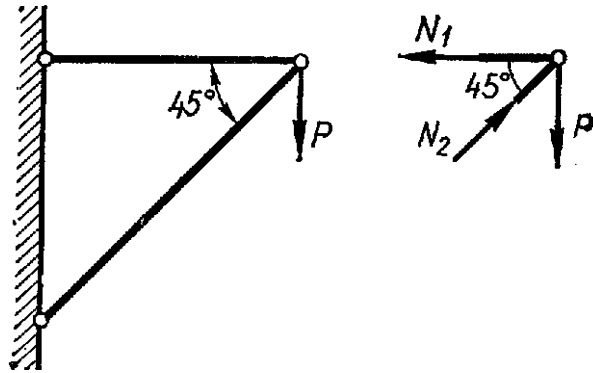


Рис. 16.

Начнем с того, что рассмотрим простейшую стержневую систему — кронштейн (рис. 16).

Определим усилия, возникающие в стержнях. Для этого воспользуемся методом сечений и выделим мысленно узел, соединяющий стержни. Далее введем нормальные силы  $N_1$  и  $N_2$ . Из условий равновесия легко найти

$$N_1 = P; \quad N_2 = P \sqrt{2}.$$

Но суть дела сейчас не в величине найденных сил, а в правомерности подхода. Правильно ли мы поступаем? Основанием для сомнений служит то, что в действительности система стержней после нагружения имеет форму, отличную от той, которую она имела вначале. Действительно, после того как мы приложили к кронштейну силу  $P$ , верхний стержень удлинился, а нижний — укоротился. Угол между стержнями уменьшился и уже не равен  $45^\circ$ . Следовательно, при определении сил  $N_1$  и  $N_2$

мы должны будем учесть изменение этого угла. Но оно нам неизвестно до тех пор, пока не определены удлинения стержней, а те, в свою очередь, зависят от угла между стержнями. Таким образом, если задачу решать «точно», то уравнения равновесия должны быть увязаны с условиями деформации системы.

Конечно, все это можно сделать. Но нужно ли? Ведь перемещения узла по сравнению с общими размерами стержней очень малы и стоит ли их учитывать? Но главное не в этом. Если мы учитываем изменение формы тела в процессе нагружения, то неизбежно получаем нелинейную зависимость между силами и перемещениями. В то же время опыт показывает нам, что эта зависимость линейная (закон Гука), а если быть более точным, то эта зависимость линейна в пределах сделанного приближения в обработке эксперимента. Следовательно, всякая попытка

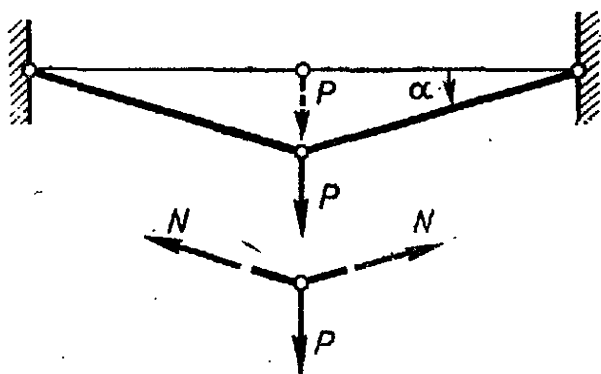


Рис. 17

учесть нелинейность чисто вычислительными методами совершенно беспредметна. Сначала необходимо пересмотреть закон Гука и заменить его каким-то другим, более совершенным, если только это действительно оправдывается какими-то серьез-

ными причинами. Но если уж закон Гука принят как исходный, то всеми изменениями в форме тела при составлении уравнений равновесия мы пренебречь обязаны. Иначе будет нарушена логика самого подхода. Это следует принять как правило. Но из него возможны исключения. Они связаны с тем, насколько существенно меняется форма тела при нагружении. Сказать, что все зависит от величины перемещений, было бы не совсем точно. Дело здесь не только в величине перемещений, а именно в том, насколько существенно меняется форма нагруженного тела. Может случиться так, что перемещения будут малыми, но форма тела изменится таким образом, что при составлении уравнений равновесия это обстоятельство необходимо будет учитывать.

Рассмотрим два шарнирно связанных стержня, расположенных на одной прямой (рис. 17). Под действием силы  $P$ , приложенной в среднем шарнире, стержни не-

сколько удлинится и повернется на угол  $\alpha$ . Мысленно выделяя узел и вводя продольные силы  $N$ , можем написать следующее уравнение равновесия

$$N = P / (2 \sin \alpha).$$

Здесь уравнение равновесия составлено для деформированной системы. И это правильно. Но, положим, мы попытаемся воспользоваться принципом начальных размеров и захотим определить усилие  $N$  исходя из начальной (заданной) форм



с бортиками и передать усилия на стержень через имеющийся выступ. Можно нарезать резьбу. Словом, вариантов можно предложить много.

Принцип Сен-Венана утверждает, что напряжения и деформации в стержне на достаточном удалении от мест захвата будут одинаковы, если одинаковы прило-

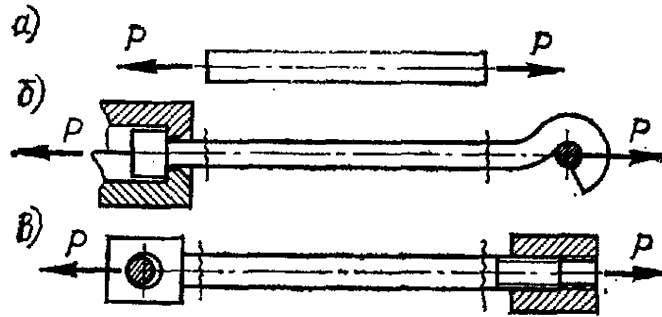


Рис. 19

женные силы. Что же касается конструктивного оформления силового узла, то его особенности оказывают влияние на напряженное состояние лишь в областях, непосредственно примыкающих к зоне приложения внешних сил. Для обычных стержней зона распространения этих особенностей простирается на расстояние порядка поперечного размера сечения стержня. Поэтому, если эту зону исключить из рассмотрения, мы во всех случаях получаем одну и ту же расчетную схему, показанную на рис. 19.

Принцип Сен-Венана, как и прочие принципы, в общем виде не доказывается, хотя в ряде частных случаев полностью подтверждается на примерах решения задач методами теории упругости.

Применение принципа Сен-Венана позволяет существенно расширить общность основных расчетных формул сопротивления материалов, поскольку освобождает от необходимости учитывать конкретные особенности местного распределения сил.

Принцип Сен-Венана применим для большинства встречающихся на практике задач. Так, на основе этого принципа построен расчет стержневых и рамных систем. На основе этого принципа в теории упругости устанавливаются статически эквивалентные условия на контуре пластин и оболочек. Имеются и другие примеры его эффективности. И тем не менее возможны некоторые, если не полные, то частичные примеры исключений.

Довольно широкий класс систем с ограниченным применением принципа Сен-Венана образуется на основе схемы тонкостенного стержня.

Сопоставим сплошной и тонкостенный стержни. Нагрузим их одной и той же силой  $P$ , но передаваемой на две точки (рис. 20, а, б). И в том и в другом стержне в попе-

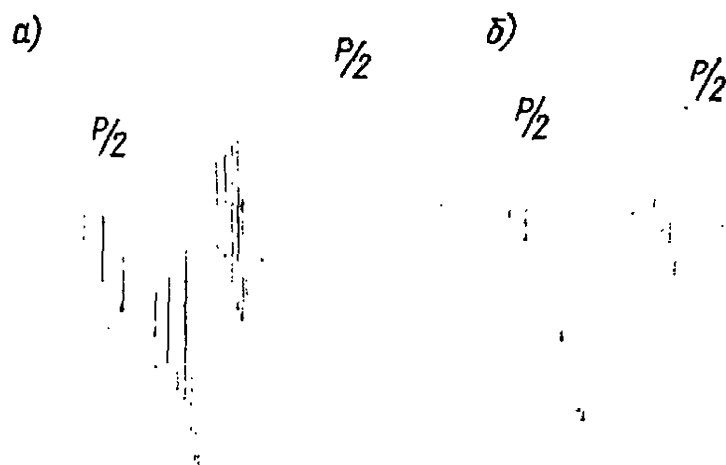


Рис. 20

речном сечении возникает нормальная сила, равная силе  $P$ . И в том и другом стержне напряжения вблизи торца будут распределены неравномерно. Для сплошного стержня эта неравномерность является существенной лишь для области, простирающейся вдоль оси стержня на расстояние порядка одного из размеров поперечного сечения. Для тонкостенного же стержня размер зоны неравномерности будет заметно бóльшим. Иными словами, в тонкостенном стержне проникновение торцовых особенностей приложенной нагрузки будет простирается вдоль оси значительно глубже. Поэтому нельзя даже сказать, успеют ли затухнуть эти особенности до противоположного торца. Все зависит от

2 2 ит 2тавельбе 1.2 2021 12 3 200 1 1 1 22



В настоящей лекции будет рассмотрен частный случай нагружения бруса, когда в его поперечных сечениях из шести возможных усилий отлично от нуля только одно —

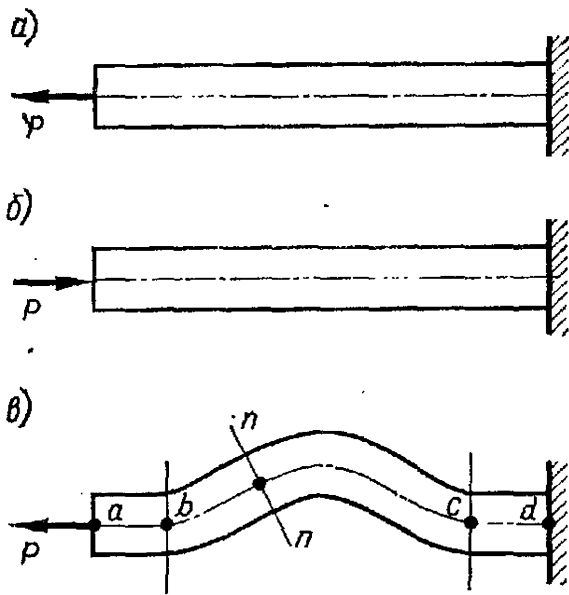


Рис. 22

продольная сила ( $N_2$  или  $N$ ). Этот вид нагружения называется растяжением или сжатием.

На рис. 22, а изображен прямой брус, закрепленный одним концом и нагруженный на другом конце силой  $P$ , направленной вдоль его оси.

Во всех поперечных сечениях этого бруса возникают только продольные растягивающие силы и, следовательно, такой брус по всей

длине является центрально растянутым. При противоположно направленной силе  $P$  (рис. 22, б) брус по всей длине испытывает сжатие.

Брус, изображенный на рис. 22, в, испытывает растяжение только на участках  $ab$  и  $cd$ ; на участке  $bc$  брус

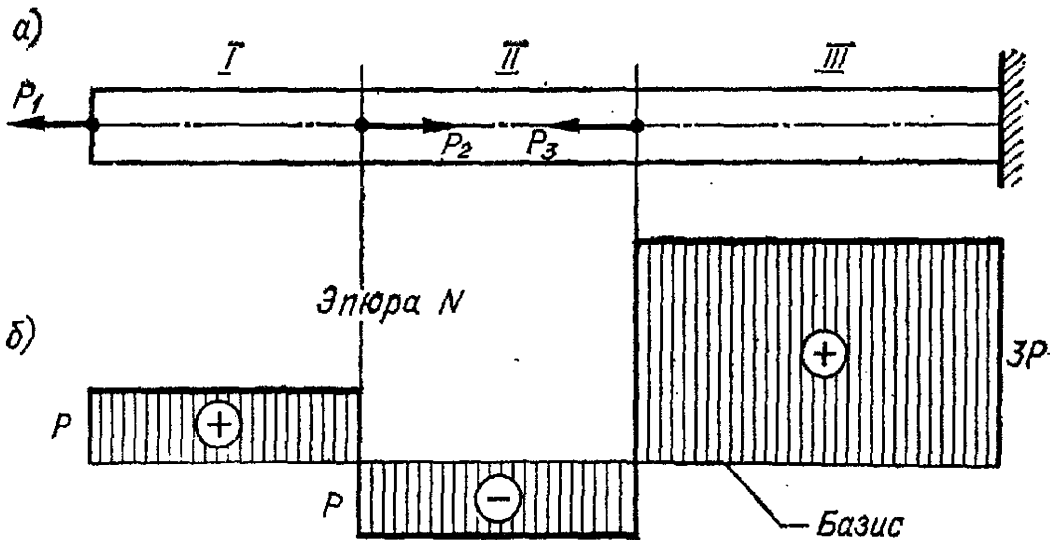


Рис. 23

испытывает не только растяжение, так как, например, в сечении  $n-n$ , кроме продольной силы, возникают также поперечная сила и изгибающий момент.





бруса осевой силой  $P$  эти линии, как показывает опыт, остаются прямыми и параллельными между собой (их положения после нагружения бруса показаны на рис. 25 штриховыми линиями). Это позволяет считать, что попе-

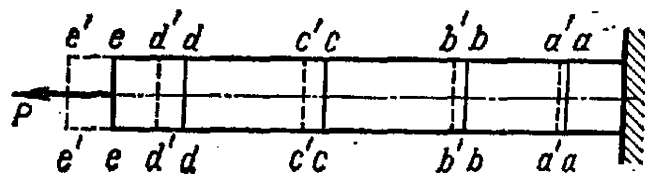


Рис. 25

речные сечения бруса, плоские до его нагружения, остаются плоскими и при действии нагрузки.

Так как одинаковым удлинениям соответствуют одинаковые напряжения, то и напряжения в поперечных сечениях всех продольных слоев (а следовательно, и во всех точках поперечного сечения бруса) равны между собой. Это позволяет в выражении (1) вывести величину  $\sigma$  за знак интеграла. Таким образом,

$$N = \sigma \int_F dF = \sigma F,$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{F}.$$

Итак, в поперечных сечениях бруса при его растяжении или сжатии возникают равномерно распределенные нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

Рассмотрим теперь напряжения в наклонных сечениях бруса.

Обозначим буквой  $\alpha$  угол между наклонным сечением  $n - n_1$  и поперечным сечением  $n - n_2$  (рис. 26, а).

Как уже известно, удлинения всех волокон, параллельных оси бруса, при его растяжении или сжатии одинаковы. Это позволяет предполагать, что напряжения  $p$  во всех точках наклонного (так же, как и поперечного) сечения одинаковы.

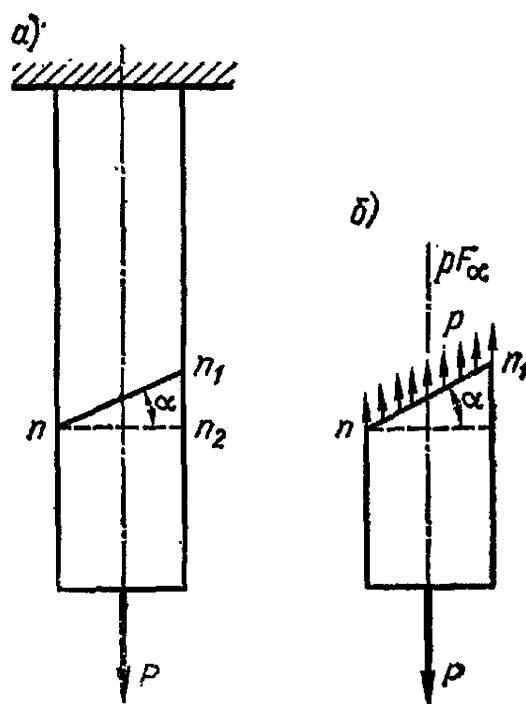


Рис. 26

Рассмотрим нижнюю часть бруса, отделенную сечением  $n-n_1$  (рис. 26, б). Из условий ее равновесия получим следующие уравнения









Рассмотрим брус постоянного сечения, закрепленный верхним концом и нагруженный только собственной силой тяжести (рис. 29, а).

Продольная сила  $N$  в поперечном сечении этого бруса (на расстоянии  $z$  от его нижнего конца) равна силе тяжести нижележащей части бруса, т. е.

$$N = \gamma F z,$$

где  $\gamma$  — удельная сила тяжести материала бруса;  $F$  — площадь поперечного сечения бруса.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} = \gamma z.$$

Осевое перемещение  $z$ -го сечения равно удлинению выше-расположенной части бруса. Для определения этого удлинения необходимо провести интегрирование удлинений элементарных участков согласно выражению (8)

$$\delta = \int_z^l \frac{N dz}{EF}.$$

Интегрирование ведется от текущего значения  $z$  до  $z=l$ .

Так как  $N = \gamma F z$ , то после интегрирования получаем

$$\delta = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - z^2).$$

Согласно этому выражению строится эпюра перемещений  $\delta$  (рис. 29, в). Эпюры  $N$ ,  $\sigma$  и  $\delta$ , показывающие изменение продольной силы, нормальных напряжений и перемещений по длине бруса, изображены на рис. 29, б, в, г.

## 5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает его деформацию. При этом части сооружения выходят из состояния покоя, приобретают некоторые скорости и ускорения. Если нагрузка возрастает медленно, то эти ускорения невелики, а потому можно пренебречь силами инерции, возникающими в процессе перехода системы в деформированное состояние. Такое плавное (постепенное) приложение нагрузки называют *статическим*.

Внешние силы при таком нагружении упругого тела совершают работу на вызванных ими перемещениях. Обозначим ее  $A_{\text{вн}}$ . Эта работа



Таким образом, энергетическое соотношение  $A=U$  может быть использовано и при определении перемещений, возникающих в упругих системах.

Более подробно этот вопрос будет рассмотрен позже.

## ЛЕКЦИИ 5—6

### МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

#### 1. ИСПЫТАНИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ

Основной вид испытания металлов, дающий наиболее полную информацию о механических свойствах, это испытание на растяжение. Специальные испытательные машины осуществляют растяжение образца; величина действующей нагрузки в каждый момент регистрируется на шкале. Стандартный образец для испытания на растяжение изображен на рис. 32. Утолщенные части — головки — служат для закрепления образца в захватах машины. Средняя цилиндрическая часть — это рабочая часть образца, на ней выбирается база для измерения деформаций. Конические участки обеспечивают плавный переход от головок к рабочей части. Это нужно для того, чтобы

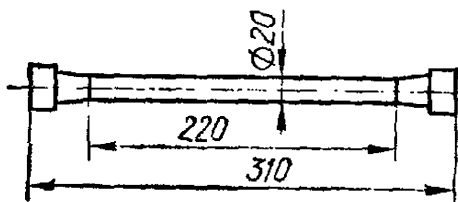


Рис. 32

распределение напряжений в рабочей части было равномерным. Деформация на принятой базе измеряется при помощи тензометра. Существуют разные конструкции тензометров, основанные на разных принципах, и здесь не место для того, чтобы описывать технику эксперимента. Заметим только, что для определения модуля упругости, например, точность измерения должна быть очень высокой. Действительно, для стали модуль упругости  $E$  приблизительно равен  $2,0 \cdot 10^4$  кгс/мм<sup>2</sup>, для мягкой малоуглеродистой стали закон Гука справедлив, пока напряжение не превышает примерно 2000 кгс/мм<sup>2</sup>. Поэтому наибольшая упругая деформация составляет 1/1000 или 0,1%. Выберем базу для измерения деформации 100 мм, тогда величина абсолютного упругого удлинения составит 0,1 мм. Очевидно, точность определения модуля будет той же, что и точность измерения этой малой деформации в 0,1 мм (если считать, что ошибка измерения силы на

машине пренебрежимо мала). Итак, если нам нужно знать величину модуля с точностью 5%, погрешность измерения деформации не должна превосходить 5% от 0,1 мм, т. е. 5 мкм.

