МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени Н. Э. Баумана

Факультет "Фундаментальные науки"

УДК 517.518.122

Пухов Станислав Сергеевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Учебное пособие по дисциплине

"Дополнительные главы математического анализа"

УМКД.ФН12-23.2012/2013

Москва

2016

Аннотация

Представлены основные теоретические сведения по теории меры и интеграла Лебега и предложены задачи для практического усвоения этих сведений. Материал учебного пособия соответствует программе курса "Дополнительные главы математического анализа".

Для студентов 2-го курса факультета "Информатика и системы управления", обучающихся по специальности "Прикладная математика и информатика".

Содержание

Введение

Теория интеграла Лебега обычно подробно излагается в учебных курсах, предназначенных для студентов, основной специализацией которых является математика. При обучении же студентов технических специальностей, как правило, ограничиваются изучением римановской конструкции интеграла, поскольку её вполне хватает для вычислительных нужд. Для студентов кафедры ИУ-9 имеет место смешанная ситуация: с одной стороны, их основная специальность — системное программирование, с другой — им также присваивается квалификация математика. Поэтому, хотя знание основ теории меры и интеграла Лебега необходимо данным студентам, всё же к ним нельзя предъявлять столь же высокие требования, как к студентам–математикам. В частности, самостоятельная работа студентов не может в полной мере носить тот творческий характер, какой необходим для формирования будущих учёных–математиков: при решении задач студент должен если не действовать по чёткому алгоритму, то по крайней мере иметь в виду какое-то общее направление мысли и характерные для той или иной темы приёмы. Это требование придаёт определённую трудность практическим занятиям именно по данному курсу, поскольку его основной задачей служит овладение теоретическими понятиями высокого уровня сложности (в то время как, скажем, в основном курсе математического анализа римановские конструкции интегралов носят более естественный характер и главная задача студента состоит в приобретении вычислительных навыков). Это обстоятельство диктует хотя бы отчасти теоретический характер большинства задач по курсу и требует достаточно свободной работы мысли при их решении.

Таким образом, при составлении практических задач для данного курса необходимо найти баланс между ситуацией обучения студента–математика, который должен уметь самостоятельно доказывать не слишком сложные теоретические утверждения, применяя весь знакомый ему по лекциям и учебной литературе (зачастую не только по данному предмету) арсенал приёмов, и ситуацией обучения студента–"технаря", чей интерес к математике носит прикладной характер, в силу чего ему достаточно овладеть алгоритмами решения типовых задач. Нахождение такого баланса автор и имел в виду при проведении практических занятий по курсу и составлении данного пособия. Стоит отметить, что имеющаяся учебная литература (как учебники, напр. №1 и 2 из списка литературы, так и задачники, напр. №3 и 4) чаще всего объединяет тематику данного предмета с какой-либо иной (напр., функциональным анализом), что делает изложение теоретического материала недостаточно подробным (ведь он ориентирован на математиков, способных самостоятельно продумать опущенные подробности), а практический материал довольно скупым. Поэтому от автора при составлении пособия зачастую требовался самостоятельный поиск подходящих упражнений.

Будучи снабжено лаконичными, но вполне информативными теоретическими пояснениями, данное пособие соответствует целям изучения дисциплины "Дополнительные главы математического анализа": формированию у студента знаний основных понятий и теорем теории меры и интеграла Лебега и практических умений вычислять меры различных множеств, исследовать измеримость функций, исследовать функциональные последовательности на различные виды сходимостей, вычислять интегралы Лебега по различным мерам, в том числе с помощью обоснованного применения теорем теории интеграла Лебега.

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВО КАНТОРА. ФУНКЦИЯ КАНТОРА

Множество Кантора K строится следующим образом: из отрезка $[0,1]$ исключается средняя треть (интервал $(1/3, 2/3)$), затем из двух оставшихся отрезков также исключаются средние трети (интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$), и так до бесконечности. Оставшиеся точки и образуют по определению множество Кантора.

Данный процесс удобно описать в терминах троичного разложения: на первом шаге мы вычли троичные дроби вида $0,1\ldots_3$ (кроме числа $1/3 = 0,1_3$), на втором — дроби вида $0,01\ldots_3$ и $0,21\ldots_3$ (кроме чисел $1/9 = 0,01_3$ и $7/9 = 0,21_3$), т.е. мы на n-м шаге выкидываем троичные дроби, содержащие единицу на n-м месте; исключение составляют конечные дроби, содержащие единицу только на конце. Таким образом, множество Кантора состоит из всех троичных дробей, не содержащих единицы, а также из всех конечных троичных дробей, содержащих единицу только на конце.

Геометрически множество Кантора любопытно тем, что если его сжать в три раза к нулю или к единице, получатся каждый раз половинки этого множества (это свойство очевидно для совокупности выкидываемых при построении K интервалов, и, переходя к дополнениям, мы получаем это свойство для самого множества K). Такое свойство (часть подобна целому) носит название самоподобия, а сами структуры с подобным свойством называются фракталами. Свойство самоподобия множества Кантора можно выразить формулами:

$$K \cap [0, 1/3] = K/3, \qquad K \cap [2/3, 1] = (K+2)/3.$$

Задача 1. *Доказать континуальность множества Кантора.*

(указание: в троичном разложении элементов двойки заменить на единицы)

Задача 2. *Показать, что точка* $1/4$ *принадлежит канторову множеству* K*, не являясь концом никакого из выбрасываемых интервалов.*

(указание: наблюдая, в каких отрезках в процессе построения K остаётся $1/4$, догадаться до троичного разложения и проверить его, суммируя соответствующую прогрессию)

Задача 3. *Показать, что точка* $12/13$ *принадлежит канторову множеству* K*, не являясь концом никакого из выбрасываемых интервалов.*

Задача 4. *Показать, что* $K + K = [0, 2]$.

(указание: $\forall x \in [0, 2]$ рассмотреть троичное разложение числа $x/2$ и разбить на сумму двух троичных дробей из единиц и нулей)

Задача 5. *Показать, что* $K + K + K = [0, 3]$.

Задача 6. *Найти суммарную длину интервалов, выкинутых при построении множества Кантора.*

Задача 7. *Пусть на* k*–м шаге построения множества Кантора выкидываются интервалы длины не* $1/3^k$*, а длины* x^k*. Какова будет суммарная длина выкинутых интервалов? Для каких* x *такое построение возможно?*

С множеством Кантора K тесно связана функция $K(x)$, также носящая имя Кантора. Опишем процесс её построения. Положим $K(0) = 0$, $K(1) = 1$. Далее последовательно на каждом интервале, вычитаемом при построении канторовского множества, будем полагать значение $K(x)$ постоянным и равным среднему арифметическому от ранее определённых значений в точках, ближайших к данному интервалу слева и справа. Так, на $(1/3, 2/3)$ положим $K(x) = 1/2$, на $(1/9, 2/9)$ положим $K(x) = 1/4$, на $(7/9, 8/9)$ положим $K(x) = 3/4$ (см.рис.1), и т.д.