Современные испытательные машины автоматически пишут диаграмму растяжения; по оси абсцисс откладывается удлинение, по оси ординат — сила. При пользовании более простыми машинами приходится увеличивать нагрузку ступенями, измеряя удлинение, и строить диаграмму по точкам. При построении диаграммы бывает удобнее откладывать по оси ординат силу, деленную на площадь первоначального поперечного сечения образца, или напряжение. По оси абсцисс откладывают отношение приращения длины к первоначальной

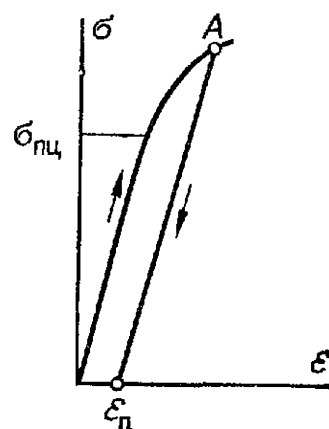


Рис. 33

длине, т. е. относительное удлинение. На рис. 33 изображен начальный участок такой диаграммы. Пока напряжения невелики, диаграмма прямолинейна, значит справедлив закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$ . Измеряя наклон диаграммы, можно определить модуль упругости  $E$ . Начиная с некоторого значения напряжения, зависимость между  $\sigma$  и  $\varepsilon$  перестает быть линейной. Напряжение, после которого закон Гука перестает быть справедливым, называют *пределом пропорциональности* и обозначают  $\sigma_{плц}$ . Более точно было бы называть пределом пропорциональности то напряжение, при котором отклонение от закона Гука превосходит определенный условно назначенный предел. Предположим, что в процессе испытания достигнута нагрузка, соответствующая некоторой точке  $A$  (см. рис. 33) на существенно криволинейном участке диаграммы, и затем от этой точки произведена разгрузка. Оказывается, что при уменьшении нагрузки деформация уменьшается по линейному закону. Диаграмма разгрузки прямолинейна и параллельна первоначальному упругому участку диаграммы. После полной разгрузки деформация не исчезает, сохраняется так называемая остаточная или пластическая деформация. Соответствующая величина  $\varepsilon_n$  отмечена на рисунке. Таким образом, установлен фундаментальный факт: разгрузка следует закону Гука, причем модуль упругости имеет то же значение, что и при нагружении образца. Этому факту можно дать следующую интерпретацию. Деформация



часть диаграммы была изображена на рис. 33 отдельно. При значительных деформациях величина, откладываемая по оси ординат, уже не представляет собой напряжение; сила делится на первоначальную площадь поперечного сечения, тогда как по мере удлинения эта площадь уменьшается. Поэтому изображенная диаграмма называется условной диаграммой. До точки  $C$  кривая диаграммы идет вверх. Это значит, что с ростом деформации увеличивается сопротивление материала пластической деформации, происходит, как говорят, упрочнение материала. Приобретенное упрочнение связано с необратимыми структурными изменениями материала. Предположим, что нагружение произведено до некоторой точки  $A$  на диаграмме, где эффект упрочнения уже ощутим. Если разгрузить образец, разгрузка будет следовать закону Гука. При повторном нагружении диаграмма деформирования будет опять следовать закону Гука, притом до точки  $A$ , от которой была произведена разгрузка. Новый предел текучести оказывается приблизительно равным напряжению, соответствующему точке  $A$ , т. е.  $\sigma_A$ . Таким образом, путем пластической деформации можно повысить предел текучести материала. Явление повышения предела текучести материала и уменьшения его пластичности за счет предварительной пластической деформации часто называют наклепом. При этом теперь часть диаграммы левее точки  $A$  отсутствует, а следовательно, если вновь повторить построение, определяющее условный предел текучести, очевидно, он окажется выше. Условно будем считать, что новый предел текучести равен напряжению, соответствующему точке  $A$ , с которой была начата разгрузка, т. е.  $\sigma_{0,2} \approx \sigma_A$ . Кроме того, протяженность диаграммы в направлении оси абсцисс при повторном нагружении становится меньше, а это значит, что уменьшается пластичность материала.

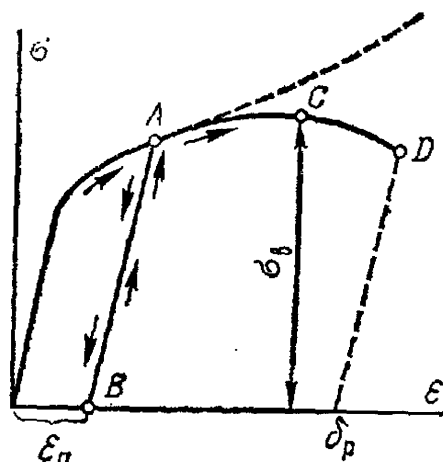


Рис. 34

## 2. ПРОЧНОСТЬ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

Сила, соответствующая точке  $C$  (см. рис. 34), имеет наибольшее значение. Разделив эту силу на площадь

первоначального поперечного сечения образца, мы получим величину, которую называют *пределом прочности*  $\sigma_v$ . Эта величина имеет размерность напряжения, но называть ее напряжением было бы неправильно, поскольку истинная площадь в момент достижения точки *C* может существенно отличаться от первоначальной. Дело заключается в том, что образец сначала растягивается равномерно, сохраняя цилиндрическую форму. Но на стадии образования пластических деформаций картина меняется, на образце появляется местное утонение, так называемая шейка. По мере дальнейшего растяжения образца минимальное сечение в шейке продолжает уменьшаться и, наконец, происходит разрыв. Соответствующая точка на условной диаграмме отмечена буквой *D*. После появления шейки деформация развивается чрезвычайно неравномерно, она сосредоточивается в области шейки, остальная же часть образца не деформируется. Измеряя диаметр образца в шейке и вычисляя минимальную площадь, мы можем определять напряжения, т. е. ординаты истинной диаграммы, показанной на рис. 34 штриховой линией, но соотнести эти ординаты с определенными значениями абсцисс, т. е. с деформациями, уже невозможно, ибо неизвестно, к какой начальной длине следует относить приращение длины, чтобы вычислить деформацию.

Величина относительного остаточного удлинения при разрыве характеризует пластичность материала. Под пластичностью понимается свойство приобретать остаточную деформацию без разрушения. Часто, выбирая материал для изготовления той или иной конструкции, предпочитают менее прочный, но более пластичный материал, имеющий меньший предел текучести и меньший предел прочности, но зато большее удлинение при разрыве. Существо дела ясно из повседневного опыта. Нож из закаленной стали высокого качества легко сломать. Полоса из простого, например, кровельного железа легко гнется, но сломать ее непросто. Конструкция из относительно малопрочного, но пластичного материала может выйти из строя, получив недопустимо большие деформации, но разрушение не будет носить катастрофического характера.

В качестве характеристики степени пластичности принимают обычно величину остаточного относительного удлинения при разрыве  $\delta_r$ . Для определения как предела прочности, так и удлинения при разрыве, нет необходи-

мости строить диаграмму растяжения и измерять деформации. Чтобы найти  $\sigma_b$ , достаточно отметить наибольшее значение силы на шкале машины. Чтобы вычислить удлинение при разрыве  $\delta_p$ , нужно сложить две части разорванного образца и измерить расстояние между двумя заранее нанесенными рисками. Следует заметить, что для определения  $\delta_p$  необходимо условиться о соотношении размеров образца, т. е. об отношении его длины к диаметру. Уже было замечено, что после достижения максимальной нагрузки деформация локализуется в шейке. На коротком образце шейка занимает относительно большую часть длины образца, чем на длинном, и относительный вклад области, занятой шейкой, в суммарную деформацию, больше. Поэтому величина относительного удлинения при разрыве, определенная на коротком образце, будет для одного и того же материала всегда больше, чем та же характеристика, определенная на длинном образце. Общесоюзный стандарт предусматривает два типа образцов для испытаний: с отношением  $l/d=5$  и с отношением  $l/d=10$ . Соответственно вместо обозначения  $\delta_p$  применяют  $\delta_5$  или  $\delta_{10}$ .

### 3. ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривая диаграмму испытания на растяжение образцов из пластичного материала и выясняя ее характерные особенности, мы сознательно не оговаривали, о каком именно материале идет речь. Изображенная на рис. 34 диаграмма, это — некоторая типичная, обобщенная диаграмма, соединяющая характерные особенности, свойственные диаграммам растяжения различных пластичных сплавов. Рассмотрим теперь несколько конкретных материалов.

На рис. 35 представлена диаграмма растяжения алюминиевого сплава Д-16, широко применяемого в авиационной промышленности. Как видно, она очень похожа на изображенную и рассмотренную ранее типичную диаграмму.

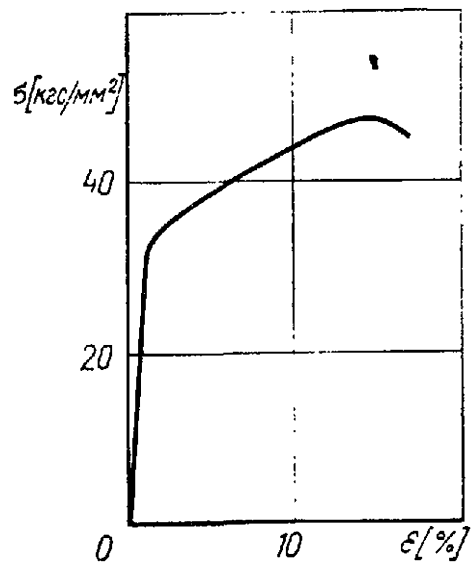


Рис. 35

На диаграмме растяжения красной меди, т. е. технической чистой меди, содержащей очень мало примесей (рис. 36), заметить линейный участок трудно; предел пропорциональности очень низок, низок также условный предел текучести, удлинение при разрыве велико. Следующая диаграмма, изображенная на рис. 37, относится к стеклотекстолиту. Этот материал, как видим, при разгрузке закону Гука не следует.

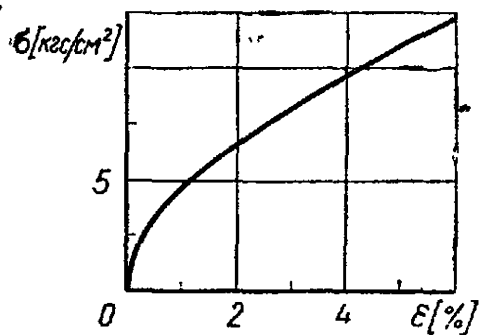


Рис. 36

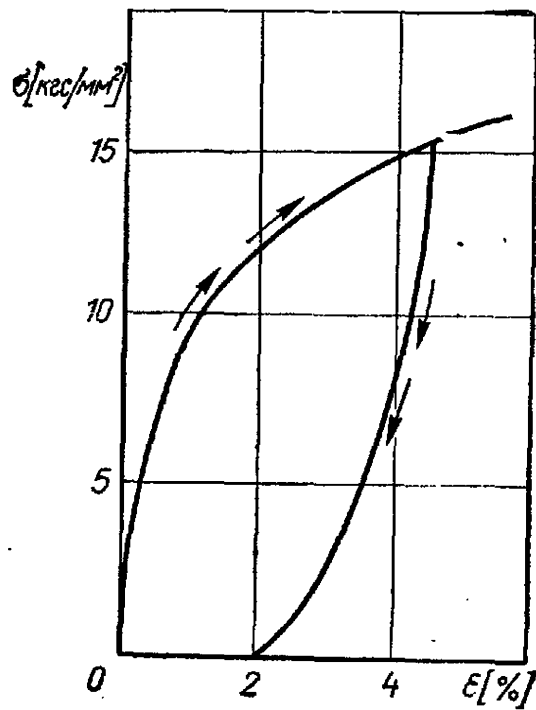


Рис. 37

Приведенная на рис. 38 серия диаграмм относится к различным сталям — среднеуглеродистым и легированным. Существенно то, что, меняя процент содержания углеро-

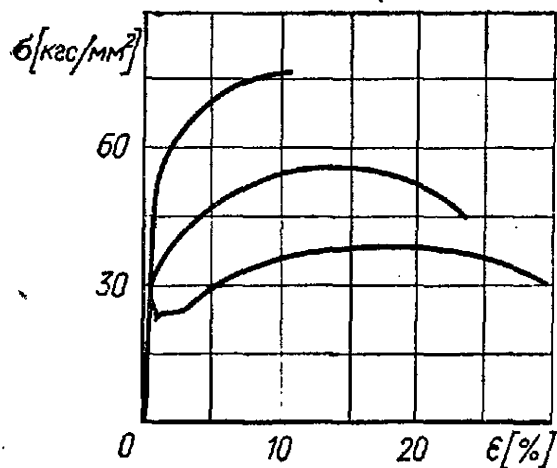


Рис. 38

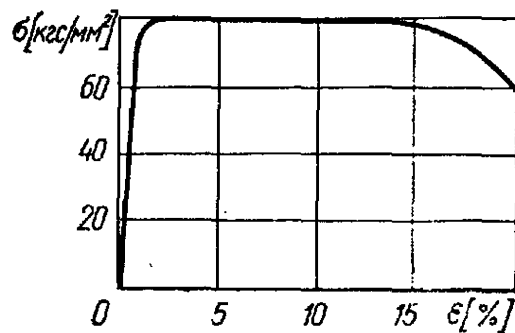


Рис. 39

да, применяя различные виды термической обработки и добавляя легирующие примеси, можно менять свойства стали в очень широких пределах.

Титановые сплавы почти не упрочняются при деформировании, условный предел текучести для них мало отли-

























Гексагональную решетку имеют цинк, титан и некоторые другие металлы. Плоскость плотной упаковки у нее только одна.

Решетка альфа-железа, т. е. той модификации, которая устойчива при температуре ниже  $910^{\circ}\text{C}$ , оказывается не плотно упакованной. Это кубическая объемно-центрированная решетка, основной элемент которой изображен на

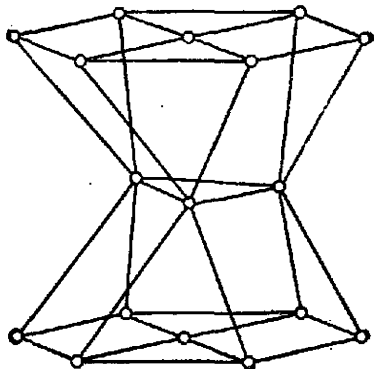


Рис. 48

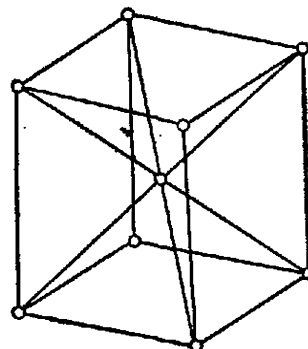


Рис. 49

рис. 49. Атомы расположены в вершинах куба и в его центре.

Атом каждого металла характеризуется его атомным радиусом. Если разница атомных радиусов меньше 15%, металлы образуют твердые растворы замещения. Это простейший вид сплава, узлы кристаллической решетки может занимать совершенно случайным образом атом любой из компонент сплава. Однако тип решетки, устойчивой при данной температуре, зависит от соотношения компонент, как мы уже видели на примере аустенитных сталей.

Атомы элементов с малыми атомными радиусами располагаются внутри кристаллической решетки, вклиниваясь между атомами основного металла. Таким образом, получаются твердые растворы внедрения. В железе, например, растворяется углерод, притом в ограниченном количестве, зависящем от температуры. Путем термической обработки в стали, т. е. в системе железо — углерод, можно создавать различные структуры и управлять таким образом механическими свойствами.

## 2. ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ МОНОКРИСТАЛЛА

Основной опытный факт, с несомненностью обнаруженный при многочисленных опытах на монокристаллических образцах, состоит в следующем. Пластическая деформация

происходит в результате сдвига слоев атомов, причем сдвиг этот происходит в совершенно определенных кристаллографических плоскостях по определенным направлениям. При нормальных температурах и скоростях приложения нагрузки, обычно реализуемых на испытательных машинах, величина сдвига между атомными слоями неодинакова, активные плоскости скольжения отстоят друг от друга на расстоянии порядка 100 межатомных расстояний, и в каждой активной плоскости сдвиг происходит сразу на довольно большую величину порядка 1000 межатомных расстояний. По мере увеличения нагрузки вступают в действие соседние плоскости скольжения, образующие пачку. Между пачками активных плоскостей скольжения остаются значительные объемы, свободные от пластической деформации. Следы пересечения пачек активных плоскостей скольжения с поверхностью кристалла называются линиями скольжения; их можно видеть под микроскопом и даже невооруженным глазом.

Совокупность плоскости скольжения и направления скольжения называется системой скольжения. Чтобы задать систему скольжения, нужно задать пару векторов: вектор нормали к плоскости скольжения и ортогональный ему вектор направления скольжения.

Существует очень простое правило для определения кристаллографических систем скольжения в кристаллической решетке: плоскость скольжения — это плоскость наиболее плотной упаковки атомов; направление скольжения — это направление кратчайшего расстояния между центрами атомов. В гранецентрированной кубической решетке, как было показано, существуют четыре плоскости плотной упаковки. В каждой плоскости центры атомов находятся в вершинах равносторонних треугольников, следовательно, имеются три направления кратчайшего расстояния между центрами. Таким образом, общее число систем скольжения равно 12.

Английский ученый Тэйлор показал, что произвольная пластическая деформация кристалла возможна тогда, когда число систем скольжения не меньше пяти. У гранецентрированных кристаллов это условие выполняется с избытком, металлы с такой решеткой пластичны.

В гексагональной решетке существует только одна плоскость плотной упаковки — базисная плоскость; в ней имеется три направления плотной упаковки, значит, число степеней скольжения равно трем. Для пластической дефор-

мации этого недостаточно, поэтому вступают в действие небазисные системы скольжения, по которым скольжение затруднено. Металлы с гексагональной решеткой часто оказываются хрупкими.

В объемно-центрированной кубической решетке альфа-железа нет плоскостей плотной упаковки, но есть направления плотной упаковки атомов — это направления четырех диагоналей куба. Скольжение может происходить по любой плоскости, проходящей через диагональ, в направлении этой диагонали. Поэтому чистое железо весьма пластично.

### 3. ДИСЛОКАЦИИ

Рассмотрим теперь не реальную решетку одного из описанных выше типов, а модельную простую кубическую решетку, изображенную на рис. 50. Предположим, что один слой атомов сдвинут относительно другого на величину  $u$ .

При этом возникает сила, стремящаяся вернуть слой атомов в первоначальное положение. Так будет до тех пор, пока  $u < a/2$ , если  $a$  есть параметр решетки, т. е. расстояние между атомами. При  $u = a/2$  атомы

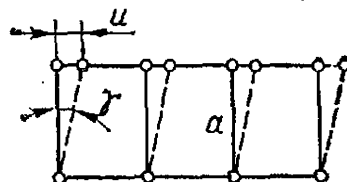


Рис. 50

верхнего ряда находятся как раз над серединами промежутков между атомами нижнего ряда, картина оказывается симметричной и верхний слой может либо вернуться назад, либо проскочить вперед. Следовательно, при  $u = a/2$  решетка находится в состоянии равновесия, сила взаимодействия между слоями атомов равна нулю. Но это равновесие неустойчиво. При  $u > a/2$  сила меняет направление, и решетка стремится занять новое положение равновесия, в точности повторяющее исходное, но со сдвигом на одно междуатомное расстояние. В дальнейшем лучше будет говорить не о силе, а о касательном напряжении, т. е. о силе на единицу площади атомного слоя. Можно показать, что касательное напряжение есть периодическая функция от  $u$  с периодом  $a$ , меняющая знак при  $u = a/2$ . Простейшее предположение будет такое:

$$\tau = \tau_0 \sin \frac{2\pi u}{a}.$$

Чтобы произвести сдвиг на одно междуатомное расстояние, нужно приложить касательное напряжение не меньше чем  $\tau_0$ .

Величину  $\tau_0$  легко подсчитать (здесь мы этого делать не будем); она оказывается равной примерно  $E/20$ . Если мы учтем, что при обычном растяжении образца  $\tau_{\max} = \sigma/2$ , то придем к выводу, что пластические деформации в образце возникают при  $\sigma \approx \frac{1}{10} E$ .

Такая оценка сопротивления сдвигу оказывается, однако, крайне завышенной и не отвечает реальности. Таким образом, представление о сдвиге как о простой трансляции, т. е. об относительном перемещении двух частей кристалла слишком упрощенно. Но самый факт, что пластическая деформация происходит именно в результате сдвига атомных слоев, никаких сомнений не вызывает, он подтвержден тысячами экспериментов. Значит нужно искать какие-то другие механизмы, приводящие к тому же наблюдаемому результату, но допускающие оценки сопротивления сдвигу, достаточно близкие к наблюдаемым.

В физике твердого тела для объяснения истинного механизма пластической деформации было введено представление об особом роде дефектах кристаллической решетки, называемых дислокациями. Хорошо известно, что у металлов идеальных кристаллов, обладающих геометрически правильной решеткой, не существует. Реальная кристаллическая решетка имеет многочисленные и многообразные дефекты, в том числе дефекты, называемые дислокациями. Теория дислокаций это большой и детально разработанный отдел физики твердого тела, история которого весьма любопытна и поучительна. Основные представления о дислокациях возникли в двадцатых — тридцатых годах этого столетия, причем эти представления были чисто умозрительными и гипотетическими. Никаких реальных доказательств существования дислокаций не было, некоторые ученые верили в их существование, другие решительно не верили, наконец, третьи допускали их как удобный элемент для логических построений и вывода формул, более или менее согласующихся с фактами. Развитие теории дислокаций потребовало довольно сложного и своеобразного математического аппарата. Неожиданно оказалось, что этот аппарат уже существовал; в начале нашего столетия был создан раздел теории упругости, носящий название теории дислокаций. Создатели этой ветви теории упругости руководствовались, по-видимому, внутренней логикой развития самой науки, а отнюдь не запросами практики. Поэтому математическая теория дислокаций в течение многих лет

рассматривалась как нечто изящное, но практически бесполезное. Именно эта математическая теория была положена в основу теории дислокаций в кристаллах, которая сейчас широко и успешно применяется к описанию и объяснению процесса пластической деформации.

С другой стороны, физики-экспериментаторы стали искать способы обнаружения дислокаций в кристаллах. Сначала были найдены достаточно убедительные, но в общем косвенные методы их наблюдения. Наконец, с изобретением электронных микроскопов высокой раз-

Результаты

действие их с хорошей степенью приближения описывается законом Гука, так как если бы кристалл представлял собой сплошное упругое тело. Внутри ядра, где перемещения велики, во-первых, законом Гука пользоваться уже нельзя,

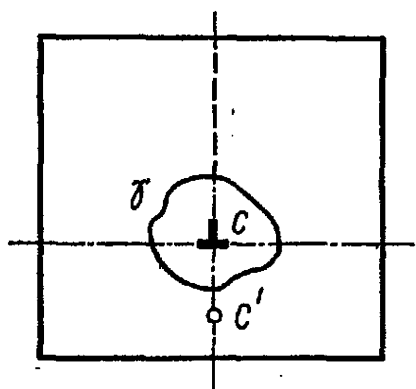


Рис. 52

во-вторых, нельзя рассматривать кристалл как сплошную среду, отвлекаясь от атомной структуры.

Край вставленного слоя атомов называется линией дислокации; на плоском чертеже рис. 51 ей соответствует точка  $C$ . Данное определение не вполне четко, положение точки  $C$  не вполне определено. Но эта неопределенность не выходит за пределы одного атомного расстояния.

В математической теории упругости отвлекаются от атомного строения тела и представляют его как сплошную среду. Поэтому рассуждения при построении краевой дислокации приходится несколько видоизменить. Представим себе бесконечное пространство, заполненное упругой средой. Сделаем разрез по вертикальной полуплоскости (рис. 52). Это будет разрез от точки  $C$  по вертикальной полупрямой до бесконечности. Раздвинем края разреза в горизонтальном направлении на постоянную величину  $b$ . Вектор относительного перемещения краев разреза называется вектором Бюргерса. Представить себе, каким образом можно раздвинуть на постоянную величину края разреза в непосредственной окрестности точки  $C$  довольно трудно, ясно лишь, что деформации в этой окрестности будут весьма велики, а в самой точке станут бесконечно большими. Чтобы исключить область, где закон Гука заведомо неприменим, окружим точку  $C$  мысленно контуром  $\gamma$  и будем интересоваться только тем, что происходит вне контура  $\gamma$ . Теперь заполним пустое пространство между «берегами» разреза материалом и восстановим сплошность тела. Говорят, что в теле создана краевая дислокация с вектором Бюргерса  $\vec{b}$ . Краевая дислокация изображается значком в виде перевернутой буквы  $T$ , как показано на рис. 52. Вертикальная черточка напоминает о вставленном слое атомов. Такая краевая дислокация считается положительной, причем правило знаков совершенно условно. Если сделать разрез от точки  $C$  не вверх, а вниз, раздвинуть края разреза и заполнить щель материалом, получится отрицательная



горизонтальной плоскости не связано с добавлением или удалением материала, поэтому такие движения всегда возможны. Горизонтальная плоскость на рис. 52 является плоскостью скольжения дислокации. Более точное определение будет следующее: плоскость скольжения есть плоскость, содержащая в себе линию дислокации и ее вектор Бюргерса. Заметим, что пока определение плоскости скольжения дислокации никак не связано с данным выше определением кристаллографических плоскостей и систем скольжения.

Если силы, приложенные к телу, создают в плоскости скольжения касательное напряжение, то дислокация будет двигаться. На рис. 53 изображен блок, содержащий одну краевую дислокацию. Предположим, что эта дислокация создана в результате разреза, сделанного от левого края

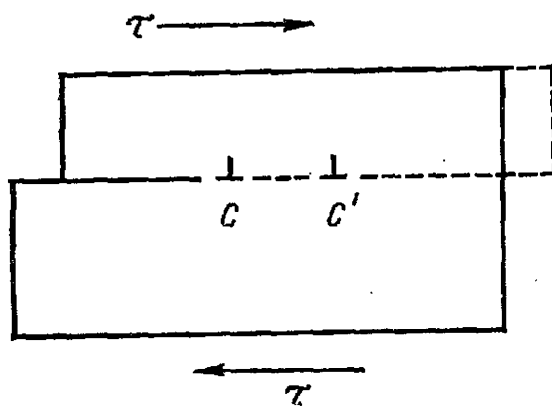


Рис. 53

вправо до точки  $C$ , верхняя половина сдвинута до этой точки, в результате слева образовалась ступенька. Под действием изображенного на рисунке касательного усилия положительная дислокация будет двигаться вправо, как бы ни было мало напряжение  $\tau$ . Действительно, чтобы переместить дислока-

цию из положения  $C$  в положение  $C'$ , нужно сделать дополнительный разрез на участке  $CC'$  и сдвинуть края на величину  $b$ . На поверхности разреза возникают касательные напряжения  $\tau$ , которые производят положительную работу, следовательно, помогают движению дислокации. Когда дислокация выйдет наружу, образуется уступ справа, во всем объеме кристалла восстановится регулярное расположение атомов со сдвигом верхней части относительно нижней на одно междуатомное расстояние, если вектор Бюргерса равен этому расстоянию. В этом заключается элементарный акт пластической деформации. Движение большого числа дислокаций в кристалле и выход их на поверхность наблюдается как макроскопическая пластическая деформация.

В рассмотренной модели блока, содержащего одну дислокацию, для передвижения ее было достаточно приложить сколь угодно малое напряжение. На самом деле это

не так; напряжение, необходимое для создания пластической деформации, имеет определенную, отличную от нуля величину. Это связано с двумя обстоятельствами: во-первых, кристалл содержит не одну, а много дислокаций, которые взаимодействуют между собой, во-вторых, рассуждения, связанные с рис. 53, относились по существу к дислокации в сплошной среде, а не в кристаллической решетке. Легко убедиться в существовании сил взаимодействия между дислокациями. Предположим, что две дислокации одного знака имеют общую плоскость скольжения. Если расстояние между ними велико, они практически не взаимодействуют, и энергия двух дислокаций равна сумме их энергий. При сближении дислокаций их суммарная энергия увеличивается. Когда это расстояние становится равным нулю, две дислокации сливаются в одну с удвоенным вектором Бюргерса, и энергия такой дислокации также удваивается. Но энергия любой механической системы в состоянии равновесия стремится принять минимальное значение, значит расстояние между дислокациями одного знака увеличивается, они отталкиваются друг от друга, как одноименные электрические заряды. Две дислокации разных знаков, наоборот, притягиваются. Действительно, когда расстояние между ними становится равным нулю, дислокации уничтожают друг друга. Аналогия с электрическими зарядами справедлива лишь до тех пор, пока дислокации находятся в одной плоскости скольжения; если плоскости скольжения различны, аналогия кончается, взаимодействие дислокаций оказывается более сложным и элементарные рассуждения недостаточны. В реальных кристаллах образуются сложные дислокационные структуры и для продвижения каждой дислокации необходимо совершить работу. Чтобы продвинуть дислокацию, необходимо преодолеть силу, называемую силой Пайерлса. При движении дислокации на одно межуатомное расстояние сила Пайерлса меняет величину и направление, так что суммарная работа равна нулю, но для возбуждения движения нужна некоторая начальная энергия.

Для кристаллографических систем скольжения силы Пайерлса малы. Поэтому в действительности подвижны те дислокации, у которых плоскости скольжения совпадают с кристаллографическими плоскостями скольжения. Для других плоскостей силы Пайерлса слишком велики и дислокации практически неподвижны. В валентных кристаллах, например в кристалле алмаза, силы Пайерлса



ных дислокаций удерживает ее на этом расстоянии и не позволяет продвинуться дальше. Следующие дислокации останавливаются все ближе и ближе к источнику, наконец источник оказывается подавленным и перестает генерировать. Отделение новых дислокаций можно вызвать, только увеличив напряжение. Но при этом могут вступить в действие другие источники с меньшей длиной и большим критическим напряжением, которые расположены в соседних атомных плоскостях и, возможно, в других системах скольжения.

Накопление групп дислокаций перед препятствиями, образование новых препятствий при соединении дислокаций в пересекающихся плоскостях скольжения и постепенный ввод в действие новых источников, имеющих разное критическое напряжение, — все это объясняет упрочнение при пластической деформации.

Теперь можно попытаться ответить на вопрос, что нужно сделать, чтобы получить прочный материал? Первый и обычный для техники способ состоит в том, чтобы создать как можно больше препятствий для движения дислокаций. Наклеп, создаваемый пластической деформацией, и есть как раз увеличение плотности дислокаций, большая часть которых неподвижна и служит помехой для перемещения подвижных. В технике почти не применяются чистые металлы; прочные сплавы имеют обычно очень сложную структуру, они состоят из разных фаз. Это делается для того, чтобы затруднить движение дислокаций, чтобы расставить как можно больше препятствий на их пути. Способы, которыми это достигается, излагаются в курсах металловедения.

Но в принципе можно было бы пойти по другому пути, а именно — попытаться создать материал, не содержащий дислокаций. У такого материала была бы реализована теоретическая прочность, точнее — теоретическое сопротивление сдвигу. Такие бездислокационные кристаллы были недавно получены. К сожалению, эти нитевидные кристаллы, или «усы», очень малы. Длина их не превышает 2—3 мм, а диаметр несколько микрометров. На нитевидных кристаллах железа была реализована прочность до 1400 кгс/мм<sup>2</sup>, что примерно соответствует теоретической прочности. Еще более высокие пределы прочности, до 3000 кгс/мм<sup>2</sup>, достигаются на нитевидных кристаллах из неметаллических веществ, окиси алюминия, нитрида бора, карбида кремния и других.

Научное значение сделанного открытия исключительно велико. Показано, что теоретическая прочность действительно может быть достигнута. Практическое значение пока неясно; попытки получить высокопрочные материалы, армированные нитевидными кристаллами, пока еще не привели к ощутимым результатам.

## ЛЕКЦИИ 9—10

### РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

#### 1. КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПАСА

Опыт показывает, что для каждого конструкционного материала существуют какие-то определенные значения напряжений, при которых происходят качественные изменения свойств.

Рассмотрим типичную диаграмму растяжения для пластичного материала (рис. 54). Пока напряжение мало,

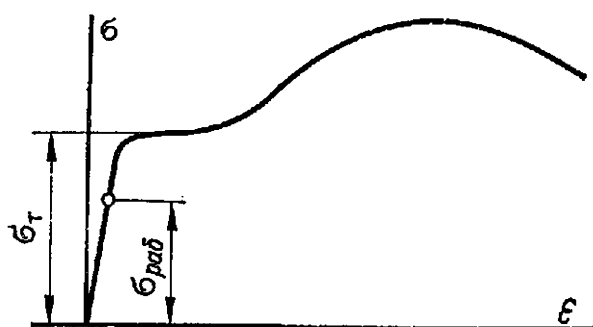


Рис. 54

в растянутом образце возникают упругие деформации. По достижении напряжением предела текучести возникают заметные пластические деформации, которые в дальнейшем возрастают без заметного увеличения нагрузки. Если

рассматривать растянутый стержень как элемент конструкции, например как шатун кривошипно-ползунного механизма, то станет очевидным, что для стержня наличие остаточных удлинений недопустимо, иначе функции механизма будут нарушены. Поэтому рабочее напряжение, т. е. напряжение в эксплуатационных условиях, должно быть меньше предела текучести.

Заметим, что термин «рабочее напряжение» условен, так как вследствие приближенности расчетных схем и самих методов расчета определение истинных напряжений, возникающих в конструкции при ее работе, оказывается невозможным. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, зачастую говорят не рабочие, а расчетные напряжения, имея в виду возникающие при работе конструкции на-

пряжения, но определенные с той точностью, которая обусловлена принятыми методами расчета.

Подчеркнем также, что, говоря о недопустимости пластических деформаций в работающем элементе конструкции, мы тем самым расширяем наши представления о нарушении прочности, которые были изложены во введении. Таким образом, при прочностных расчетах под нарушением прочности понимают не только разрушение в буквальном смысле этого слова, но также и возникновение пластических деформаций. Правда, в некоторых случаях возникновение местных пластических деформаций считают допустимым, но об этих специальных случаях расчета пока говорить не будем.

Назовем напряжения, при которых возникает тот или иной вид нарушения прочности, предельными и обозначим их  $\sigma_{\text{пред}}$ , т. е. для пластичного материала предельным напряжением будет предел текучести ( $\sigma_T$  или  $\sigma_{0.2}$ ), а для хрупкого — предел прочности ( $\sigma_B$ ). Рабочее (расчетное) напряжение по условию прочности должно быть меньше предельного, следовательно, их отношение, которое назовем коэффициентом запаса и обозначим  $n$  должно быть больше единицы

$$n = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\text{раб}} > 1.$$

Ясно, что требование  $n > 1$  недостаточно конкретно и поэтому ставят условие, чтобы расчетный коэффициент запаса  $n$  был не меньше некоторого предварительно выбранного требуемого или заданного коэффициента запаса, который будем обозначать  $[n]$ . Таким образом, условие прочности будет иметь вид

$$n = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\text{раб}} \geq [n].$$

Требуемый коэффициент запаса  $[n]$  характеризует степень нашего незнания многих обстоятельств, от которых зависят как рабочие, так и предельные напряжения. Сюда относятся случайные перегрузки, непредвиденные дефекты материала и неизбежные отклонения технологических условий от нормативных. Но, конечно, эти случайности должны оцениваться здраво. Ибо чрезмерное увеличение коэффициента запаса, гарантируя прочность, приведет к неоправданному утяжелению конструкции.

Ответить на вопрос о том, какова величина этого коэффициента, в общем виде не представляется возможным. В каждой отрасли техники сложились свои подходы

и свои традиции, а точнее — свой опыт. Коэффициент запаса определяется в первую очередь из опыта, накопленного в процессе создания аналогичных конструкций, зависит от уровня технологии и от тех задач, которые ставит перед конструктором практика. В общем машиностроении требуемый коэффициент запаса для типовых деталей машин колеблется в пределах от полутора до двух с половиной единиц. В авиационной технике требования минимального веса заставляют брать от конструкции максимум резервов прочности, и там коэффициент запаса для многих узлов лежит в пределах полутора единиц, а иногда бывает и меньше, но зато налагаются требования натурных испытаний. В процессе создания опытной конструкции отдельные узлы самолета и весь самолет в сборе (опытный образец, конечно) подвергают испытаниям до разрушения в типичных условиях наиболее опасных режимов. Кроме того, более строго регламентируются и технологические процессы, а при эксплуатации самолета ведутся наблюдения за выработанным ресурсом двигателей и самолета в целом. Для строительных сооружений коэффициент запаса назначается довольно большим. Это — сооружения длительного срока службы.

Теперь с достаточной очевидностью вырисовывается общая схема расчета по напряжениям. Прежде всего этот расчет может производиться с целью проверки на прочность. Если размеры детали уже выбраны из каких-то соображений, мы проводим проверочный расчет. Для этого выявляется элемент конструкции или какое-либо сечение элемента, в котором возникают наибольшие напряжения, и устанавливается фактическая (расчетная) величина коэффициента запаса. Если этот коэффициент удовлетворяет конструктора, т. е. он больше выбранного им требуемого коэффициента запаса, можно считать, что проверочный расчет дал положительный результат. В противном случае необходимы конструктивные изменения. Возможна и обратная ситуация. Бывает, что коэффициент запаса заранее задан (или задано допускаемое напряжение) и необходимо назначить размеры детали по условию прочности. Это будет уже не проверочный, а проектировочный (или проектный) расчет по допускаемым напряжениям или по заданному коэффициенту запаса.

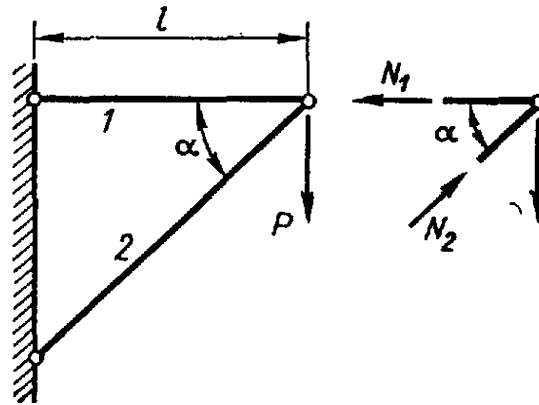


Рис. 55

Правда, надо сразу же сказать, что расчет по напряжениям не является единственным. Существуют и другие подходы, но с ними вы познакомитесь несколько позже.

Рассмотрим простейшие примеры.

Положим, проектируется под заданную нагрузку кронштейн с заданным вылетом  $l$  (рис. 55). Стержни предполагается изготовить из одного материала, имеющего одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии. Требуется подобрать угол  $\alpha$  из условия минимума расхода материала.

Сначала найдем усилия в стержнях. Верхнему стержню присвоим номер один, нижнему — номер два. Выделяем из фермы узел в прикладываемом соответствующие усилия  $N_1$  и  $N_2$ . Из условий равновесия выделенного узла находим:

$$N_1 = P \operatorname{ctg} \alpha; \quad N_2 = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

Положим, допускаемое напряжение для обеих стержней нам задано  $[\sigma]$ . Тогда легко определить требуемые площади поперечных сечений стержней

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma]}; \quad F_2 = \frac{N_2}{[\sigma]}.$$

Сюда остается подставить найденные значения  $N_1$  и  $N_2$ .