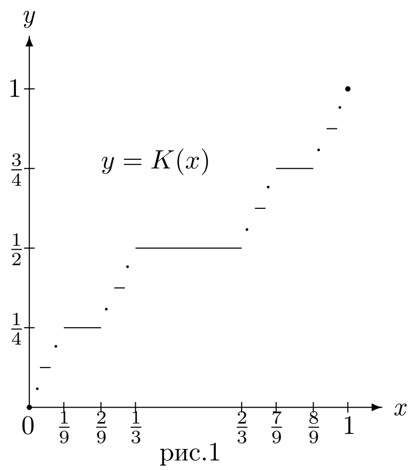

рис.1

Таким образом, функция Кантора пока что определена на дополнении к множеству Кантора, неубывает и принимает все значения вида $k/2^n, n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, 2^n$. В силу неубывания во всякой точке $x \in (0, 1)$ у функции Кантора существуют односторонние пределы. Если $K(x+0) > K(x-0)$, то между этими пределами найдётся значение вида $k/2^n$, которое функция Кантора обязана принять на интервале слева или справа от точки x, что противоречит монотонности. Поэтому $\forall x \in (0, 1)$ $K(x + 0) = K(x - 0)$, то есть у построенной ранее функции Кантора существует обычный предел, который мы и положим окончательно за $K(x)$. Очевидно, ранее полученные значения при таком определении сохранятся, и введенная функция будет непрерывной и монотонной на $[0, 1]$.

Заметим два свойства функции Кантора. Во-первых, чтобы вычислить её значение в точке канторовского множества, надо в троичном разложении аргумента заменить все двойки на единицы и прочитать как двоичное разложение (это очевидно из определения $K(x)$ для концов вычитаемых при построении K интервалов, а на произвольные точки K распространяется по непрерывности). Во-вторых, легко видеть, что если график функции Кантора сжать в три раза к Oy (или к прямой $x = 1$) и в два раза к Ox (соответственно к прямой $y = 1$), получим в обоих случаях соответствующий кусок исходного графика. Таким образом, канторова лестница (как часто называют график функции Кантора или её саму), как и множество Кантора, является самоподобной структурой. Этот факт выражается соотношениями

$$K(x) = K(3x)/2, \quad x \in [0, 1/3]; \qquad K(x) = K(3x-2)/2+1/2, \quad x \in [2/3, 1].$$

Задача 8. *Вычислить значение канторовой функции на а)* $1/4$, *б)* $1/13$, *в)* $9/10$ *.*

Задача 9. *Доказать, что функция Кантора переводит множество Кантора в отрезок* $[0, 1]$.

Задача 10. *Найти длину графика функции Кантора.*

Задача 11. *Найти интегралы: а)* $\int\limits_0^1 K(x)\,dx$, *б)* $\int\limits_0^1 xK(x)\,dx$, *в)* $\int\limits_0^1 x^2K(x)\,dx$.

(указание: разбить отрезок интегрирования на 3 трети, и после применения формул самоподобия получить уравнение на искомый интеграл)

Задача 12. *Найти интегралы: а)* $\int\limits_0^1 (1-x)K(x/2)\,dx$, *б)* $\int\limits_0^1 K^2(x)\,dx$.

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

Системой (классом, совокупностью и т. п.) множеств мы будем называть множества, элементы которого сами являются множествами (будем считать их подмножествами некоторого основного множества X).

Полукольцом называется такая непустая система множеств S, что 1) $\forall A, B \in S$ верно $A \cap B \in S$ и 2) $\forall A, B \in S$ найдутся попарно непересекающиеся $A_1, \ldots, A_n \in S : A \setminus B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Первое свойство можно прочитать так: полукольцо замкнуто относительно операции пересечения. Из второго свойства (при $A = B$) сразу следует, что пустое множество $\emptyset$ принадлежит любому полукольцу.

Кольцом называется такая непустая система множеств R, что 1) $\forall A, B \in R$ верно $A \cup B \in R$ и 2) $\forall A, B \in R$ верно $A \setminus B \in R$. То есть кольцо, по определению — это непустая система множеств, замкнутая относительно объединения и разности. Понятно, что второе свойство по сравнению с определением полукольца здесь усилено, поэтому всякое кольцо является также и полукольцом. Кольцо называется алгеброй, если оно имеет элемент, содержащий все остальные элементы (такой элемент называется единицей, поскольку его пересечение с любым элементом не изменяет этот элемент, по аналогии с тем, как умножение на единицу сохраняет любое число).

Сигма-кольцом называется такая непустая система множеств σ, что 1) $\forall A_1, \ldots, \ldots, A_n, \ldots \in \sigma$ верно $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots \in \sigma$ и 2)$\forall A, B \in \sigma$ верно $A \setminus B \in \sigma$. Отличие от кольца в том, что здесь требуется замкнутость относительно счётного объединения. Это требование сильнее, чем требование замкнутости относительно простого объединения, поскольку последнее всегда можно превратить в счётное, добавив "хвост" из пустых множеств: $A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \ldots \cup \emptyset \cup \ldots$. Сигма-кольцо с единицей называется сигма-алгеброй.

Задача 13. *Пусть A, B — два подмножества X. Описать (перечислением элементов) а) наименьшее кольцо, б) наименьшее (по количеству элементов) полукольцо, содержащее A и B.*

Задача 14. *Показать, что а) полуинтервалы вида $[a, b)$, б) промежутки общего вида в $\mathbb{R}$ образуют полукольцо, но не образуют кольцо.*

Задача 15. *Показать, что декартовы произведения полуинтервалов вида $[a, b)$ в $\mathbb{R}^2$ образуют полукольцо, но не образуют кольцо.*

Задача 16. *Показать, что в определении кольца можно вместо операций $\cup$ и $\setminus$ брать $\cap$ и Δ (симметрическую разность, $A\Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$).*

(указание: достаточно, очевидно, выразить одни операции через другие и наоборот)

Задача 17. *Показать, что система множеств, замкнутая относительно операций $\cup$ и $\cap$ необязательно является кольцом.*

Задача 18. *Показать, что система множеств, замкнутая относительно операций $\setminus$ и $\cap$ необязательно является кольцом.*

Задача 19. *Доказать, что для произвольного множества X множество всех его конечных подмножеств образует кольцо. При каком условии на X это кольцо будет алгеброй? сигма-алгеброй?*

Задача 20. *Будут ли а) кольцо, б) алгебра, замкнутые относительно счётного пересечения, а) сигма-кольцом, б) сигма-алгеброй?*

Пусть Y — некоторый класс множеств. Минимальным кольцом, содержащим Y, называется кольцо $R(Y)$, которое 1) само содержит Y,

2) содержится в любом кольце, содержащем Y. Аналогичным образом определяется минимальное сигма-кольцо $\sigma(Y)$, содержащее Y. Заметим, что при рассмотрении систем множеств часто используются термины (типа "минимальное"), привычные применительно к числовым неравенствам, только вместо отношения неравенства подразумевается отношение включения. Ясно, что если исходная система Y имела единицу, то и минимальное кольцо (сигма-кольцо) будет иметь ту же самую единицу.