Теперь нам нужно составить выражение минимизируемой функции. В данном случае это будет суммарный объем стержней

$$V = F_1 l_1 + F_2 l_2.$$

Подставим сюда  $l_1 = l$  и  $l_2 = l / \cos \alpha$ , а затем — значения  $F_1$  и  $F_2$ . В итоге получим

$$V = \frac{Pl}{[\sigma]} \left( \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \right).$$

Дифференцируя это выражение по  $\alpha$  и приравнивая производную нулю, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}; \quad \alpha = 54^\circ 10'.$$

Мы решили простейшую задачу на так называемое оптимальное проектирование — подобрали оптимальное значение угла  $\alpha$ . Что же касается площадей поперечных сечений  $F_1$  и  $F_2$ , то они определяются из выражений

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma]} \operatorname{ctg} \alpha; \quad F_2 = \frac{P}{[\sigma]} \frac{1}{\sin \alpha},$$

куда остается подставить найденное значение  $\alpha$ .

## 2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Мы рассмотрели простейший пример, где внутренние силы определялись из условий равновесия для отсеченной части стержня. Однако это возможно далеко не всегда.

Вернемся к тому же кронштейну (см. рис. 55). Для определения внутренних сил мы воспользовались двумя условиями равновесия для отсеченного узла. Но представим себе, что конструктор, желая повысить прочность, установит еще один стержень (рис. 56). Тогда для выделенного узла мы по-прежнему можем составить два независимых уравнения равновесия, а неизвестных будет

уже три. Если число стержней увеличивать, то соответственно будет возрастать и число неизвестных, а число уравнений равновесия останется неизменным, и найти внутренние силы, пользуясь только условиями равновесия, мы не сможем.

Еще известный вам пример. Балка на двух опорах (рис. 57). Реакции опор легко определяются из условий равновесия. Но представим себе, что балка поддерживается в пролете еще одним катком. Возникает еще одна неизвестная реакция, а число уравнений равновесия для балки остается прежним. При дальнейшем увеличении числа опор количество недостающих уравнений будет возрастать.

Системы, для которых внутренние силовые факторы определяются из условий равновесия, называют, статически определимыми. Системы же, для которых число неизвестных реакций и внутренних силовых факторов превышает число независимых уравнений равновесия, которые могут

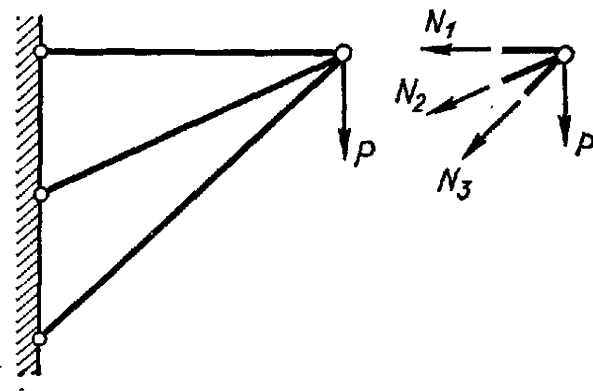


Рис. 56

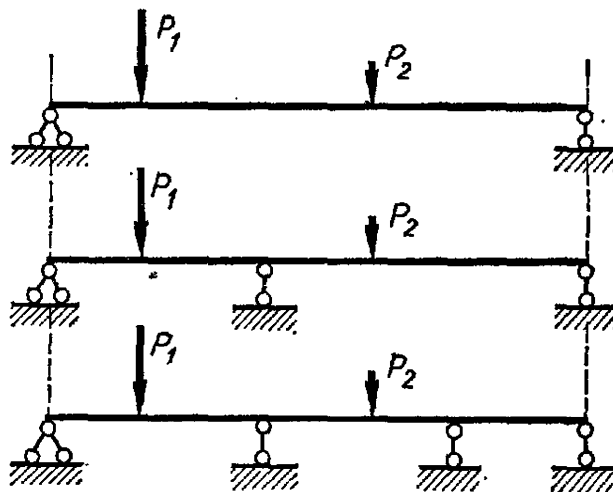


Рис. 57

быть составлены для системы, называют статически неопределимыми. Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия называют степенью статической неопределимости.

Система, показанная на рис. 55, статически определима. На рис. 57 мы видим последовательно статически определимую, один и два раза статически неопределимые системы. Число статической неопределимости ничем сверху не ограничено. Система может быть и сто, и двести раз статически неопределимой.

Теперь остается выяснить, из каких условий можно

составить недостающие уравнения, так чтобы общее их число равнялось бы числу неизвестных. В принципе ответ на этот вопрос выглядит очень просто. Мы должны кроме условий равновесия учесть еще и особенности деформации системы. Для кронштейна, показанного на рис. 56, мы имеем два уравнения равновесия при трех неизвестных. Недостающее уравнение должно отразить то обстоятельство, что длины трех стержней меняются не произвольным образом, а так, чтобы деформированные стержни сошлись в узловой точке, чтобы она осталась общей для всех стержней.

Для балки, лежащей на трех опорах (рис. 57), следует, очевидно, потребовать, чтобы реакция средней

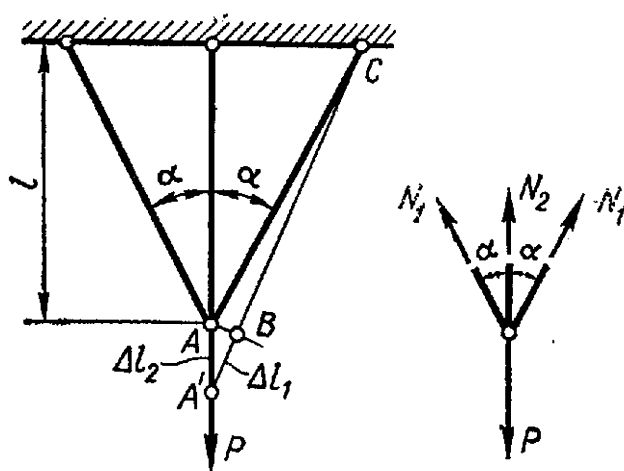


Рис. 58

опоры имела бы такую величину, при которой прогиб в точке опоры обращался бы в нуль.

Уравнения, дополняющие уравнения статики, называют уравнениями перемещений. Рассмотрим примеры.

Трехстержневая ферма нагружена силой  $P$  (рис. 58). Длина среднего стержня  $l$ , а произведения  $EF$  для всех

стержней одинаковы. Требуется определить усилия в стержнях в функции угла  $\alpha$ .

Мысленно отделяем узел и вводим внутренние силы. По условию симметрии усилия  $N_1$  в боковых стержнях одинаковы. К этому же выводу мы придем, если приравняем нулю сумму проекций сил на горизонтальную ось. Второе уравнение равновесия нам дает

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 = P.$$

Больше из уравнений равновесия мы ничего получить не можем. Система один раз статически неопределима. Необходимо составить уравнение перемещений.

Представим себе, что узел переместился вниз, оставаясь на оси симметрии, и точка  $A$  заняла положение  $A'$ . Отрезок  $AA'$  представляет собой удлинение среднего стержня  $\Delta l_2$ . Удлинение бокового стержня мы найдем, проведя дугу окружности  $AB$  с центром в точ-

ке  $C$ . За малостью перемещений дугу  $AB$  мы рассматриваем как перпендикуляр, опущенный на прямую  $A'C$ . А так как угол  $\alpha$  изменился незначительно, то можно написать

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha.$$

Это и есть необходимое уравнение перемещений. Остается только выразить удлинения через силы по закону Гука

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF \cos \alpha}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF},$$

в результате получим

$$N_1 = N_2 \cos^2 \alpha.$$

Решая это уравнение совместно с полученным ранее уравнением равновесия, находим

$$N_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}; \quad N_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^2 \alpha}.$$

Рассмотрим еще один пример.

Ферма, состоящая из трех стержней, для которых произведения  $EF$  одинаковы, нагружена в узле  $A$  вертикальной силой  $P$  (рис. 59).

Система, как и предыдущая, один раз статически неопределима.

На первый взгляд может показаться, что всю нагрузку воспринимает только вертикальный стержень. Но это не так.

Мысленно выделяем узел, вводим внутренние силы и составляем два уравнения равновесия

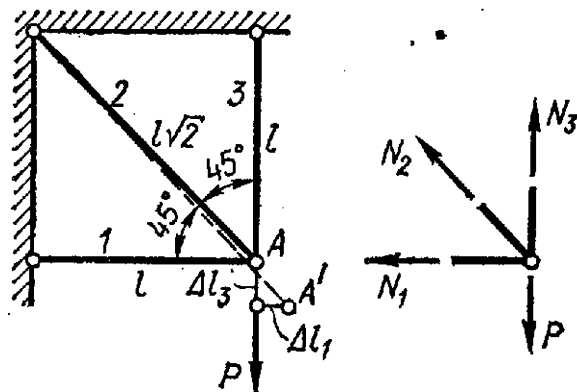


Рис. 59

$$N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 = P; \quad N_1 + N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Остается составить уравнение перемещений. Положим, узловая точка опустилась вниз (см. рис. 59). Вертикальное перемещение узловой точки равно удлинению третьего стержня  $\Delta l_3$ . Кроме того, узловая точка может переместиться также и по горизонтали. Это будет удлинение первого стержня  $\Delta l_1$ . Сумма проекций этих отрезков на



узловой точке (рис. 60). Длины и жесткости стержней могут быть различными. Ориентация стержней задана значениями угла  $\alpha_i$ , отсчитываемыми от линии действия силы  $P$ .

Для выделенного узла мы можем написать два очевидных уравнения равновесия

$$\sum_1^n N_i \cos \alpha_i = P; \quad \sum_1^n N_i \sin \alpha_i = 0.$$

Значит, если стержней будет  $n$ , то система  $n - 2$  раза статически неопределима и нам необходимо составить  $n - 2$  уравнений перемещений. Но мы поступим несколько иначе.

Пусть узловая точка получила смещение  $u$  по горизонтали и  $v$  — по вертикали. Тогда через величины  $u$  и  $v$  легко выражаются удлинения каждого стержня. Так, для произвольно взятого  $i$ -го стержня имеем

$$\Delta l_i = v \cos \alpha_i + u \sin \alpha_i,$$

откуда

$$N_i = \frac{E_i F_i}{l_i} (v \cos \alpha_i + u \sin \alpha_i).$$

Подставив полученные значения  $N_i$  в уравнения равновесия, получим

$$v \sum_1^n \frac{E_i F_i}{l_i} \cos^2 \alpha_i + u \sum_1^n \frac{E_i F_i}{l_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i = P;$$

$$v \sum_1^n \frac{E_i F_i}{l_i} \sin \alpha_i \cos \alpha_i + u \sum_1^n \frac{E_i F_i}{l_i} \sin^2 \alpha_i = 0.$$

Так как постоянные  $u$  и  $v$  являются общими для всех стержней, то они выносятся за знак суммы. Таким образом, мы получаем два уравнения относительно  $u$  и  $v$ . Суммы, стоящие в качестве коэффициентов в этих уравнениях, легко вычисляются по исходным данным стержневой системы. После того как величины  $u$  и  $v$  найдены, без труда определяются усилия в каждом стержне.

### 3. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим статически неопределимые системы, для которых возникновение внутренних сил связано с внешним температурным воздействием.

Жесткая балка (рис. 61) подвешена на двух одинаковых

тягах и одним концом закреплена шарнирно. Определить изменение внутренних усилий в стержнях, которое произойдет, если систему нагреть на температуру  $\Delta t$ .

Механизм возникновения температурных напряжений в данной системе достаточно очевиден. Если бы стержни

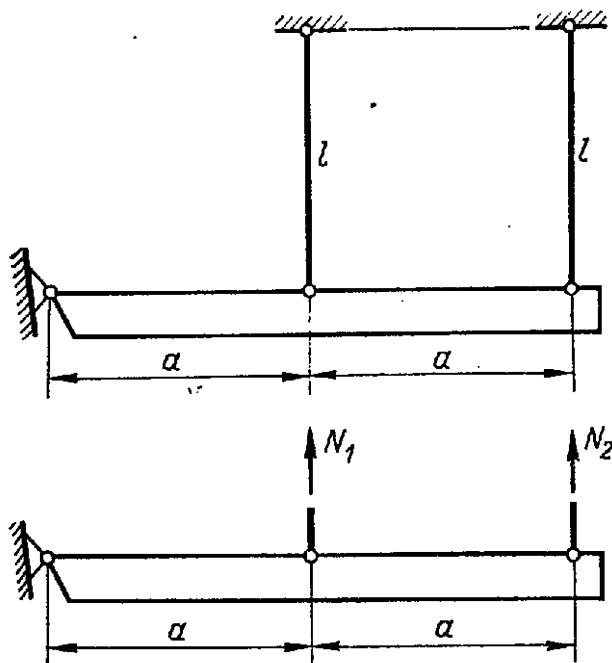


Рис. 61

не были связаны друг с другом через балку, они получили бы одинаковые температурные удлинения. Но этому препятствует жесткая балка. При ее повороте удлинение левого стержня оказывается меньшим, чем правого. Левый стержень мог бы еще удлинить, но он упирается в балку, и в нем возникает сжимающее усилие. Температурное удлинение правого стержня не успевает за тем перемеще-

нием, которое связано с поворотом балки, и здесь возникает растягивающее усилие. Таким образом, левый стержень сжат и растягивает правый. Правый растянут и сжимает левый. Образуется система внутренних самоуравновешенных сил.

Следует отметить, что возникновение температурных напряжений характерно только для статически неопределимых систем. В статически определимых системах кинематические свойства таковы, что удлинения стержней при температурном воздействии возрастают свободно и ничем не стеснены.

Приступим к решению задачи. Проведем мысленное сечение через оба стержня и введем силы  $N_1$  и  $N_2$ . И хотя мы уже догадались, что эти силы имеют разный знак, примем их растягивающими. Кстати, такой формализм во многих случаях представляет определенные удобства. Знаки полученных в дальнейшем усилий покажут нам, правильно ли мы их направили или нет.

Приравняв нулю сумму моментов сил относительно шарнира, получим

$$N_1 + 2N_2 = 0.$$

Условия равновесия нам больше ничего не дадут. Мы могли бы приравнять нулю сумму проекций сил на вертикальную ось, но для этого необходимо было бы освободить балку от шарнира и ввести реакцию шарнирной опоры. Мы получили бы еще одно уравнение, но вместе с ним ввели бы еще одну неизвестную силу — реакцию опоры, которая нас пока не интересует.

Итак, мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными.

Уравнение перемещений составляется очень просто. Поскольку расстояние от шарнира до правого стержня вдвое больше, чем до левого, то и удлинение правого стержня будет вдвое большим. Следовательно,

$$\Delta l_2 = 2 \Delta l_1.$$

Удлинение каждого стержня складывается из силового и температурного, т. е.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF} + l \alpha \Delta t; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF} + l \alpha \Delta t.$$

Здесь под  $\alpha$  понимается коэффициент температурного удлинения.

Написанные соотношения имеют, естественно, свои пределы применимости. При высокой температуре модуль упругости заметно снижается, коэффициент линейного расширения  $\alpha$  оказывается сам зависящим от температуры, но главное заключается в том, что при высоких температурах начинает проявляться свойство ползучести. Деформации заметно увеличиваются с течением времени при неизменных напряжениях. Опыт показывает, что написанными соотношениями для сталей можно пользоваться в пределах температур, не превышающих 300—400°С.

Перепишем уравнение перемещений в силах. Исключая  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ , получаем

$$N_2 - 2N_1 = EF \alpha \Delta t.$$

Теперь, кстати, видно, почему в статически определимых системах температурное воздействие не вызывает изменений во внутренних силах. Температурные удлинения входят лишь в уравнение перемещений, а в статически определимых системах силы определяются из уравнений равновесия без привлечения уравнений перемещений.

Решая совместно два полученных уравнения, находим

$$N_1 = -\frac{2}{5} EF\alpha \Delta t; \quad N_2 = \frac{1}{5} EF\alpha \Delta t.$$

Как и следовало ожидать, усилие  $N_1$  оказалось отрицательным. Сила — сжимающая.

Если найденные усилия разделить на площадь  $F$ , мы получим значения температурных напряжений. Они про-

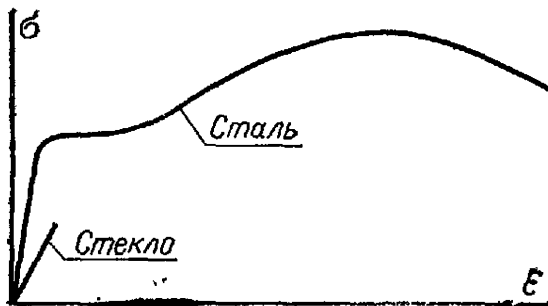


Рис. 62

порциональны произведению  $E\alpha \Delta t$ , что характерно вообще для всех систем, подвергающихся температурному воздействию.

Температурные напряжения могут достигать больших величин, но степень их опасности для

конструкции различна и существенно зависит от свойств материала. Наиболее опасно температурное воздействие для хрупких материалов, разрушение которых происходит при малых деформациях. Характерно в этом смысле поведение стекла.

Стекло — типичный хрупкий материал. Диаграмма растяжения стекла показана на рис. 62. Участок пластичности отсутствует. На том же рисунке для сравнения показана диаграмма испытания стали. Сталь, естественно, прочнее. Но для оценки влияния температурных напряжений важен не предел прочности, а деформация при разрушении. Если температурная деформация  $\alpha \Delta t$  имеет тот же порядок, что и предельное удлинение, характерное для данного материала, возникает реальная опасность разрушения. Для стали деформации при разрушении очень велики, поэтому температурные напряжения для стальных конструкций, как правило, опасности не представляют. Самое большее, в стальной конструкции возникнут некоторые остаточные деформации. У стекла удлинение при разрыве очень маленькое, поэтому стеклянная посуда так чувствительна к резкому изменению температур.

#### 4. МОНТАЖНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим еще один класс статически неопределимых систем. Займемся определением монтажных усилий и напряжений.

Обратимся к следующему примеру. Предстоит собрать конструкцию, показанную на рис. 63. Жесткая балка должна быть подвешена на трех одинаковых стержнях. При сборке после того, как два стержня были установлены, обнаружилось, что проушина третьего стержня не совпадает с отверстием в балке. Возникла невязка в размерах  $\Delta$ .

Возникший зазор был компенсирован усилиями, приложенными к балке, и система была принудительно собрана. Но после сборки в стержнях конечно сохранились внутренние усилия, которые называются монтажными. Они, как и температурные усилия, являются самоуравновешенными — внешних сил нет, а внутренние имеют такие направления и такую величину, что удовлетворяют условиям равновесия сами по себе.

Если мы хотим определить эти усилия, необходимо знать величину невязки  $\Delta$ . Будем считать ее заданной.

Мысленно проводя сечения через три стержня (рис. 63), отделяем балку и составляем уравнения равновесия. Приравниваем нулю сумму проекций сил на вертикальную ось и сумму моментов относительно среднего шарнира.

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0; \quad N_1 = N_3.$$

Итак, мы получаем два уравнения с тремя неизвестными и нам остается составить уравнение перемещений.

Представим себе, что после сборки балка переместилась вниз и при этом повернулась. Мы специально берем такое смещение для балки, чтобы все стержни удлинились, коль скоро мы приняли, что все усилия в стержнях растягивающие.