Теорема. *Для любого полукольца S минимальное порождённое им кольцо $R(S)$ состоит из конечных объединений элементов полукольца.*

При этом для $\sigma(S)$ не удаётся дать конструктивное описание.

Теорема. *Если все элементы системы Y_1 выражаются с помощью счётного объединения и разности через элементы системы Y_2, то $\sigma(Y_1) \subset \sigma(Y_2)$. Если такое отношение Y_1 и Y_2 взаимно, то $\sigma(Y_1) = \sigma(Y_2)$.*

Разумеется, если счётное объединение заменить на простое, получится аналогичная теорема о включении и равенстве минимальных колец.

Борелевской сигма-алгеброй в $\mathbb{R}^n$ (обозначение $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) называется минимальное сигма-кольцо, порождённое системой открытых множеств (само $\mathbb{R}^n$ тоже открыто, поэтому получается сигма-кольцо с единицей, то есть именно сигма-алгебра). Элементы этой сигма-алгебры называются борелевскими множествами.

Задача 21. *Показать, что множество $A \subset \mathbb{R}$ является борелевским: а) $A = [a, b)$, б) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, в) $A = K$.*

(указание: достаточно выразить данные множества через открытые)

Задача 22. *Доказать, что любое открытое множество в* $\mathbb{R}$ *есть не более чем счётное объединение попарно непересекающихся интервалов и лучей.*

Задача 23. *Доказать, что* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *порождается системой всех интервалов.*

(указание: использовать предыдущую задачу и теорему о равенстве минимальных сигма-колец)

Задача 24. *Доказать, что* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *порождается а) всевозможными отрезками; б) лучами вида* $(-\infty, c)$, $c \in \mathbb{Q}$*; в) интервалами вида* (a, b)*, где* $a < 0 < b$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

(указание: использовать предыдущую задачу и теорему о равенстве минимальных сигма-колец)

Задача 25. *Доказать, что* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *порождается а) лучами* $[c, +\infty)$, $c = \dfrac{m}{2^n}$, $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$*; б) отрезками вида* $[a, b],\ a, b \in \mathbb{Q}$.

Задача 26. *Порождает ли семейство* $\{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ *борелевскую сигма-алгебру на* $\mathbb{R}$*?*

Задача 27. *Порождают ли семейства а)* $\{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$*, б)* $\{[a, 2a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ *борелевскую сигма-алгебру на* $\mathbb{R}$*?*

Задача 28. *Описать минимальное кольцо, порождаемое а) семейством одноточечных множеств из* $\mathbb{N}$*, б) семейством, состоящим из одноточечных множеств из* $\mathbb{N}$ *и самого* $\mathbb{N}$.

Задача 29. *Описать минимальное сигма-кольцо, порождаемое а) семейством одноточечных множеств из* $\mathbb{R}$*, б) семейством, состоящим из одноточечных множеств из* $\mathbb{R}$ *и самого* $\mathbb{R}$.

ГЛАВА 3. МЕРА НА ПОЛУКОЛЬЦАХ И КОЛЬЦАХ

Мерой m на полукольце S называется отображение $m : S \to [0, +\infty)$, обладающее свойством аддитивности:

$$A_1, \ldots, A_n, A_1 \sqcup ... \sqcup A_n \in S \Rightarrow m(A_1 \sqcup .... \sqcup A_n) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

(под символом $\sqcup$ здесь и далее понимаем объединение попарно непересекающихся множеств). Мера m называется счётно-аддитивной (или σ–аддитивной), если для любых множеств

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots, A_1 \sqcup ... \sqcup A_n \sqcup ... \in S \ \Rightarrow\ m(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n \sqcup ...) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Задача 30. *Останется ли определение меры на полукольце равносильным, если в свойстве аддитивности рассматривать объединения только двух множеств?*

(указание: рассмотреть трёхточечное множество, приписав каждой точке нулевую меру, а всему множеству — единичную, при этом не включив в полукольцо двухточечные множества)

Задача 31. *Привести пример не счётно-аддитивной меры на каком-нибудь кольце.*

(указание: использовать кольцо из задачи 28)

Теорема. *Для любой меры m на полукольце S существует единственное её продолжение на $R(S)$, определённое по формуле $m(A_1 \sqcup .... \sqcup A_n) = m(A_1) + ... + m(A_n)$ (см. теорему о виде $R(S)$ в предыдущей главе). Если исходная мера была сигма-аддитивной, то и продолжение будет сигма-аддитивным.*

В силу этой теоремы, даже если исходная мера задана на полукольце, то можно рассматривать меру от конечных объединений и разностей множеств из этого полукольца. Далее в задачах подразумеваем, что мера определена на всех множествах, на которых она рассматривается в формулировке задачи.

Задача 32. *Доказать, что* $A \subset B \Rightarrow m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$. *Как следствие,* $A \subset B \Rightarrow m(A) \le m(B)$ *(свойство монотонности меры).*

Задача 33. *Доказать, что* $|m(A) - m(B)| \le m(A \Delta B)$.

Задача 34. *Доказать, что* $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$ *(формула включений–исключений).*

Задача 35. *Каков аналог формулы из предыдущей задачи для* $m(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$*? для* $m(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$*?*

Задача 36. *Доказать, что* $m(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \le m(A_1) + ... + m(A_n)$ *(свойство полуаддитивности), а для* σ*–аддитивной меры* $m(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) \le$ $\le m(A_1) + \ldots + m(A_n) + \ldots$ *(свойство счётной полуаддитивности).*

(указание: для счётно-аддитивной меры представить $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ в виде объединения непересекающихся подмножеств A_n)

Задача 37. *Доказать, что для счётно-аддитивной меры* $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow$ $\Rightarrow m(A) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ *(свойство счётно-аддитивной монотонности).*

(замечание: это не совсем очевидное следствие монотонности и счётной полуаддитивности, так как мера может быть не определена на множестве $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$)

Задача 38. *Доказать, что для всякой меры* m

$$m(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup \ldots) \ge m(A_1) + ... + m(A_n) + \ldots .$$

Таким образом, счётная аддитивность равносильна выполнению условия

$$m(A_1 \sqcup ... \sqcup A_n \sqcup ...) \leq m(A_1) + ... + m(A_n) + \dots .$$

Мера Лебега–Стилтьеса на полукольце $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ определяется по неубывающей функции $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как $m_F([a, b)) = F(b) - F(a)$. Важнейший частный случай ($F(x) = x$) — линейная мера Лебега $m_L([a, b)) = b-a$. На полукольце $\{[a, b) \times [c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ можно рассмотреть плоскую меру Лебега $m_L([a, b) \times [c, d)) = (b - a)(d - c)$. Аналогичным образом можно ввести меру Лебега и в $\mathbb{R}^n$.

Задача 39. *Доказать, что мера Лебега на* $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ σ*-аддитивна.*

(указание: если $[a, b) = [a_1, b_1) \sqcup \ldots \sqcup [a_n, b_n) \sqcup \ldots$, то $[a, b-\varepsilon] \subset (a_1-\varepsilon/2, b_1) \sqcup \sqcup (a_2 - \varepsilon/4, b_2) \sqcup \ldots$, и теперь можно выделить конечное подпокрытие и перейти к мерам)

Задача 40. *Доказать, что мера Лебега–Стилтьеса на* $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ σ*-аддитивна для всякой неубывающей и непрерывной слева функции* F.

Задача 41. *Доказать, что плоская мера Лебега на* $\{[a, b) \times [c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ σ*-аддитивна.*

ГЛАВА 4. ВНЕШНЕЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ. ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть σ-аддитивная мера m задана на полукольце S, состоящем из некоторых подмножеств множества X. Верхней мерой множества $A \subset X$ называется

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \;\; A_k \in S$$

(на самом деле покрытия могут быть и конечными, ведь к таким можно добавить "хвост" из пустых множеств и формально получить счётное покрытие). Очевидно, верхняя мера обладает свойством монотонности: $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (поскольку при переходе от A к B сужается класс возможных покрытий, верхняя мера как инфимум может только увеличиться). Если исходная мера была мерой Лебега (Лебега–Стилтьеса), то говорят о верхней мере Лебега (Лебега–Стилтьеса).

Важно, что для элементов исходного полукольца верхняя мера совпадает с исходной. Действительно, если $A \in S$, то оно покрывает само себя, поэтому $\mu^*(A) \leq m(A)$, но для всякого покрытия $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_k \in S$ по счётно–аддитивной монотонности меры $m(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, и, переходя к инфимуму по покрытиям, получаем обратное неравенство $m(A) \leq \mu^*(A)$.

Задача 42. *Показать, что любое конечное или счётное множество на числовой прямой имеет нулевую верхнюю меру Лебега.*

(указание: элементы счётного множества надо покрывать быстро убывающими по длине интервалами)

Задача 43. *Показать, что верхняя мера Лебега любого промежутка с концами a и b равна $b - a$.*

(указание: воспользоваться монотонностью верхней меры)

Задача 44. *Показать, что в определении верхней меры можно брать покрытия множества A непересекающимися попарно элементами S.*

(указание: поскольку сужается класс возможных покрытий, верхняя мера может только увеличиться, а чтобы доказать равенство, надо свести произвольные покрытия к непересекающимся)

Задача 45. *Пусть m_L — мера Лебега на полукольце промежутков $\{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. Показать, что в определении верхней меры можно брать покрытия множества A а) отрезками, б) интервалами.*

Пусть $X \in S$. Множество $A \subset X$ называется измеримым (относительно исходной меры m), если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists A_\varepsilon \in R(S) : \; \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

В частности, любое множество верхней меры нуль измеримо (достаточно взять $A_\varepsilon = \emptyset$). Также измерим и любой элемент $R(S)$ (для него положим $A_\varepsilon = A$).

Задача 46. *Пусть $X \in S$. Доказать измеримость множества вида $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \; A_n \in S$.*

Напомним, что образом множества A под действием функции F называется множество $F(A) = \{y \mid \exists x \in A : F(x) = y\}$, а прообразом — множество $F^{-1}(A) = \{x \mid F(x) \in A\}$.

Задача 47. *а) Пусть F — числовая функция, $A, B \subset \mathbb{R}$. Как в общем случае связаны между собой $F(A \cup B)$ и $F(A) \cup F(B)$ (какое включение, есть ли равенство)? Тот же вопрос про*

б) $F(A \cap B)$ и $F(A) \cap F(B)$;

в) $F(A \setminus B)$ и $F(A) \setminus F(B)$;

г) $F(A \Delta B)$ и $F(A) \Delta F(B)$;

д) $F^{-1}(A \cup B)$ и $F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$;

е) $F^{-1}(A \setminus B)$ и $F^{-1}(A) \setminus F^{-1}(B)$.

Задача 48. *Пусть F — неубывающая непрерывная слева функция, μ_F^* — внешнее продолжение меры Лебега–Стилтьеса (с полукольца с единицей, напр., $\{[a,b) \subset [0,1)\}$), μ_L^* — внешнее продолжение меры Лебега. Каким неравенством связаны $\mu_F^*(A)$ и $\mu_L^*(F(A))$?*

(указание: если $A \subset \bigcup[a_n, b_n)$, то и $F(A) \subset \bigcup F([a_n, b_n)) \subset \bigcup[F(a_n), F(b_n)]$, откуда согласно задаче 45 $\mu_L^*(F(A)) \leq \sum(F(b_n) - F(a_n))$, и осталось перейти к инфимуму по покрытиям $\bigcup[a_n, b_n) \supset A$)

Задача 49. *Доказать, что в предыдущей задаче для всякого μ_F–измеримого множества A множество $F(A)$ измеримо по Лебегу и верно равенство $\mu_F(A) = \mu_L(F(A))$.*

(указание: использовать результат предыдущей задачи, вложение $F(A\Delta B) \supset F(A)\Delta F(B)$ и неравенство из задачи 33)

Задача 50. *а) Пусть F — неубывающая непрерывная слева функция. Доказать, что $\forall k > 0$ из μ_F–измеримости множества следует его μ_{kF}–измеримость и $\mu_{kF} = k\mu_F$. б) Пусть F_1, F_2 — неубывающие непрерывные слева функции, $F = F_1 + F_2$. Доказать, что из μ_F–измеримости множества следует его μ_{F_1} и μ_{F_2}–измеримость и $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$.*

Мера m называется сигма-конечной на X, если $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n \sqcup \ldots$, $X_n \in S$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(X_n) = +\infty$. В этом случае измеримость множества $A \subset X$ понимается как измеримость всех множеств вида $A \cap X_n$ в смысле данного ранее определения. Следующая теорема справедлива как для случая полукольца с единицей X (т.е. когда мера X конечна), так и для случая сигма-конечной меры.