Рассматривая отрезок  $BB'$  как среднюю линию трапеции  $AA'CC'$ , мы можем написать

$$BB' = \frac{1}{2} (AA' + CC')$$

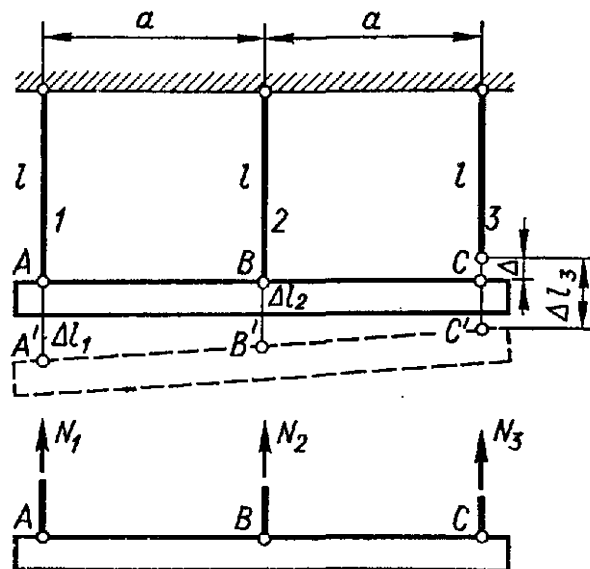


Рис. 63



нятием статической неопределенности. Дальнейшее освоение методов раскрытия статической неопределенности требует самостоятельного решения возможно большего числа задач.

## ЛЕКЦИИ 11—12

### КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

#### 1. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ

Под кручением понимается такой вид нагружения бруса, при котором внутренние силы в поперечных сече-

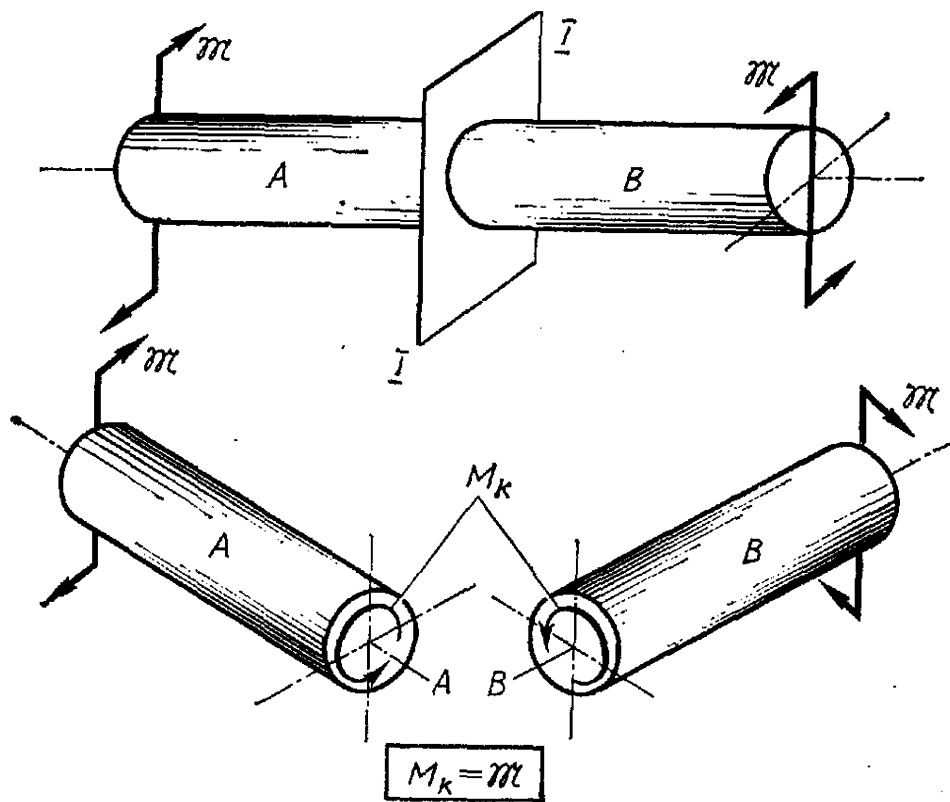


Рис. 64

ниях приводятся только к крутящему моменту  $M_k (M_z)$ . Прочие силовые факторы (изгибающие моменты, нормальная и поперечные силы) равны нулю.

Простейшим примером кручения является нагружение бруса двумя равными друг другу моментами  $M$ , которые приложены по торцам (рис. 64).

Вычислим величины  $M_k$  для произвольно выбранного сечения бруса I—I, пользуясь методом сечений.

Плоскостью  $I-I$ , перпендикулярной оси бруса, рассекаем брус на две части  $A$  и  $B$ . Взаимодействие этих частей друг на друга сведется к крутящему моменту  $M_k$ .

Правило знаков. Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали  $v_A$  или  $v_B$  и видит момент  $M_k$  направленным против хода часовой

$$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_A + \mathfrak{M}_C + \mathfrak{M}_D$$

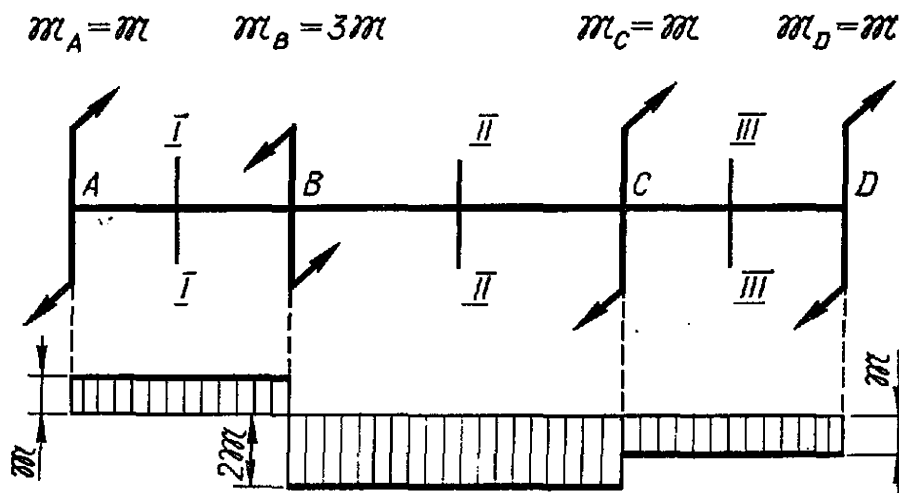


Рис. 65

стрелки, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается знак минус.

По условию равновесия отсеченной части бруса крутящий момент  $M_k$  в сечении равен алгебраической сумме моментов относительно оси бруса всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части: левой или правой — безразлично.

На рис. 65 показан пример нагружения бруса четырьмя взаимно уравновешенными парами сил и приведена эпюра крутящих моментов.

Во всех сечениях каждого из участков  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  крутящий момент остается постоянным и меняется скачкообразно лишь при переходе через границы участков — в местах приложения закручивающих пар сил  $\mathfrak{M}_B$  и  $\mathfrak{M}_C$  — на величину этих моментов. В сечении непосредственно слева от  $B$   $M_k = +\mathfrak{M}$ , в сечении же справа  $M_k = -2\mathfrak{M}$ . Такое очертание эпюры  $M_k$  есть следствие того, что закручивающая пара  $\mathfrak{M}_B$  при расчете принимается приложенной в одном сечении  $B$ . В действительности передача момента  $\mathfrak{M}_B$  на брус происходит на некоторой малой

длине. Поэтому на самом деле  $M_k$  на протяжении этой длины постепенно изменяется от величины плюс  $M$  до минус  $2M$ , переходя через нуль. Скачок на эпюре  $M_k$  в сечении  $C$  вызван этим же обстоятельством.

Наибольшее по абсолютной величине значение крутящего момента в этом примере равно  $2M$ .

## 2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассмотрим вначале простейшую задачу — кручение тонкостенной цилиндрической трубки. Трубка считается

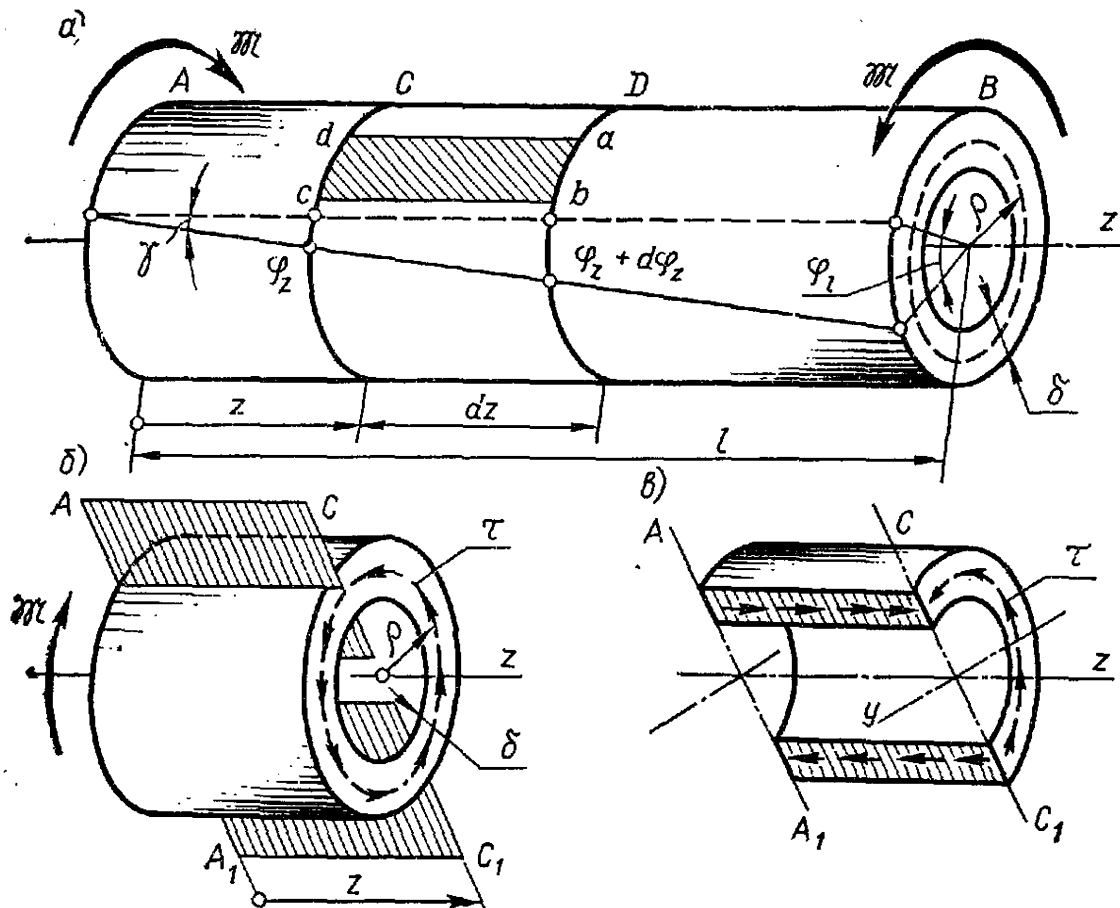


Рис. 66

тонкостенной, если толщина ее стенки  $\delta$  мала по сравнению с радиусом средней поверхности  $\rho$  (рис. 66, а).

При закручивании моментами  $M$  трубка сохраняет свою цилиндрическую форму, поперечные линии остаются в плоскости поперечных сечений, которые поворачиваются друг относительно друга. Угол  $\varphi_l$  называется углом закручивания на длине  $l$ .

Продольные линии обращаются в винтовые линии; при малом закручивании можно считать, что они наклоня-





площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные линии пересечения площадок, равны между собой и в обеих площадках направлены либо к линии их пересечения, либо от нее. Это положение является общим законом механики деформируемого тела.

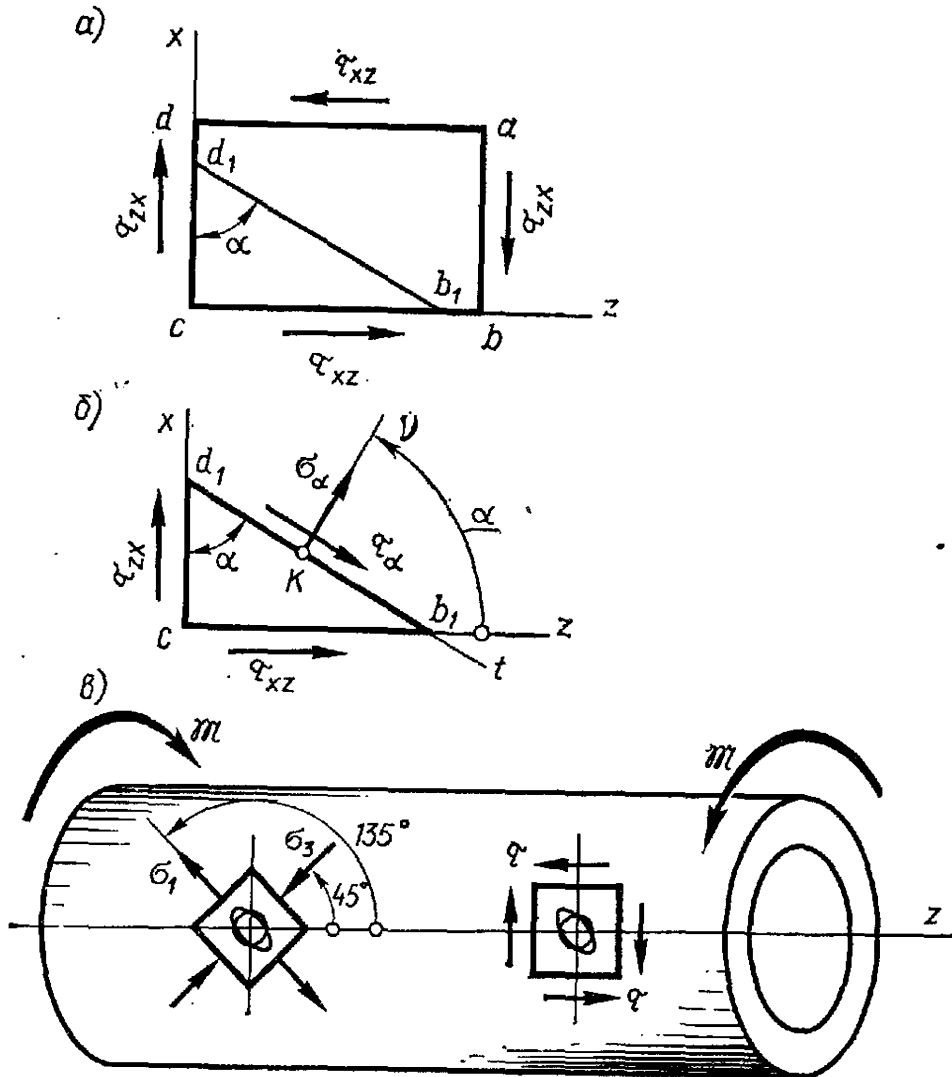


Рис. 68

В площадках, перпендикулярных радиусу трубки, напряжения равны нулю; так как трубка по поверхности не нагружена, толщина стенки ее мала и напряженное состояние однородно.

Итак, при кручении тонкостенной трубки, в поперечных и продольных ее сечениях возникают равные между собой касательные напряжения.

Напряженное состояние, при котором в одной из трех взаимно перпендикулярных площадок, проходящих через точку, напряжения отсутствуют, а в двух других возни-

кают только парные касательные напряжения, называется чистым сдвигом. Строгое определение этого напряженного состояния дается при рассмотрении напряжений в семействе секущих площадок  $d_1b_1$ , нормальных поверхности трубки (рис. 68, а).

Разрезая элементарный параллелепипед наклонным сечением  $d_1b_1$ , выделяем из него элементарную трехгранную призму  $cd_1b_1$  (рис. 68, б).

Наклон площадки  $d_1b_1$  к осям координат определяется углом  $\alpha$ , который образует внешняя нормаль  $\nu$  к этой площадке с осью  $z$ . Угол  $\alpha$ , отсчитанный против хода часовой стрелки, считаем положительным.

По граням призмы  $cb_1$  и  $cd_1$  возникают известные касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zx}$  (2) соответственно, а по наклонной грани  $d_1b_1$  — искомые напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ . Будем считать, что положительное нормальное напряжение  $\sigma_\alpha$  направлено в сторону внешней нормали (растягивающее). Касательное напряжение  $\tau_\alpha$  положительное, если его направление совпадает с направлением внешней нормали  $\nu$  при ее повороте по ходу часовой стрелки до совмещения с вектором  $\tau_\alpha$ .

Проектируем все силы, действующие на призму (рис. 68, б), на оси  $\nu$  и  $t$ . Условия равновесия дают:

$$\sigma_\alpha dF + (\tau_{zx} dF \cos \alpha) \sin \alpha + (\tau_{xz} dF \sin \alpha) \cos \alpha = 0;$$

$$\tau_\alpha dF - (\tau_{zx} dF \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xz} dF \sin \alpha) \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sigma_\alpha = -\tau_{zx} \sin 2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = +\tau_{zx} \cos 2\alpha. \quad (4)$$

Если неограниченно уменьшать размеры призмы, то в пределе точка  $K$  совмещается с точкой  $C$  и, следовательно, формулы (4) позволяют вычислить напряжения при чистом сдвиге в произвольной точке трубки для любой площадки, нормальной к ее поверхности.

При  $0 < \alpha < 90^\circ$  нормальные напряжения  $\sigma_\alpha$  являются напряжениями сжатия.

При  $\alpha = 45^\circ$  и  $\alpha = 135^\circ$  касательные напряжения  $\tau_\alpha = 0$ . Такие площадки (в которых касательные напряжения равны нулю) называют главными.

Как будет показано в дальнейшем, в общем случае через любую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярных главных площадки. В нашем частном

случае третья главная площадка перпендикулярна радиусу трубки.

Нормальные напряжения, возникающие в главных площадках, называют главными напряжениями. В порядке возрастания эти напряжения обозначают через  $\sigma_3$ ;  $\sigma_2$  и  $\sigma_1$ . В рассматриваемом случае  $\sigma_1 = +\tau$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau$  (рис. 68, в).

Напряженное состояние, при котором одно из трех главных напряжений равно нулю, называют двухосным, или плоским напряженным состоянием.

Таким образом, чистый сдвиг представляет собой частный случай двухосного напряженного состояния, при котором отличные от нуля главные напряжения равны по величине и обратны по знаку.

В наличии растягивающих и сжимающих напряжений можно убедиться экспериментально, скручивая резиновую трубку, на поверхность которой краской нанесено множество мелких кружочков. При закручивании трубки кружки превращаются в эллипсы с главными осями, направленными под углом  $45^\circ$  к образующим. По направлению больших осей эллипса происходит удлинение, а вдоль малых осей — сжатие (рис. 68, в).

### 3. ЗАКОН ГУКА ПРИ СДВИГЕ

Аналогично испытанию на растяжение и сжатие проводятся испытания материала и в условиях чистого сдвига. В качестве образца используют тонкостенную трубку.

В процессе испытания записываются постепенно нарастающий момент  $M$  и соответствующий ему угол закручивания  $\varphi$ , на расчетной длине  $l$ .