Теорема (Каратеодори)**.** *Измеримые множества образуют сигма-алгебру, на которой верхняя мера счётно–аддитивна.*

В частности, все борелевские множества измеримы по любой мере Лебега–Стилтьеса (ведь класс измеримых — сигма-алгебра, содержащая полуинтервалы, а борелевский класс — минимальная такая сигма-алгебра). Верхнюю меру измеримых множеств будем далее называть просто мерой и обозначать $\mu(A)$ ($\mu_F(A)$ в случае меры Лебега–Стилтьеса). Полученную меру μ называют внешним продолжением (по Лебегу) исходной меры m. Внешнее продолжение меры Лебега на прямой будем обозначать μ_L, на плоскости (в пространстве) — μ_L^2 (μ_L^3). Эти меры выражают собой соответственно длину, площадь и объём произвольного измеримого множества.

Задача 51. *Можно ли построить в замкнутом параллелепипеде $P \subset \mathbb{R}^3$ замкнутое собственное подмножество, мера Лебега которого равна мере параллелепипеда?*

Задача 52. *Доказать, что мощность класса измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$ совпадает с мощностью класса всех его подмножеств.*

(указание: использовать существование множества Кантора — континуального множества, мера которого равна нулю)

Можно доказать (см. напр. №5 из спсика литературы), что мощность класса $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ равна континууму, поэтому из предыдущей задачи сразу следует существование измеримых неборелевских множеств. При этом доказать существование неизмеримого по Лебегу множества на основе сравнения мощностей не получается. Рассмотрим конструкцию такого множества, приведённую в №1 из списка литературы.

На полуинтервале $[0, 1)$ будем производить сложение и вычитание, отбрасывая целую часть (геометрически удобно представлять вместо полуинтервала окружность длины 1, где прибавление положительного числа означает сдвиг в положительном направлении на дугу соответствующей длины, а вычитание — сдвиг в отрицательном направлении). Введём отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$; разобьём полуинтервал на классы эквивалентности; наконец, составим множество A, взяв ровно по одному представителю каждого класса. Легко проверить, что множества $A_n = A + q_n$ (где q_n — пронумерованные рациональные числа из $[0, 1)$) попарно не пересекаются и дают в объединении весь полуинтервал $[0, 1)$. Будь A измеримым по Лебегу, были бы измеримы с той же мерой и все A_n (ведь сдвиг сохраняет меру Лебега и измеримость по Лебегу). Тогда $\mu_L([0, 1)) = 1$ должна по сигма–аддитивности слагаться из счётного числа мер множества A, но счётная сумма нулей даёт ноль, а счётная сумма одной и той же положительной константы — бесконечность. Мы получили противоречие.

Задача 53. *Доказать на основе вышеприведённого примера, что во всяком измеримом числовом множестве B положительной меры Лебега найдётся неизмеримое подмножество.*

(указание: свести к случаю $B \subset [0, 1)$ и рассмотреть множества $B \cap A_n$)

Задача 54. *Построить на плоскости $\mathbb{R}^2$ такое измеримое по плоской мере Лебега множество, проекции которого на обе координатные оси неизмеримы по линейной мере Лебега.*

ГЛАВА 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕР МНОЖЕСТВ

Задача 55. *Проверить борелевость следующих множеств и вычислить их меру Лебега:*

а) $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$,

б) K,

в) $K+\mathbb{Q}$,

г) $K\cdot\mathbb{Q}$,

д) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n-1/3^n, n+1/n^2)$,

е) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n^2, n^2+1/(n+1)!]$,

ж) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n, n+2^n/n!]$,

з) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n+1/(2n+2)!\,,\; n+1/(2n+1)!]$,

и) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n, n+3^n/(2n)!]$.

(указание: в этой и многих последующих задачах для суммирования рядов применить формулу суммы геометрической прогрессии, аппарат рядов Тейлора или формулу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^2=\pi^2/6$)

Задача 56. *Доказать, что множество* $A\subset\mathbb{R}^2$ *является борелевским и найти его плоскую меру Лебега* μ_L^2, *если*

а) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid\cos x\in\mathbb{Q}\}\times(0,+\infty)$,

б) $A=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1/(a^2+x^2)\}$,

в) $A=\{(x,y)\mid 0\le x,\; 0\le y<e^{-x}|\sin x|\}$.

(указание: плоская мера Лебега — это площадь, поэтому можно для её вычисления использовать двойной интеграл Римана)

Задача 57. *Доказать, что множество* $A\subset\mathbb{R}^3$ *является борелевским и найти его меру Лебега* μ_L^3, *если* *а)* $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty)$,

б) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z \in \mathbb{Z}\}$,

в) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < z < 1, \ x > 1, \ 0 < y < (x - [x])^{[x]}/[x]\}$

($[x]$ означает целую часть числа x).

(указание для пункта в): трёхмерная мера Лебега — это объём, поэтому можно для его вычисления использовать тройной интеграл Римана)

Задача 58. *Найти меру Лебега множества тех точек полуинтервала* $[0, 1)$*, которые допускают разложение в бесконечную десятичную дробь без использования цифры 5.*

(указание: основная идея в таких задачах — самоподобие множества: например, $A \cap [0, 1/10) = A/10$, так как оба множества состоят из дробей вида $0,0\ldots$, не содержащих 5, и пользуясь такими соотношениями (см.рис.2), легко составить и решить уравнение на меру A)

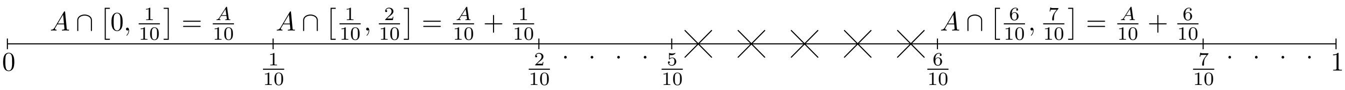

рис. 2

Задача 59. *Найти меру Лебега множества тех точек полуинтервала* $[0, 1)$*, в десятичном разложении которых обязательно встречается либо цифра 2, либо цифра 7.*

Задача 60. *Найти меру Лебега подмножества полуинтервала* $[0, 1)$*, состоящего из чисел, в десятичной записи которых цифра 2 впервые встречается раньше цифры 3.*

Задача 61. *Найти меру Лебега подмножества полуинтервала* $[0, 1)$*, состоящего из чисел, в троичной записи которых цифра 2 дважды встречается раньше первого появления цифры 1.*

(указание: разбив полуинтервал на девять равных частей, видим, что на первых трех это множество самоподобно, числа последней части включены полностью, а седьмой части — наполовину)

Задача 62. *Найти меру Лебега множества тех точек полуинтервала* $[0, 1)$*, в троичном разложении которых первая единица окружена двойками.*

Задача 63. *Найти меру Лебега подмножества полуинтервала* $[0, 1)$*, состоящего из чисел, в троичной записи которых цифра 2 после запятой появляется раньше 0, но позже 1.*

Мера μ называется непрерывной снизу, если из условий $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $\forall k\ A_k \subset A_{k+1}$ следует соотношение $\mu(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} \mu(A_k)$. Мера μ называется непрерывной сверху, если из условий $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $\forall k\ A_k \supset A_{k+1}$ следует соотношение $\mu(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} \mu(A_k)$. Если мера принимает только конечные значения, непрерывность снизу, непрерывность сверху и сигма–аддитивность равносильны. Для бесконечных сигма–аддитивных мер может нарушаться непрерывность сверху (например, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [k, +\infty) = \emptyset$, но $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu_L([k, +\infty)) = +\infty \neq 0 = \mu_L(\emptyset)$.

Задача 64. *Функция F задана следующим образом:* $F(x) = \operatorname{arctg} x + 1$ *на* $(-\infty, 0]$, $F(x) = 2$ *на* $(0, 1]$ *и* $F(x) = 3$ *на* $(1, +\infty)$*);* μ_F *— мера Лебега–Стилтьеса, соответствующая этой функции. Найти а)* $\mu_F([-1, 1])$*, б)* $\mu_F((0, 2))$*, в)* $\mu_F((-\infty, 0])$*.*

(указание: приблизить данные промежутки "хорошими" вида $[a, b)$, на которых мера Лебега–Стилтьеса задана по определению, и воспользоваться непрерывностью меры; в пункте в) также использовать аддитивность)

Задача 65. *Пусть мера Лебега–Стилтьеса μ_F задаётся функцией $F(x) = \operatorname{arctg} x + \left[\dfrac{4\operatorname{arctg} x}{\pi}\right]$ ($[y]$ — целая часть y, переопределённая в целых точках так, чтобы быть непрерывной слева). Найти а) $\mu_F([-2,1])$, б) $\mu_F((-\infty,-1))$, в) $\mu_F(\mathbb{Q})$.*

Задача 66. *Пусть мера Лебега–Стилтьеса μ_F задаётся функцией $F(x) = \operatorname{arctg} x + \left[\dfrac{3\operatorname{arctg} x}{\pi}\right]$ ($[y]$ — целая часть y, переопределённая в целых точках так, чтобы быть непрерывной слева). Найти а) $\mu_F([0,\sqrt{3}])$, б) $\mu_F((-\infty,-1/\sqrt{3}))$, в) $\mu_F(\mathbb{Q})$.*

Задача 67. *Пусть $F(x) = 1-1/x$, $x \geq 1$. Найти а) $\mu_F\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[2n-1,2n]\right)$, б) $\mu_F\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[4n-3,4n-1]\right)$.*

Задача 68. *Пусть $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 1$. Найти $\mu_F\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[2n-1,2n]\right)$.*

Задача 69. *Пусть $F(x) = 2x + 3K(x)$ ($K(x)$ — функция Кантора). Найти $\mu_F(K)$.*

(указание: использовать задачу 50)

Задача 70. *Пусть множества $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ измеримы и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) < +\infty$. Доказать, что множество, состоящее из точек, попавших в бесконечное число A_n, измеримо и имеет меру нуль.*

(указание: выразить данное множество через A_n с помощью объединений и пересечений и воспользоваться непрерывностью меры)

ГЛАВА 6. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Пусть на множествах X_1, X_2 заданы сигма–алгебры σ_1, σ_2 соответственно. Функция $f\colon X_1 \to X_2$ называется (σ_1,σ_2)–измеримой, если $\forall A \in \sigma_2$ $f^{-1}(A) \in \sigma_1$.

Если $X_1 = \mathbb{R}^m$, $X_2 = \mathbb{R}^n$, $\sigma_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $\sigma_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то такая функция называется борелевской, а если вместо этого в роли σ_1 измеримые по Лебегу множества в $\mathbb{R}^m$ (и по-прежнему $\sigma_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$), то функция называется измеримой по Лебегу. Поскольку всякое борелевское множество измеримо по Лебегу, то и всякая борелевская функция измерима по Лебегу. Термин "измеримость", без уточнения "по Лебегу", будем употреблять в общей ситуации, когда вид сигма–алгебр не уточняется. Справедливо следующее достаточное условие измеримости.

Теорема. *Если для всякого множества A из класса G верно $f^{-1}(A) \in \sigma_1$, и выполнено условие $\sigma_2 \subset \sigma(G)$, то функция f является (σ_1, σ_2)–измеримой.*

То есть можно проверять на принадлежность σ_1 прообразы не всех множеств из σ_2, а только из G. Например, если $\sigma_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, то можно проверять только прообразы лучей $(-\infty, c)$, то есть множества вида $\{x \mid f(x) < c\}$. Итак, если все множества вида $\{x \mid f(x) < c\}$ борелевские (или измеримы по Лебегу), то и функция является борелевской (соответственно, измеримой по Лебегу).

Задача 71. *Какой вид могут иметь множества $\{x \mid f(x) < c\}$ для неубывающей на $\mathbb{R}$ функции f? Доказать борелевость такой функции.*

Задача 72. *Располагая примером неизмеримого по Лебегу множества, привести пример неизмеримой по Лебегу функции, модуль которой измерим по Лебегу.*

Задача 73. *Привести пример неизмеримой по Лебегу f такой, что для каждого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x \mid f(x) = c\}$ измеримо по Лебегу.*

Задача 74. *Показать, что функция $f(x) = \max\{f_1(x), ..., f_n(x)\}$ измерима, если f_k — измеримые числовые функции.*

Задача 75. *Показать, что функция а) $f(x) = \sup\limits_n f_n(x)$, б) $f(x) = \inf\limits_n f_n(x)$ измерима, если f_n — измеримые числовые функции.*

Задача 76. *Привести пример измеримой по Лебегу функции, переводящей некоторое множество меры Лебега нуль в множество положительной меры Лебега.*

Задача 77. *Доказать, что непрерывность числовой функции (с открытой областью определения) равносильна открытости прообраза всякого открытого множества.*

Из предыдущей задачи и теоремы о достаточном условии измеримости следует, что непрерывные функции являются борелевскими, а значит, и измеримыми по Лебегу.