На рис. 69, а приведена диаграмма кручения, графически представляющая зависимость  $M$  от  $\varphi$ , при кручении трубки из малоуглеродистой стали. Трубка разрушается по поперечному сечению без образования шейки. По диаграмме кручения, полученной из опыта, строится диаграмма сдвига (рис. 69, б). Она характеризует лишь механические свойства материала при сдвиге, так как ординаты и абсциссы точек ее не зависят от размеров образца. В начальной своей части диаграмма сдвига линейна, т. е. при напряжениях, не превосходящих некоторого значения  $\tau_{пл}$  (определенного для каждого материала), угол сдвига  $\gamma$

пропорционален величине соответствующего касательного напряжения  $\tau$ :

$$\tau = G\gamma. \quad (5)$$

Этот закон пропорциональности называют законом Гука при сдвиге. Коэффициент  $G$  называют модулем сдви-

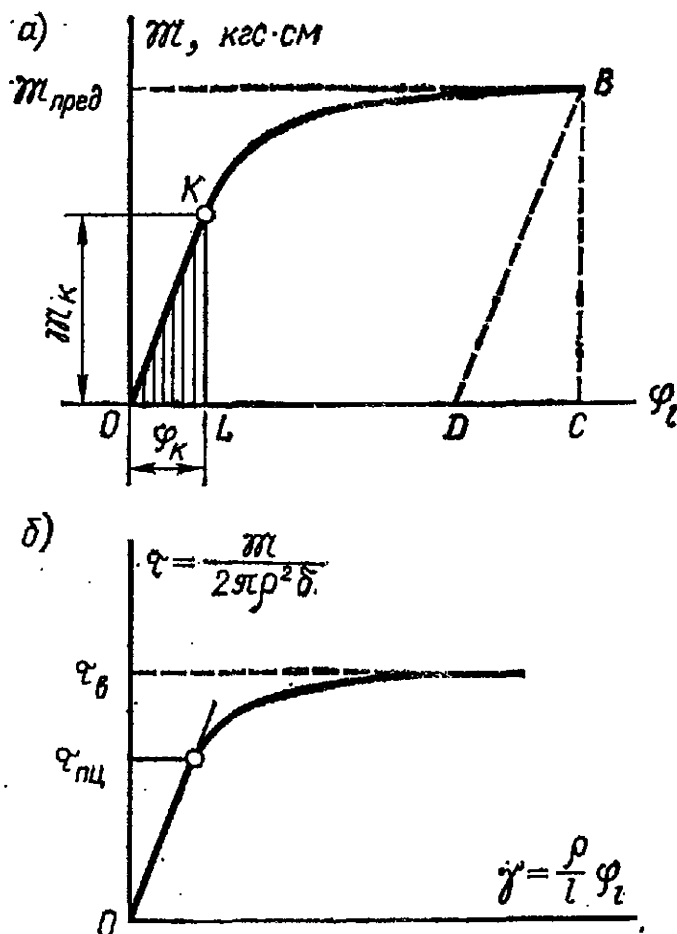


Рис. 69

га, или модулем упругости второго рода. Единица измерения модуля  $G$  такая же, как и модуля  $E$ , т. е. сила  $\cdot$  длина $^{-2}$ , например кгс/см $^2$  или Н/мм $^2$ . Значение модуля сдвига для металлов определяется довольно просто, если известна величина  $E$ . Ориентировочно

$$G \approx \frac{E}{2,6}$$

Вывод этого соотношения будет дан в дальнейшем.

Для пластичных материалов характеристики сдвига (предел пропорциональности при сдвиге, предел упругости, предел текучести) связаны с характеристиками растяжения. Теория пластичности (в пределах малых упруго-пластических деформаций) дает возможность построить

теоретически диаграмму сдвига по диаграмме растяжения, а также связать характеристики сдвига с механическими характеристиками растяжения.

Изучим диаграмму кручения. Площадь  $OBCO$  представляет в масштабе полную работу закручивающих моментов  $\mathcal{M}$  в процессе деформирования образца длиной  $l$ . Часть ее затрачивается на образование пластических деформаций. Она преобразуется, в конечном счете, в тепловую энергию.

Площадь треугольника  $BСD$  пропорциональна упругой потенциальной энергии, накапливаемой образцом при сдвиге и освобождающейся при разрушении.

В пределах упругости вся работа, совершаемая нагрузкой, практически равна упругой потенциальной энергии  $U$ , накапливаемой деформируемым образцом. В этом случае для трубки, нагруженной моментом  $\mathcal{M}_K$ , потенциальная энергия равна, в масштабе диаграммы, площади треугольника  $OKL$ , т. е.

$$U_k = \frac{1}{2} \mathcal{M}_K \varphi_K. \quad (6)$$

#### 4. КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО СПЛОШНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Изучим деформации и напряжения в бруске (рис. 70) в упругой стадии его работы, когда сохраняется линей-

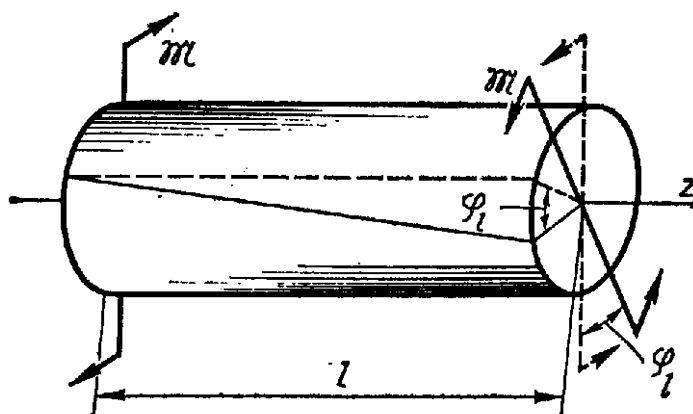


Рис. 70

ная связь как между напряжениями и деформациями, так и между закручивающими моментами  $\mathcal{M}$  и углом закручивания  $\varphi$ .

При этом будем опираться на следующие гипотезы.

Гипотеза сохранения плоских сечений: поперечные сечения круглого бруса плоские до деформации остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации,

они лишь поворачиваются на некоторые углы вокруг этой оси.

Гипотеза неискривляемости радиусов при повороте сечения: радиусы поперечных сечений остаются прямыми и сохраняют свою длину.

Эти гипотезы могут быть подкреплены следующими наглядными опытами.

*Опыт первый.* Краской на поверхность бруса из резины наносится сетка из продольных и поперечных линий, образующих квадратные клетки.

При закручивании бруса квадратные клетки ее обращаются в ромбические, в точности так же, как это было при закручивании тонкостенной трубки. Продольные линии (образующие цилиндры) наклоняются, а поперечные линии остаются в плоскости соответствующего сечения.

*Опыт второй.* В этом же брусике просверливается точно по диаметру маленькое сквозное отверстие. При закручивании бруса ось этого цилиндрического отверстия по-прежнему располагается по диаметру, свет просматривается.

Таким образом, каждое поперечное сечение бруса при закручивании поворачивается в своей плоскости на некоторый угол как жесткое целое. Естественно, что этот угол поворота для различных сечений будет различным.

Сформулированные гипотезы позволяют высказать предположение, что сплошной брус с круглым поперечным сечением можно при кручении рассматривать как бы состоящим из бесконечного числа отдельных концентрических тонкостенных трубок. При этом угол закручивания всех трубок одинаков.

Это предположение позволяет объединять брус круглого сплошного сечения и брус круглого кольцевого сечения в один класс, а следовательно, и рассчитывать их на прочность и жесткость по одним и тем же формулам.

Теория, построенная на базе высказанных гипотез, хорошо подтверждается экспериментами, подтверждается и точным решением этой задачи методами теории упругости.

Чтобы определить касательные напряжения, которые возникают в поперечных сечениях бруса в пределах упругости, выделим из бруса двумя поперечными сечениями элемент длиной  $dz$ , а из последнего, в свою очередь,























Соответственно для мембраны

$$\alpha_{\max}; V; K.$$

Здесь  $\alpha_{\max}$  — наибольший угол наклона пленки;  $V$  — объем, ограниченный пленкой и являющийся аналогом момента, и, наконец,  $K$  — аналог угла  $\varphi$ , величина нам

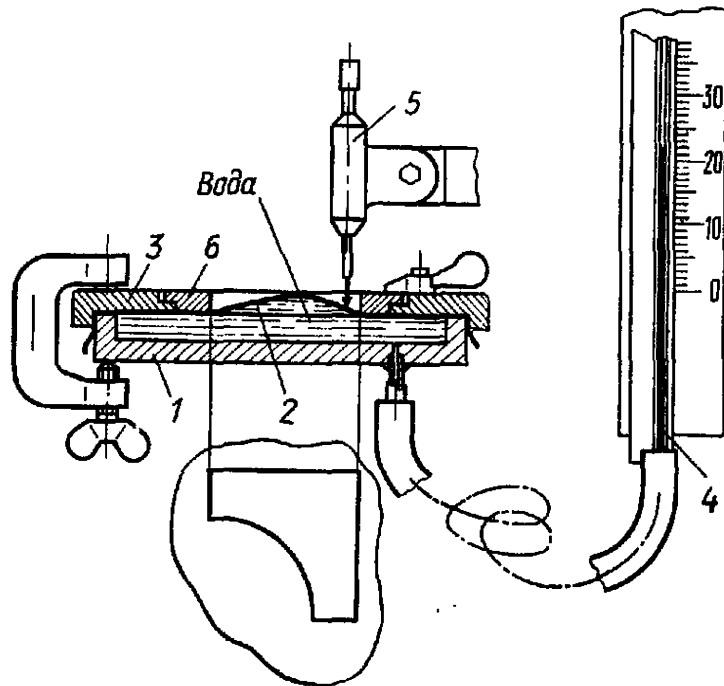


Рис. 80

неизвестная, но линейно связанная с  $V$ , как  $\varphi$  связано с  $M_k$ .

Теперь мы можем написать

$$\frac{\tau_{\max}}{M_k} = \frac{\alpha_{\max}}{V}.$$

Откуда

$$W_k = \frac{V}{\alpha_{\max}}.$$

Нам остается только замерить эти две величины. Частное от их деления имеет размерность длины в третьей степени и представляет собой величину момента сопротивления для сечения, имеющего размеры того контура, на который натянута пленка. Если линейные размеры сечения пропорционально увеличить в  $n$  раз, то величину  $W_k$  следует увеличить в  $n^3$  раз.

Теперь посмотрим, как эти замеры можно произвести в эксперименте. Что же касается параметра жесткости  $J_k$ , то его мы определим позже.

На рис. 80 показана схема моделирующей установки. На корпус 1 натянута мембрана 2, которая прижимается крышкой 3. Давление под мембраной создается столбом жидкости, содержащейся в трубке 4. Поднимая трубку, мы создаем некоторое фиксированное давление, и мембрана прогибается. Коробка установлена на салазках, которые передвигаются при помощи продольного и поперечного винта так, что любая точка мембраны может быть подведена под микрометр 5. Это позволяет замерить прогибы мембраны, а по ним найти величину угла наклона мембраны в любой точке. В итоге таких замеров определяется угол  $\alpha_{\max}$ . Если вытеснить жидкость из-под мембраны, вставив в отверстие заранее приготовленную фасонную пробку, легко по высоте столба в трубке найти и объем  $V$ , заключенный под мембраной. Таким образом, экспериментально определяются величины  $\alpha_{\max}$  и  $V$ , а по ним и  $W_k$  для сечения, имеющего масштаб отверстия, в пределах которого изгибается пленка.

Теперь нам надо найти величину  $J_k$  — геометрический параметр, входящий в выражение жесткости.

Между  $\varphi$  и  $M_k$  существует то же самое соотношение, что и между  $K$  и  $V$ . Таким образом,

$$\frac{\varphi}{M_k} = \frac{K}{V}$$

или же

$$\frac{l}{GJ_k} = \frac{K}{V}.$$

Коэффициент  $K$  нам неизвестен. Мы только знаем, что он определяется степенью предварительного натяжения мембраны и давлением  $p$ . Теперь мы поступим следующим образом. На той же мембране при том же давлении произведем испытание на круглой мембране, заменив шайбу 6 (рис. 80) на новую, с круглым отверстием. Для круга получим

$$\frac{l}{GJ_p} = \frac{K}{V_0}.$$

Исключая из двух последних выражений величину  $K$ , найдем

$$J_k = J_p \frac{V}{V_0}.$$

Объем  $V$  нами уже найден. Остается тем же способом определить объем  $V_0$  под круговой мембраной. Что же касается полярного момента инерции, то он нам известен

$$J_p = \frac{\pi}{32} D^4,$$

где  $D$  — диаметр круга. Величина этого диаметра для определения  $J_k$  значения не имеет. Можно показать, что объем  $V_0$ , как и  $J_p$ , меняется пропорционально четвертой степени диаметра. Поэтому масштаб круговой мембраны не сказывается на величине  $J_k$ , но значение  $J_k$  зависит от масштаба рассматриваемого профиля. Если размер сечения пропорционально увеличить в  $n$  раз, то  $J_k$  должно быть увеличено в  $n^4$  раз.

Мембранная аналогия была обоснована и разработана в начале нашего века Прандтлем — известным ученым-механиком, внесшим большой вклад в гидродинамику и теорию деформируемого твердого тела. Эта аналогия не является единственной. Известно еще несколько аналогий из области гидродинамики и электростатики, но они не столь наглядны, как мембранная, и на них останавливаться не будем.

Во времена Прандтля любая установленная и обоснованная аналогия могла рассматриваться как счастливая находка. Но со временем люди научились создавать искусственные аналогии. Не всегда наглядные, но всегда полезные. Для того чтобы установить аналогию с данной задачей, не обязательно искать в природе физический феномен, сводящийся к тому же дифференциальному уравнению. Можно набрать электросхему, определение потенциалов в узлах которой сводилось бы к решению заданного дифференциального уравнения. Тогда эта электросхема станет аналогом данной задачи. Универсальная установка, имеющая достаточно большое число ячеек и узлов, позволяющих набирать широкий класс уравнений, называется аналоговой машиной, а сам научный метод искусственного создания аналогий стал называться моделированием.

Моделирование в современной технике и механике играет очень большую роль. Сейчас невозможно представить себе создание мало-мальски сложной машины без предварительного проведения целой серии аналоговых испытаний.

#### 4. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Под тонкостенным понимают стержень, у которого не только длина много больше размеров поперечного сечения, но и в самом поперечном сечении один из размеров

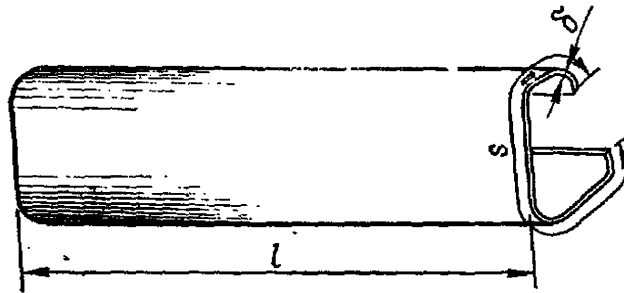


Рис. 81

(длина дуги) много больше толщины (рис. 81). Обладая большой жесткостью при изгибе и относительно малым весом, тонкостенные стержни получили широкое распро-

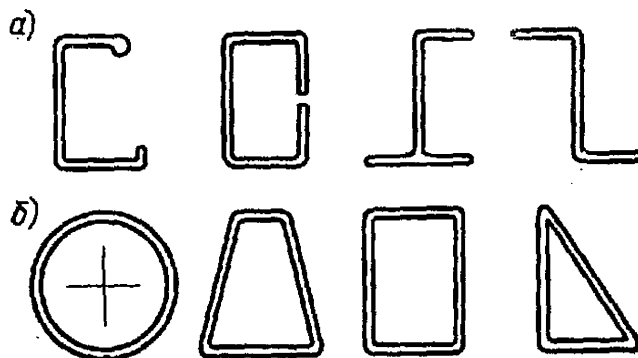


Рис. 82

странение как конструктивные элементы во многих отраслях машиностроения, особенно в авиации и в ракетной технике.

Тонкостенные стержни мы разбиваем на две группы: стержни с открытым профилем (рис. 82, а) и с замкнутым профилем (рис. 83, б). Между этими двумя группами в законах распределения касательных напряжений при кручении существует кардинальное различие. Чтобы убедиться в этом, обратимся к мембранной аналогии.

Пленка, натянутая на открытый профиль (рис. 83, а), изгибается так, что угол наклона на средней линии контура обращается в нуль и имеет наибольшее значение у краев. Соответственно углам наклона напряжения по толщине профиля меняются по закону, близкому к линейному, со сменой знака на средней линии профиля. Если

открытый профиль имеет переменную толщину, то наибольшие напряжения будут иметь место в области наибольшей толщины. Пленка там будет прогибаться сильнее и соответственно большими будут и углы ее наклона.

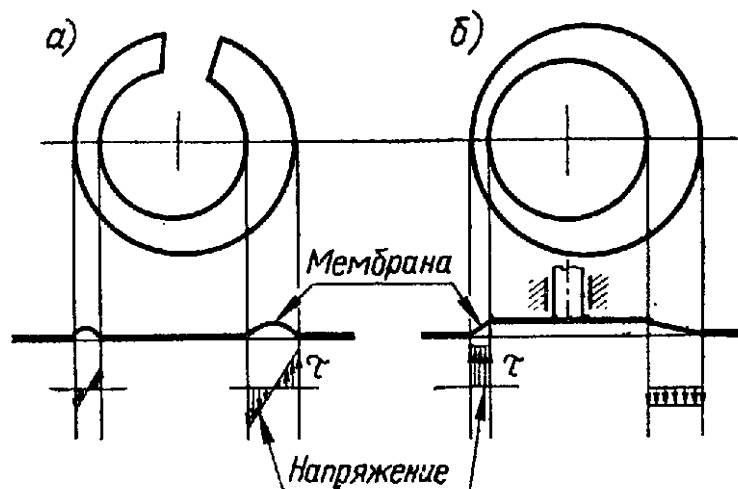


Рис. 83

Теперь посмотрим, что дает нам мембранная аналогия для замкнутого профиля. Здесь центральная часть пластины, на которой закреплена пленка, висит на самой пленке и под действием давления будет перемещаться вместе с пленкой. Мембранная аналогия показывает, что такое перемещение может быть только поступательным, как это и показано на рис. 83, б.

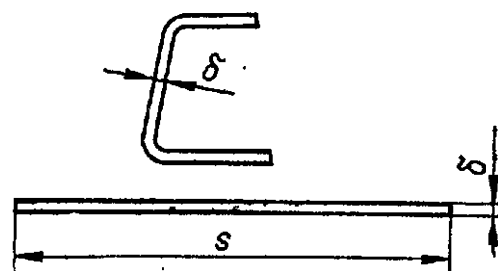


Рис. 84

Как видим, здесь, в отличие от открытого профиля, пленка по толщине профиля сохраняет угол наклона примерно постоянным. Следовательно, напряжения по толщине остаются также постоянными. Вдоль же контура образуется замкнутый поток касательных напряжений. Причем, если замкнутый профиль имеет переменную толщину, то угол наклона пленки будет наибольшим там, где будет наименьшей толщина профиля. Там возникают и максимальные касательные напряжения.

Теперь рассмотрим открытый профиль с постоянной толщиной (рис. 84). Представим себе, что на отверстие, имеющее форму этого профиля, натянута мембрана. Если профиль распрямить в прямоугольник, то форма пленки практически не изменится. Не изменятся, следовательно,

и напряжения. Значит, для открытого профиля мы можем определять напряжения и углы закручивания стержня, как для прямоугольника, полученного в результате выпрямления дуги контура. Для прямоугольника мы имеем

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{ab^2a}; \quad \varphi = \frac{Ml}{G\beta b^3a},$$

где коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  при большом отношении сторон равны 0,333, а меньшую сторону  $b$  и большую  $a$  следует

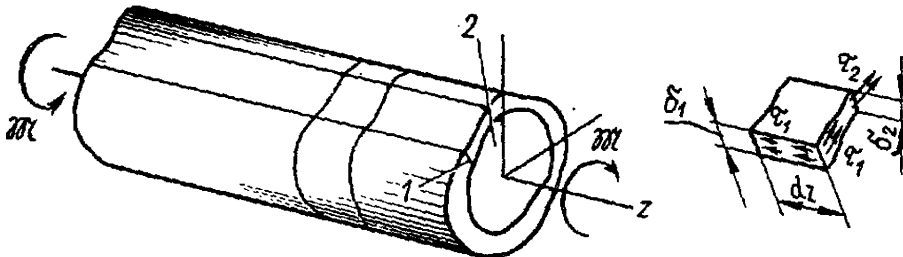


Рис. 85

соответственно заменить на  $\delta$  и  $s$ . Таким образом, получаем

$$\tau_{\max} = \frac{3M_k}{\delta^2s}, \quad \varphi = \frac{3Ml}{G\delta^3s}.$$

В случае, если открытый профиль в прямоугольник не может быть развернут, применяется искусственное деление профиля на несколько прямоугольников, а распределение моментов между ними производится из условия равенства углов закручивания частей стержня. Этот вопрос, однако, мы здесь рассматривать не будем и перейдем к замкнутым профилям.