Из определения измеримости ясно, что композиция борелевских — борелевская, композиция измеримой по Лебегу (действует первой) и борелевской — измерима по Лебегу. Но даже композиция непрерывной и измеримой по Лебегу не обязана быть измеримой по Лебегу.

Действительно, рассмотрим возрастающую непрерывную функцию $\phi(x) = x + K(x)$ на $[0, 1]$, тогда $\mu_L(\phi(K)) = \mu_\phi(K) = \mu_L(K) + \mu_{K(x)}(K) = 0 + \mu_L(K(K)) = \mu_L([0, 1]) = 1$ (исп. св-ва из главы 4), поэтому в силу результата задачи 53 в $\phi(K)$ есть неизмеримое по Лебегу подмножество C. Его прообраз D относительно ϕ лежит в K, а потому имеет верхнюю меру Лебега нуль и является измеримым по Лебегу. Поэтому индикатор D (т. е. функция, равная единице на D и нулю вне его) будет измеримой по Лебегу функцией. Однако композиция непрерывной функции ϕ^{-1} и этого индикатора будет неизмерима по Лебегу, ведь прообраз единицы относительно этой композиции есть C. Заметим, что D

дает пример неборелевского измеримого по Лебегу множества, поскольку, будь оно борелевским, его прообраз C относительно непрерывной функции ϕ^{-1} также был бы борелевским, в то время как он неизмерим.

Теорема. *Измеримость по Лебегу и борелевость сохраняются при арифметических операциях и предельном переходе.*

Задача 78. *Верно ли, что а) из измеримости f следует измеримость $|f|$, б) из измеримости $|f|$ следует измеримость f?*

Задача 79. *Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n + \cos[nx]}$ борелевская ($[y]$ — целая часть числа y).*

(указание: обосновать сходимость ряда и применить свойства борелевских функций)

Задача 80. *а) Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \cdot \left\{ \dfrac{10}{\sin nx + \pi} \right\}$ измерима по Лебегу ($\{y\}$ — дробная часть числа y).*

Задача 81. *Доказать, что функция а) $f(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[xn]}{1+2^{n-[y]}}$, б) $f(x, y) = = \operatorname{sign} \cos |xy|$ является борелевской ($[t]$ — целая часть числа t).*

ГЛАВА 7. СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ

Пусть на некоторой сигма-алгебре подмножеств X задана сигма-аддитивная мера μ. Говорят, что последовательность (f_n) измеримых функций на X сходится по мере μ к измеримой функции f на X, если

$$\forall \delta > 0 \quad \mu\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Ясно, что сходимость по мере является ослаблением понятия равномерной сходимости (для неё множество под знаком меры пусто при больших n).

Говорят, что функциональная последовательность сходится почти всюду относительно некоторой меры, если выполняется поточечная сходимость за исключением множества меры нуль. Для множеств конечной меры из сходимости почти всюду следует сходимость по мере (но не наоборот). Если не уточняется иное, сходимость почти всюду рассматривается относительно меры Лебега.

Напомним, что индикатором множества называется функция, равная единице на этом множестве и нулю вне его.

Задача 82. *Сходится ли на* $(0, +\infty)$ *последовательность индикаторов отрезков* $[n, \sqrt{n^2+n}]$ *а) почти всюду? б) по мере Лебега? в) по мере Лебега–Стилтьеса относительно функции* $\sqrt{x}$*?*

Задача 83. *Сходится ли на* $(0, +\infty)$ *последовательность индикаторов отрезков* $[n, \sqrt{n^2+1}]$ *а) почти всюду? б) по мере Лебега? в) по мере Лебега–Стилтьеса относительно функции* x^2*?*

Задача 84. *Сходится ли на* $\mathbb{R}$ *последовательность* $f_n(x) = \sin^n x$ *а) почти всюду? б) по мере Лебега?*

Задача 85. *Пусть* $f_n(x) = 1$ *при* $x \in [(n-2^k)/2^k,\ (n+1-2^k)/2^k)$ *(где* k *подобрано так, чтобы* $2^k \le n < 2^{k+1}$*), и* $f_n(x) = 0$ *в противном случае (т. н. "бегунок"). Нарисовав графики нескольких начальных членов последовательности, показать, что эта последовательность сходится к нулю по мере Лебега, но не имеет поточечного предела ни в одной точке полуинтервала* $[0, 1)$*.*

Задача 86. *Сходится ли последовательность* x^n *а) почти всюду на полуинтервале* $[0,1)$*? б) по мере Лебега? в) по мере Лебега–Стилтьеса относительно функции* $-\ln(1-x)$*?*

Задача 87. *Сходится ли на* $\mathbb{R}^2$ *последовательность* $f_n(x,y) = \sin^n(x-y)$ *а) почти всюду, б) по мере Лебега?*

Задача 88. *Сходится ли на* $\mathbb{R}^2$ *последовательность* $f_n(x,y) = x+e^{-n|xy|}$ *а) почти всюду, б) по мере Лебега?*

Задача 89. *Сходится ли на* $\mathbb{R}^2$ *последовательность* $f_n(x,y) = e^{-n(x^4+y^4)}$ *а) почти всюду, б) по мере Лебега?*

Задача 90. *Доказать, что в случае пространства конечной меры сходимость последовательности функций по мере влечёт сходимость последовательности квадратов функций по мере к квадрату предела.*

Задача 91. *Вывести из результата предыдущей задачи, что в случае пространства конечной меры сходимость по мере сохраняется при почленном перемножении функциональных последовательностей.*

Задача 92. *Привести пример сходящейся по мере Лебега последовательности функций на* $\mathbb{R}$*, квадрат которой не сходится по мере к квадрату предела.*

Задача 93. *Доказать, что в случае пространства конечной меры сходимость по мере сохраняется при делении функций (когда знаменатели не обращаются в нуль).*

Задача 94. *Привести пример сходящейся по мере Лебега последовательности функций* f_n *на* $(0,+\infty)$ *такой, что* $1/f_n$ *не сходится по мере.*

ГЛАВА 8. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Функция называется простой, если она принимает конечное или счётное число значений. Пусть такая функция f принимает значение a_n на аргументах из множества A_n, $\bigsqcup\limits_n A_n = X$ (параметр n пробегает все натуральные значения или значения от 1 до некоторого N, и все A_n измеримы относительно некоторой меры μ, что, как легко видеть, равносильно измеримости самой функции f). Интеграл Лебега от функции f по мере μ по множеству X определяется как

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_n a_n \mu(A_n),$$

при этом функция называется интегрируемой по Лебегу, если данный ряд сходится абсолютно (иначе перенумерация множеств и значений в описании функции приводила бы к изменению суммы и, следовательно, интеграла). В случае двумерного или трёхмерного пространства X ставим соответственно значок двойного или тройного интеграла.