Положим, имеется некоторый стержень с замкнутым тонкостенным сечением переменной толщины (рис. 85). Мы уже знаем, что для замкнутого профиля напряжения распределяются по толщине равномерно. Двумя продольными и двумя поперечными разрезами выделяем из стержня призматический элемент длиной  $dz$ . Продольные сечения 1 и 2 взяты произвольно.

Напряжения в поперечном сечении, соответствующие нормалям 1 и 2, обозначим соответственно через  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Теми же индексами снабдим и толщину  $\delta$ . В продольных сечениях возникают касательные напряжения, парные  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Продольные силы, соответствующие этим напряжениям, по условию равновесия должны быть равны друг другу, и мы получаем:

$$\tau_1 \delta_1 dz = \tau_2 \delta_2 dz.$$

Но так как продольные сечения 1 и 2 были взяты произвольно, мы можем заключить, что произведение  $\tau\delta$  есть величина, неизменная для всех точек контура

$$\tau\delta = \text{const.}$$

Этот вывод полностью согласуется с тем, что уже было подмечено нами, когда мы рассматривали мембранную аналогию. В тех местах, где толщина будет наименьшей, там наибольшими будут напряжения.

Теперь нам надо аналитически выразить то обстоятельство, что поток касательных напряжений в сечении дает момент, равный крутящему. Выделяем на контуре сечения элементарный отрезок длиной  $ds$  (рис. 86), настолько малый, чтобы в его пределах величины  $\tau$  и  $\delta$  можно было бы рассматривать как постоянные. Выбираем какой-то полюс  $O$  и пишем выражение момента элементарной силы  $\tau\delta ds$  относительно этого полюса. Для этого сила умножается на длину перпендикуляра  $OA$ , опущенного из точки  $O$  на линию действия силы

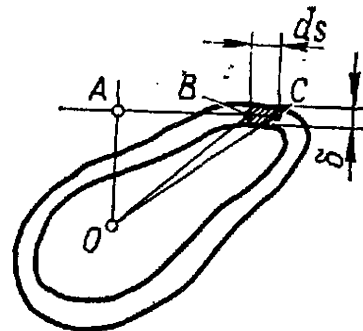


Рис. 86

$$dM_k = OA\tau\delta ds.$$

Выбор точки  $O$  не имеет значения. Из условия нагружения следует, что в сечении возникает только момент; поперечной силы нет. А из механики нам известно, что момент системы сил, равнодействующая которых равна нулю, не зависит от точки приведения.

Крутящий момент в сечении равен интегралу от последнего выражения, взятому по всей дуге контура

$$M_k = \int_s OA\tau\delta ds.$$

Ни  $\tau$ , ни  $\delta$  в отдельности вынести за знак интеграла нельзя, а вместе можно. Это произведение для всех точек контура остается неизменным. Следовательно,

$$M_k = \tau\delta \int_s OA \cdot ds.$$

Легко сообразить, что представляет собой произведение  $OA \cdot ds$ . Рассматривая треугольник  $OBC$ , можно заме-

туть, что  $ds$  представляет собой его основание, а  $OA$  — его высоту. Следовательно, под интегралом находится удвоенная площадь треугольника  $OBC$ . Если это выражение проинтегрировать по всему контуру, мы получим удвоенную площадь, ограниченную средней линией контура. Обозначим эту площадь через  $F^*$ . Звездочка у буквы предназначена для того, чтобы не было возможности спу-

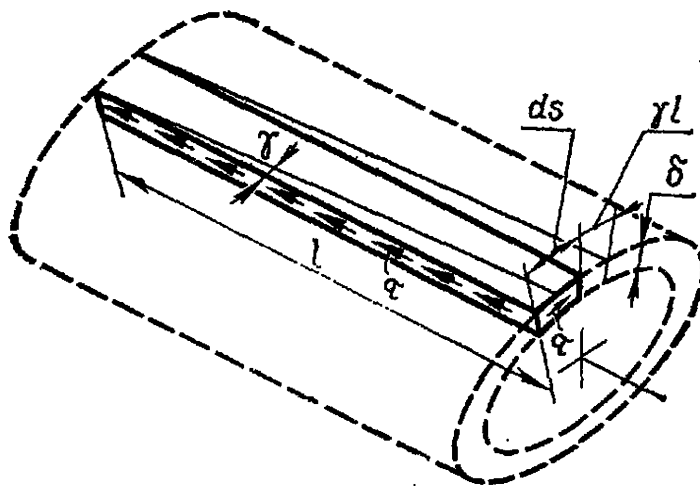


Рис. 87

тать эту площадь с площадью «живого» сечения, которую мы обозначаем буквой  $F$ .

Теперь определяем максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{2F^* \delta_{\min}}$$

Нам остается найти угол закручивания тонкостенного стержня с замкнутым профилем поперечного сечения. Наиболее удобным способом его определения является следующий: определяем энергию упругих деформаций в стержне, выражая ее через найденные напряжения, а затем эту энергию приравниваем работе внешнего момента на искомом угловом перемещении. Из этого баланса энергии и работы и определяется угол закручивания стержня.

Двумя продольными сечениями выделяем из стержня полоску длиной  $l$  и шириной  $ds$ . В продольных сечениях обнаруживаются парные касательные напряжения  $\tau$  (рис. 87). Если левый торец полоски принять условно неподвижным, то при деформации полоски работу совершит только сила  $\tau ds$ . Эта работа переходит в потен-

циальную энергию деформаций. Таким образом, для полочки получим

$$\frac{1}{2} \tau \delta ds \gamma l.$$

Коэффициент  $\frac{1}{2}$  перед произведением силы и перемещения поставлен в связи с тем, что сила на пути  $\gamma l$  не остается неизменной, а возрастает пропорционально перемещению.

Воспользуемся законом Гука. Тогда получим

$$\frac{1}{2} l \frac{\tau^2 \delta^2}{G} \frac{ds}{\delta}.$$

Если это выражение проинтегрировать по дуге контура, то мы получим потенциальную энергию деформации закрученного стержня, которую следует приравнять работе внешнего момента на угловом перемещении  $\varphi$ . Таким образом,

$$\frac{1}{2} l \frac{\tau^2 \delta^2}{G} \int_s \frac{ds}{\delta} = \frac{1}{2} M \varphi.$$

Интеграл, стоящий в левой части этого уравнения, в общем виде вычислен быть не может. Для этого необходимо знать закон изменения толщины вдоль дуги контура. Произведение  $\tau \delta$  заменяем согласно предыдущему на  $M/2F^*$ . В итоге получаем

$$\varphi = \frac{M l}{4GF^{*2}} \int_s \frac{ds}{\delta}.$$

Если толщина профиля постоянна, то выведенное выражение упрощается и принимает вид

$$\varphi = \frac{M l s}{4GF^{*2} \delta}.$$

После того как необходимые выражения для  $\tau_{\max}$  и  $\varphi$  получены, нам остается провести сопоставление открытых и замкнутых профилей по показателям прочности и жесткости на кручение. Такое сопоставление очень показательно. Его мы проведем на примере кругового тонкостенного профиля, то полученные выводы справедливы вообще для любых форм открытых и замкнутых профилей.

Итак, пусть стержень диаметром  $D$  свернут в круг из плоского листа (рис. 88). В первом случае лист по краям не связан, т. е. профиль — открытый. Во втором случае края соединены рядом заклепок, и профиль следует

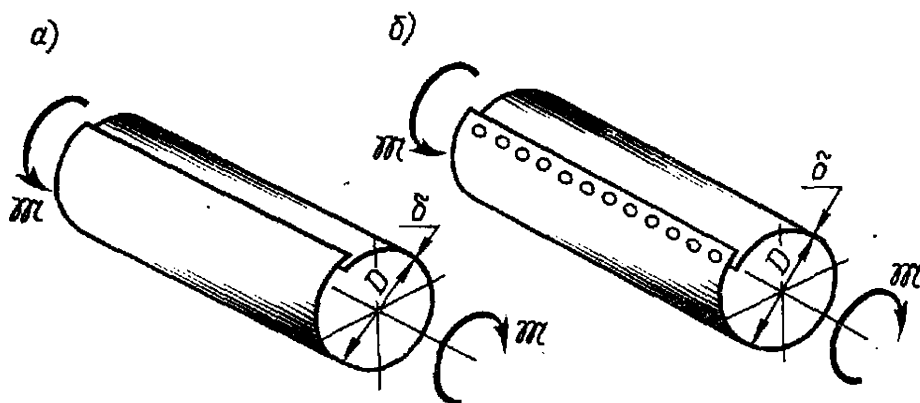


Рис. 88

рассматривать как замкнутый. Сравним возникающие напряжения.

В первом случае и во втором соответственно получаем

$$\tau_{\max}^I = \frac{3M}{\delta^2 s} = \frac{3M}{\delta^2 \pi D}, \quad \tau_{\max}^{II} = \frac{M}{2F^* \delta} = \frac{2M}{\pi D^2 \delta}.$$

С тем чтобы выяснить, какое напряжение больше и во сколько раз, разделим  $\tau_{\max}^I$  на  $\tau_{\max}^{II}$ . В итоге

$$\frac{\tau_{\max}^I}{\tau_{\max}^{II}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{D}{\delta}.$$

Так как размер  $D$  по определению тонкостенности существенно больше толщины  $\delta$ , то при одном и том же крутящем моменте напряжения в открытом профиле оказываются во много раз больше, чем в замкнутом. Такой вывод не является неожиданным. Дело в том, что касательные напряжения в открытом профиле создают момент на плече, имеющем порядок толщины профиля, а в замкнутом профиле момент внутренних сил имеет плечо порядка поперечных размеров сечения. При равном моменте в соответствующем отношении оказываются и напряжения.

Теперь произведем оценку углов закручивания. Для первого и второго случаев получаем

$$\varphi^I = \frac{3Ml}{G\delta^3 s} = \frac{3Ml}{G\delta^3 \pi D}, \quad \varphi^{II} = \frac{Mls}{4GF^* \delta} = \frac{4Ml}{G\pi D^3 \delta}.$$

Теперь рассмотрим отношение  $\varphi^I$  к  $\varphi^{II}$ . Оно будет следующим:

$$\frac{\varphi^I}{\varphi^{II}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{D^2}{\delta^2}.$$

Таким образом, если касательные напряжения для открытого и замкнутого профилей относились как  $D/\delta$ , то углы закручивания относятся уже как  $D^2/\delta^2$ . Отношение оказалось еще большим. Значит, жесткость открытого профиля на кручение неизмеримо меньше жесткости замкнутого профиля. Из всего сказанного следует очевидный вывод. Там, где от элемента конструкции, работающего на кручение, требуется прочность и жесткость, применение открытых профилей нецелесообразно. Но это только при кручении! На изгиб, как вы узнаете в дальнейшем, открытые профили работают не хуже замкнутых.

## ЛЕКЦИИ 15—16

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСА

#### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Настоящая лекция посвящена определению моментов инерции поперечных сечений брусков (стержней). Моменты инерции являются геометрическими характеристиками поперечных сечений, необходимыми для решения задач изгиба и кручения стержней.

При расчетах стержней на растяжение, сжатие использовалась одна из геометрических характеристик поперечного сечения — его площадь  $F$ . Она входит в основные формулы для напряжений и деформаций растянутого стержня. Удлинение стержня  $\Delta l$  не зависит от формы поперечного сечения.

Оказывается, что при изгибе прочность и жесткость бруса определяются не площадью поперечного сечения, а существенно зависят от формы его поперечного сечения. При одной и той же площади  $F$  бруска, имеющие различную форму поперечного сечения, изгибаются неодинаково.

В теории изгиба будет доказано, что характеристиками, от величины которых зависят прочность и жест-

кость бруса при изгибе и в которых учитывается форма поперечного сечения, являются осевые моменты инерции — интегралы по площади следующего вида:

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (1)$$

Их называют осевыми моментами инерции. В этих интегралах величина каждой элементарной пло-

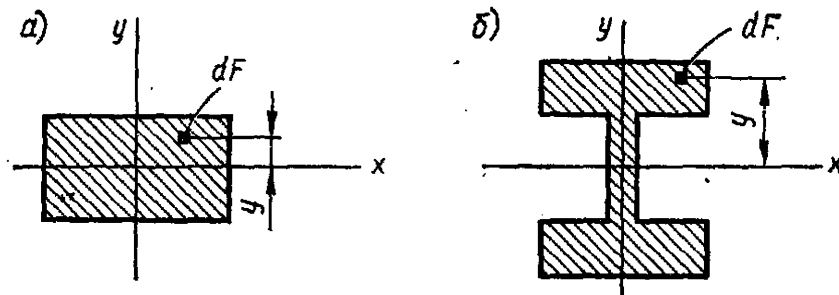


Рис. 89

щади  $dF$  умножается на квадрат расстояния до соответствующей оси, например на  $y^2$  (рис. 89). Если материал бруса располагается вблизи оси  $x$  (рис. 89, а), величина каждого элементарного осевого момента инерции  $dJ_x = y^2 dF$  мала и осевой момент инерции  $J_x$  будет сравнительно мал. Если форма сечения такова, что площадки  $dF$  больше удалены от оси  $x$  (рис. 89, б), то большими будут величины  $y^2 dF$  и соответственно величина момента инерции  $J_x$ . Таким образом,  $J_x$  характеризует как бы одновременно и количество материала стержня, пропорциональное сумме элементарных площадей, и распределение материала относительно оси  $x$ . Ранее при изучении кручения стержней круглого и кольцевого сечений вы видели, что их жесткость пропорциональна величине интегралов по площади такого вида  $J_p = \int_F \rho^2 dF$  — так называемых полярных моментов инерции.

Для решения ряда задач потребуется также вычислить интегралы по площади следующего вида:  $J_{xy} = \int_F xy dF$ .

Они называются центробежными моментами инерции.

Размерность моментов инерции: длина в четвертой степени.

Осевые моменты инерции (1) формально напоминают известные вам статические моменты площадей относительно осей  $x$  и  $y$  — интегралы вида

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF. \quad (2)$$

Обратим внимание и на существенную разницу между, например, величинами  $J_x$  и  $S_x$ . Величина  $S_x$  может быть положительной [например, когда ось  $x$  расположена ниже сечения и все ординаты  $y$  больше нуля (рис. 90, а), и отрицательной — в случае, когда все ординаты  $y$  отрицательны (рис. 90, б)]. Существует и такое промежуточное положение оси  $x$ , когда  $S_x = 0$ . Из курса теоретической механики вам известно, что  $S_x = 0$ , когда ось  $x$  проходит через центр тяжести сечения (рис. 90, в).

Моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_p$  — величины существенно положительные, поскольку в них координаты  $x$ ,  $y$ ,  $\rho$  входят под знак интегралов в квадрате, а величина элементарной площадки  $dF$  считается по определению положительной.

Моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_p$  связаны простой зависимостью

$$J_p = J_x + J_y, \quad (3)$$

которая следует из равенства  $\rho^2 = x^2 + y^2$  (рис. 91). Из этой зависимости вытекает и интересное свойство инвариантности (постоянства) суммы  $J_x + J_y$  при повороте осей. Поскольку при повороте осей  $x_1 y_1$  (см. рис. 91) величина  $\rho$  для каждой площадки  $dF$  не изменяется, то

$$J_x + J_y = J_{x_1} + J_{y_1}. \quad (4)$$

Величина  $J_{xy}$  может быть положительной и отрицательной в зависимости от расположения осей  $xu$ . Простым и практически важным примером, когда  $J_{xy} = 0$ , является случай симметричного сечения. Пусть, например, ось  $y$  совпадает с осью симметрии сечения (рис. 92). Тогда для

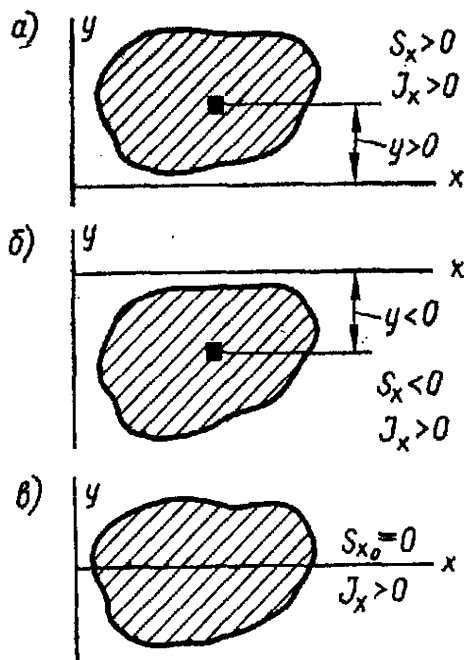


Рис. 90

каждой площадке  $dF$  с положительным произведением  $xу$  найдется симметричная площадка  $dF$  с таким же по величине, но отрицательным произведением  $xу$ . В сумме центробежный момент инерции этих двух площадок и, значит,  $J_{xy}$  всего сечения будет равен нулю.

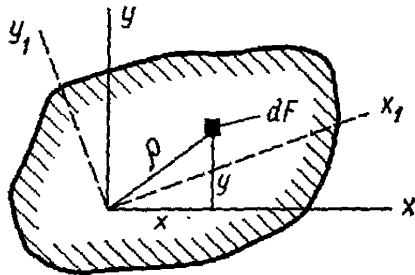


Рис. 91

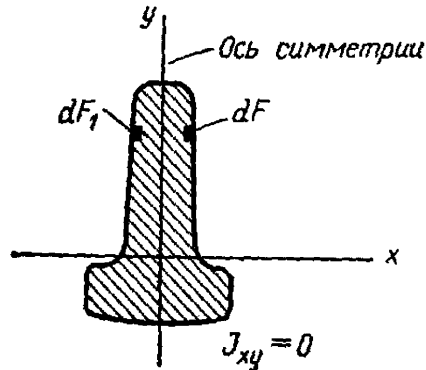


Рис. 92

Перейдем к вопросам вычисления моментов инерции. В принципе решение этой задачи сводится к вычислению интегралов по площади от достаточно простых подынтегральных функций  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $xу$ . Однако стержни реальных сооружений и механизмов часто имеют поперечные сечения сложной формы.

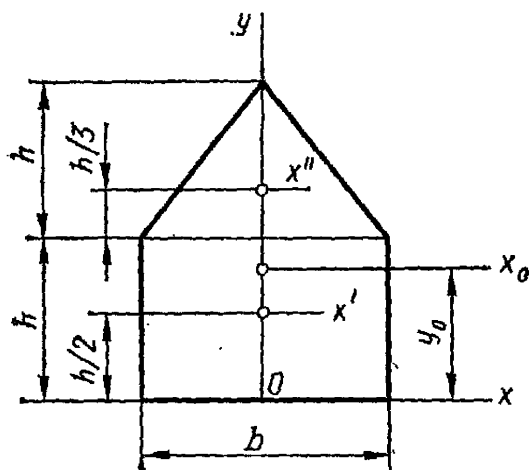


Рис. 93

Для быстрого и простого вычисления моментов инерции этих сечений мало знать, как в принципе вычисляются интегралы по площади. Необходимо более детальное изучение этого вопроса.

Известно, что интегралы обладают свойствами аддитивности. Попросту говоря, их можно вычислять независимо по отдельным частям площади и окончательный результат получать, суммируя частные результаты.

Например, так определяется величина площади  $F$  и статические моменты  $S_x$ ,  $S_y$  сложных фигур. Вспомним эту методику на примере определения центра тяжести сечения.

Найдем положение центра тяжести сечения (рис. 93, а) шириной  $b$  и высотой  $2h$ . Поскольку сечение имеет ось симметрии, центр тяжести находится на этой оси. Нужно

найти его положение по высоте сечения. Выбираем удобные для расчета оси  $x$ ,  $y$  и обозначаем искомую координату центра тяжести  $y_0$ .

Из курса теоретической механики вам известно, что центр тяжести фигуры, разбитой на несколько частей, определяется следующим образом:

$$y_0 = \frac{\sum S_{x,k}}{\sum F_k} = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}$$

Здесь в числителе записывается статический момент плоской фигуры относительно оси  $x$ , в знаменателе — площадь всей фигуры;  $F_k$  — площадь одной части фигуры;  $y_k$  — координата ее центра тяжести.

В данном примере разбиваем сечение на две части: прямоугольник и треугольник, площади и положения центров тяжести которых известны (см. рис. 93). Тогда

$$F = bh + \frac{1}{2}bh = \frac{3}{2}bh.$$

Статический момент

$$S_x = bh \frac{h}{2} + \frac{1}{2}bh \frac{4}{3}h = \frac{7}{6}bh^2.$$

Координата центра тяжести

$$y_0 = \frac{\frac{7}{6}bh^2}{\frac{3}{2}bh} = \frac{7}{9}h.$$

Как видно, при вычислении площади и статического момента мы использовали известные формулы площадей и статических моментов простых геометрических фигур. Аналогично для вычисления моментов инерции сложных сечений необходимо знать формулы моментов инерции простых фигур.

## 2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЫХ ФИГУР И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Рассмотрим прямоугольное сечение с основанием  $b$  и высотой  $h$  (рис. 94). Найдём его момент инерции относительно центральной оси  $x$ , параллельной основанию. По определению

$$J_x = \int_F y^2 dF = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Полученная формула часто используется в расчетах на изгиб. Она является одной из формул для моментов инерции простейших фигур, изображенных на рис. 94. Формула для осевого момента инерции треугольника относи-

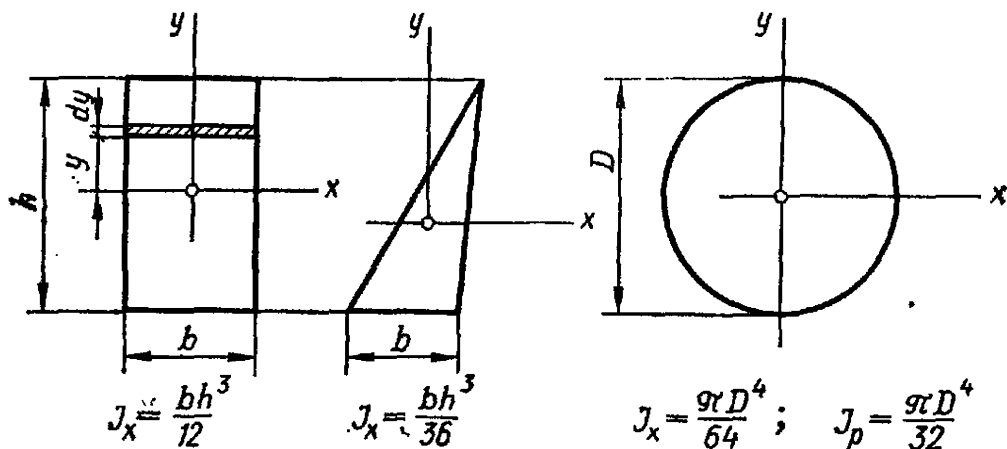


Рис. 94

тельно центральной оси, параллельной основанию,  $J_x = bh^3/36$  и формула осевого центрального момента инерции круга  $J_x = \pi D^4/64$  выводятся аналогично. Последняя величина

в два раза меньше полярного момента инерции круга  $J_p = \pi D^4/32$ . Это следует и из зависимости (3). При  $J_x = J_y$   $J_p = 2J_x$ .

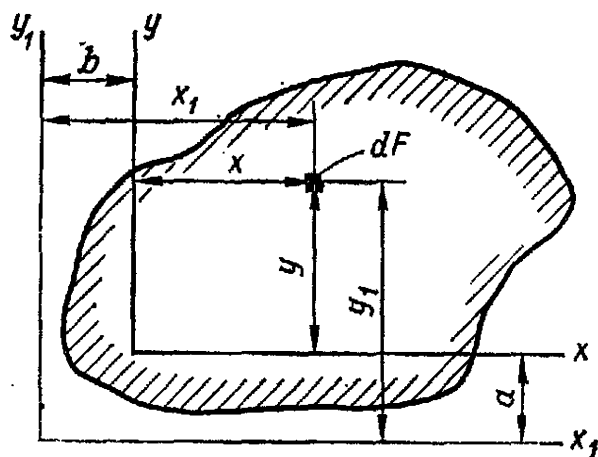


Рис. 95

Вернемся к задаче определения моментов инерции сложных сечений. Заметим, что ось, центральная для всего сечения, не является центральной осью для его отдельных частей. Таким образом, необходимо знать зависимости, существующие между моментами инерции относительно параллельных осей.

Допустим, что известны моменты инерции  $J_x, J_y, J_{xy}$  плоской фигуры (рис. 95) относительно произвольных нецентральных осей  $x, y$ . Требуется определить моменты инерции  $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1y_1}$  относительно новых осей  $x_1, y_1$ , параллельных осям  $x, y$ . Расстояния между осями равны

величинам  $a$  и  $b$  (см. рис. 95). Координаты  $x_1$ ,  $y_1$  и  $x$ ,  $y$  связаны следующими зависимостями:

$$x_1 = x + b, \quad y_1 = y + a.$$

Подставляя эти выражения в интегралы

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF,$$

производя соответствующие преобразования и используя ранее введенные обозначения, получим искомые зависимости. Например, для  $J_{x_1}$ :

$$J_{x_1} = \int_F (y + a)^2 dF = J_x + 2aS_x + a^2F.$$

Если первоначальные оси  $x$ ,  $y$  центральные, то  $S_x = 0$ ;  $S_y = 0$  и полученные выражения упрощаются.

Основные формулы перехода от центральных осей  $x$ ,  $y$  к нецентральных  $x_1$ ,  $y_1$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2F; & J_{y_1} &= J_y + b^2F; \\ J_{x_1 y_1} &= J_{xy} + abF. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим в качестве примера определение осевого центрального момента инерции пятиугольного сечения (см. рис. 93). Моменты инерции  $J_{x_0}$  сечения относительно центральной оси  $x_0$  представим в виде суммы моментов инерции относительно этой оси прямоугольника и треугольника. Для вычисления каждого из этих моментов инерции используем формулы параллельного переноса осей и формулы для моментов инерции прямоугольника и треугольника относительно осей  $x'$  и  $x''$ , которые являются центральными осями для этих фигур,

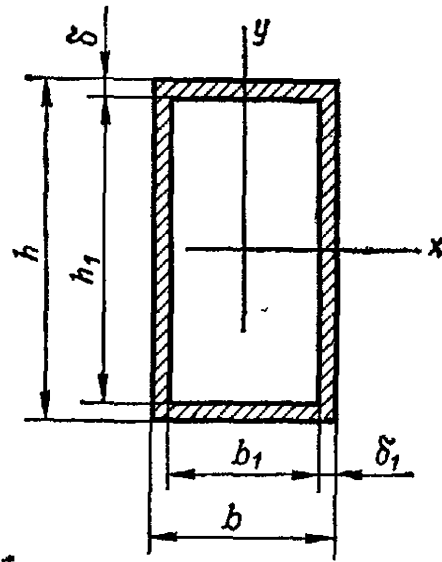


Рис. 96

$$J_x = J_x^{\square} + J_x^{\triangle},$$

$$J_x = \frac{1}{12} bh^3 + \left(\frac{5h}{18}\right)^2 bh + \frac{1}{36} bh^3 + \left(\frac{10h}{18}\right)^2 \frac{1}{2} bh = \frac{37}{108} bh^3.$$

При вычислении моментов инерции можно пользоваться и понятием отрицательной площади, т. е. вычис-

лять, например, момент инерции  $J_x$  сечения (рис. 96) как разность

$$J_x = \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{12} b_1 h_1^3.$$

Однако при расчете тонкостенных стержней, у которых толщина стенок  $\delta$  значительно меньше основных размеров  $b, h$ , такое определение моментов инерции приводит к разности близких чисел и потере точности вычислений. В этом случае используются другие упрощения, существенно связанные с тонкостенностью.

Рассмотрим, например, вычисление момента инерции прямоугольника малой высоты  $\delta$  (рис. 97, а) относительно оси  $x$ :

$$J_x = a^2 F + \frac{1}{12} b \delta^3 = a^2 F \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 \right].$$

При  $\frac{\delta}{a} < \frac{1}{5}$  второе слагаемое составляет  $\frac{1}{300}$  от первого, т. е. менее 0,3%. Таким образом,  $\frac{\delta}{a} < \frac{1}{5}$  можно приближенно считать  $J_x \approx a^2 F$ . Этот вывод справедлив и

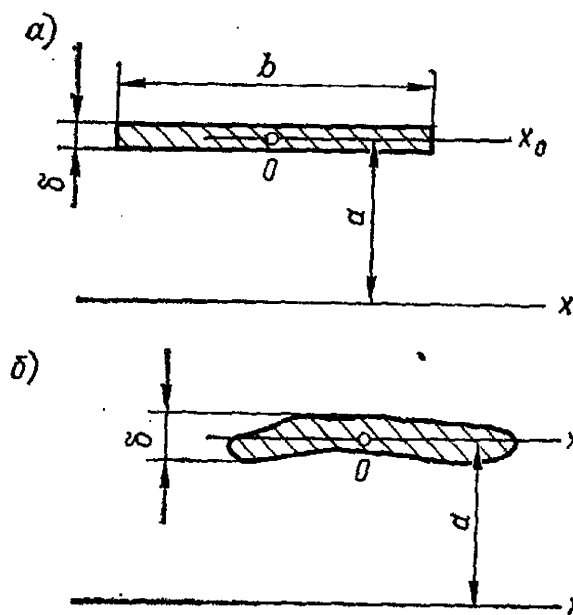


Рис. 97

для произвольной части сечения, размер  $\delta$  которой мал по сравнению с расстоянием  $a$  (рис. 97, б). И в этом случае при вычислении  $J_x$  можно площадь как бы сосредоточить в центре тяжести  $O$  и считать, что  $J_x = a^2 F$ .

Интерпретация отдельных частей сечения как сосредоточенных площадей часто используется, например, при расчетах на прочность и жесткость самолета, корпуса судна и т. д.

Рассмотрим еще пример применения формул (5) при вычислении центробежного момента инерции. Выведем формулу центробежного момента инерции  $J_{x_0 y_0}$  относительно центральных осей  $x_0, y_0$  прямоугольного треугольника со сторонами  $b$  и  $h$  (рис. 98, а). Непосредственным

интегрированием легко получить формулу для  $J_{xy}$  относительно осей, совпадающих с катетами:  $J_{xy} = b^3 h^2 / 24$ . По формуле перехода от нецентральных осей к центральным получаем

$$J_{x_0 y_0} = J_{xy} - a_1 b_1 F = - \frac{b^3 h^2}{72}.$$

Полученный в ответе знак минус означает, что центробежный момент инерции площадей, расположенных во

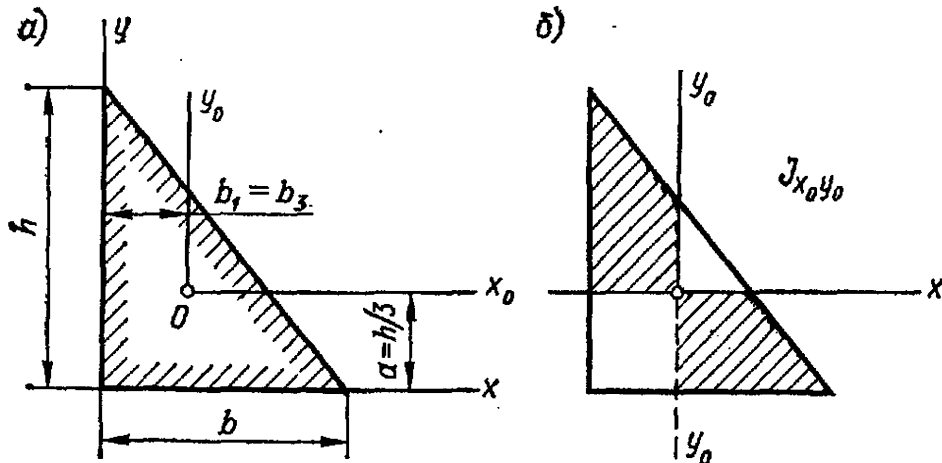


Рис. 98

втором и четвертом квадрантах (рис. 98, б), больше по абсолютной величине, чем момент инерции площадей, расположенных в первом и третьем квадрантах. Если направление какой-нибудь оси изменится (см. штриховую линию на рис. 98, б) или если оси  $x_0, y_0$  повернуть на  $90^\circ$ , то изменится и знак момента инерции. Отсюда, между прочим, следует, что поворотом осей на угол, меньший  $90^\circ$ , можно добиться обращения центробежного момента инерции  $J_{x_0 y_0}$  в нуль.

Определение таких центральных осей  $x_0 y_0$ , для которых  $J_{x_0 y_0} = 0$ , необходимо для решения задач изгиба стержней. В связи с поворотом осей возникает также вопрос: относительно каких центральных осей достигают максимума и минимума осевые моменты инерции  $J_{x_0}, J_{y_0}$ ? Поэтому необходимо изучение зависимостей между моментами инерции при повороте осей.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Допустим, что известны моменты инерции  $J_x, J_y, J_{xy}$  относительно некоторых осей  $x, y$ . Выразим через  $J_x,$

$J_y$ ,  $J_{xy}$  моменты инерции  $J_u$ ,  $J_v$ ,  $J_{uv}$  относительно осей  $u$ ,  $v$ , повернутых на угол  $\alpha$  (рис. 99). Запишем вначале выражения координат  $u$  и  $v$  через  $x$  и  $y$ .

Величина  $u$  равна сумме проекций координат  $x$  и  $y$  на ось  $u$ :

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

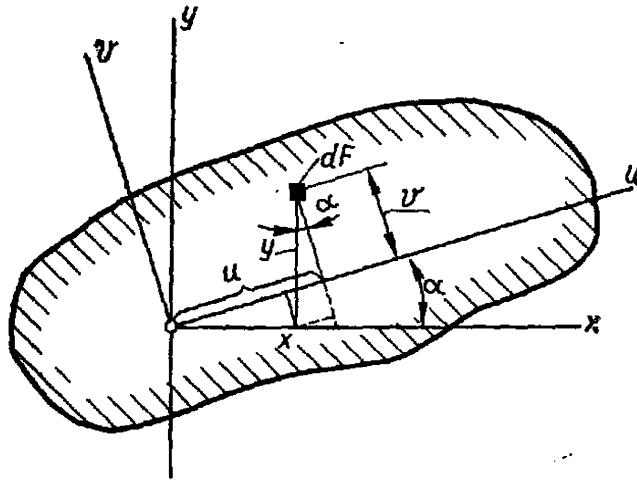


Рис. 99

Координата  $v$  равна разности:

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

По определению осевой момент инерции  $J_u$  равен интегралу:

$$J_u = \int_F v^2 dF.$$

Подставляя выражение для  $v$  под знак интеграла, получаем

$$J_u = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF$$

или

$$J_u = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha. \quad (6)$$

Аналогично получаются следующие зависимости:

$$J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \cos^2 \alpha; \quad (7)$$

$$J_{uv} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (8)$$

Найдем теперь оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремума — максимума и

минимума. Приравняв нулю производную от  $J_u$  по  $\alpha$ , получим

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -2 \left( \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \right) = -2J_{uv}.$$

Отсюда видно, что условие экстремума для осевых моментов инерции есть условие обращения в нуль соответствующего центробежного момента инерции:  $J_{uv} = 0$ . Оба эти условия входят в понятие главных осей инерции.

В теории изгиба особую роль играют те главные оси, которые проходят через центр тяжести. Они называются главными центральными осями. Таким образом, главными центральными называются такие центральные оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений  $J_{\max}$  и  $J_{\min}$ , а центробежный момент инерции равен нулю. Угол наклона  $\alpha_0$  главных осей к исходным осям найдем, приравняв нулю выражение (8). Разделив это равенство на  $\cos 2\alpha$  и на  $\frac{1}{2}(J_x - J_y)$ , получим формулу для тангенса двойного угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (9)$$

По найденному тангенсу определяются два угла  $\alpha_0$  и  $\alpha_0 + 90^\circ$ , характеризующих направления осей  $u$  и  $v$ , относительно которых осевые моменты достигают экстремума.

Выведем теперь формулы для вычисления  $J_{\max}$ ,  $J_{\min}$  через исходные моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$ .

Для этого в выражениях (6) и (7) надо исключить угол  $\alpha_0$

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (10)$$

Здесь знак плюс соответствует максимальному моменту инерции, знак минус — минимальному. Заметим, что из этой формулы следует зависимость

$$J_{\max} + J_{\min} = J_x + J_y,$$

которая является частным случаем более общей зависимости (4).

Если сечение имеет ось симметрии, то, совмещая с ней одну из декартовых осей, например ось  $y$ , получим, как уже отмечалось выше,  $J_{xy} = 0$ . Это означает, что ось симметрии всегда является главной центральной осью. Цент-

ральной потому, что центр тяжести симметричной фигуры всегда находится на оси симметрии. Второй главной центральной осью будет центральная ось, перпендикулярная оси симметрии.

В общем случае для определения положения главных осей и соответствующих моментов инерции  $J_{max}$ ,  $J_{min}$  вы-

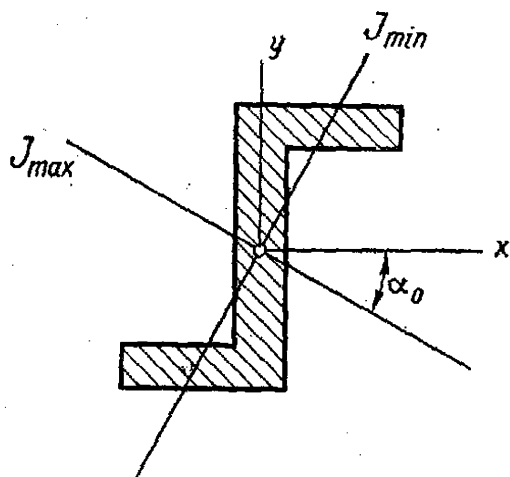


Рис. 100

бираются сначала оси  $x$ ,  $y$  так, чтобы как можно проще можно было вычислить моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  (рис. 100). После определения этих величин находим по формуле (10) главные моменты инерции, а по формуле (9)  $\operatorname{tg} 2\alpha_0$  и соответствующее этому тангенсу значение аргумента  $\alpha_0$ . Минимальным будет момент инерции относительно оси, со-

впадающей с направлением, по которому «вытянуто» сечение.

В технике часто используются стержни стандартного прокатного профиля. Все основные геометрические характеристики сечений таких стержней, вплоть до положения главных центральных осей несимметричных сечений, имеются в ГОСТах и справочной литературе.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
От редактора . . . . .	3
Введение (В. И. Феодосьев) . . . . .	4
Лекции 1—2. Основные принципы сопротивления материалов (В. И. Феодосьев) . . . . .	20
Лекции 3—4. Растяжение и сжатие прямого бруса (А. В. Дарков) ков) . . . . .	31
Лекции 5—6. Механические свойства материалов (Ю. Н. Работнов) ботнов) . . . . .	44
Лекции 7—8. Физические основы сопротивления материалов (Ю. Н. Работнов) . . . . .	58
Лекции 9—10. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии (В. И. Феодосьев) . . . . .	74
Лекции 11—12. Кручение бруса круглого поперечного сечения (И. В. Родин) . . . . .	89
Лекции 13—14. Кручение бруса некруглого поперечного сечения (В. И. Феодосьев) . . . . .	104
Лекции 15—16. Геометрические характеристики поперечных сечений бруса (Б. Я. Лащеников) . . . . .	121