Задача 95. *Вычислить интегралы ($[x]$ — целая часть x):*

а) $\int\limits_{-3}^{3} \operatorname{sign}\cos(\pi x)\, d\mu_F(x) \quad (F(x) = x^2)$;

б) $\int\limits_{(0,1]} \operatorname{sign}\sin\dfrac{\pi}{x}\, d\mu_L(x)$;

в) $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{1}{[x+1][x+2]}\, d\mu_L(x)$;

г) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-[x]} d\mu_L(x)$;

д) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-[x]} d\mu_F(x) \quad (F(x) = -e^{-x})$;

е) $\iint\limits_{[0,2]\times[0,2]} [x+y]\, d\mu_L^2(x,y)$.

Задача 96. *Вычислить интегралы ($[x]$ — целая часть x):*

а) $\int\limits_{-3}^{3} \operatorname{sign}\sin(\pi x)\, d\mu_F(x) \quad (F(x) = x^3)$;

б) $\int\limits_{(0,2]} \operatorname{sign}\cos\dfrac{\pi}{x}\, d\mu_L(x)$;

в) $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{1}{[x+1][x+3]}\, d\mu_L(x)$;

г) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-[x]} d\mu_F(x) \quad (F(x) = [x])$;

д) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2[x]} d\mu_F(x) \quad (F(x) = e^x)$;

е) $\iint\limits_{[0,3]\times[0,3]} [x-y]\, d\mu_L^2(x,y)$;

ж) $\iiint\limits_{[0,1]^3} [x+y+z]\, d\mu_L^3(x,y,z)$.

Пусть $\mu(X) < +\infty$. Произвольная измеримая функция называется интегрируемой, если найдётся равномерно сходящаяся к ней последовательность интегрируемых простых функций. Интегралом Лебега такой произвольной измеримой функции будет называться предел интегралов приближающих её простых функций (можно показать, что этот предел существует и не зависит от выбора приближающей последовательности). Класс интегрируемых функций обозначается $L(X, d\mu)$. Основные свойства интеграла Лебега (линейность, аддитивность, сохранение неравенства между функциями, неравенство $|\int f| \leq \int |f|$) аналогичны свойствам интеграла Римана. Есть и специфические свойства: интеграл по множеству меры нуль всегда равен нулю (как следствие, изменение подынтегральной функции на множестве меры нуль не влияет на интеграл), всякая измеримая ограниченная функция интегрируема.

Для случая сигма–конечной меры вводится понятие исчерпания множества X (это последовательность множеств X_n таких, что $\bigcup\limits_n X_n = X$, $\forall n\ X_n \subset X_{n+1}$ и $\mu(X_n) < \infty$). Функция f считается интегрируемой по

Лебегу, если для всякого исчерпания предел её интегралов по X_n существует и одинаков для всех исчерпаний. В отличие от несобственного интеграла Римана, интегрируемость по Лебегу измеримой функции f равносильна интегрируемости её модуля. Свойства интеграла Лебега в основном переносятся с конечного на сигма–конечный случай (теряется только интегрируемость ограниченной функции).

Если функция интегрируема по Риману на отрезке, то она на нём интегрируема и по Лебегу (имеется в виду интеграл по мере Лебега), и значения двух интегралов совпадают. Если функция интегрируема по Риману на любом отрезке из данного луча, то существование интеграла Лебега по этому лучу равносильно абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана на этом луче, и в случае сходимости значение двух интегралов совпадает. Такая же ситуация имеет место и для интегралов с конечной особенностью.

Задача 97. *Вычислить интегралы ($\eta(x)$ — функция Хэвисайда, равная единице на луче* $(0, +\infty)$ *и нулю вне его):*

а) $\int\limits_{-10}^{25} e^{\sqrt{x^2+1}} d\mu_\eta(x)$;

б) $\int\limits_{-2}^{4} \dfrac{d\mu_F(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad (F(x) = 2x + \eta(x))$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\, d\mu_F(x)$ $\quad (F(x) = x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta(x-k))$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} d\mu_F(x)$ $\quad (F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\eta(x-k))$.

Задача 98. *Вычислить интегралы ($\eta(x)$ — функция Хэвисайда):*

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\sqrt{x^2+1}} d\mu_F(x)$ $\quad (F(x) = 3x + 4\eta(x-1) + 5\eta(x+1))$;

б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{d\mu_F(x)}{x^3}$ $\quad (F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\eta(x-k))$.

Задача 99. *При каких α существуют интегралы ($\eta(x)$ — функция Хэвисайда):*

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, d\mu_L(x)$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \cos(\pi x)\, d\mu_F(x) \quad (F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\alpha \eta(x-k))$.

Задача 100. *При каких α существуют интегралы*

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\, d\mu_L(x)}{(x^3-2x^2+x)^\alpha}$;

б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(x^\alpha)}{x^{2\alpha}}\, d\mu_L(x)$.

ГЛАВА 9. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА. СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ

Фиксируем $p \geq 1$ и рассмотрим линейное пространство измеримых на X функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Такое пространство называется пространством Лебега с показателем p и обозначается $L^p(X,\, d\mu)$ (строго говоря, элементами пространства являются не функции, а их классы эквивалентности по отношению равенства почти всюду — иначе не выполнится одна из аксиом нормы). В таких пространствах можно рассматривать сходимость по норме ($f_n \to f, n \to \infty$ в $L^p(X,\, d\mu)$, если $\|f_n - f\|_p \to 0, n \to \infty$). При $p = 1$ такую сходимость называют сходимостью в среднем, $p = 2$ — сходимостью в среднем квадратичном.

Теорема. *Если у функциональной последовательности существуют и предел почти всюду, и предел в $L^p(X,\, d\mu)$, то эти пределы равны.*

Таким образом, если последовательность сходится почти всюду к f, то для исследования сходимости в среднем достаточно проверить, сходится ли она к f в среднем. Здесь и далее за $\chi_A(x)$ обозначаем индикатор множества A.

Задача 101. *Пусть* $f_n(x) = n\chi_{[0,1/n]}(x)$, $x \in [0,1]$. *Сходится ли такая последовательность а) по мере Лебега? б) в среднем относительно меры Лебега? в) в среднем относительно меры Лебега–Стилтьеса для функции* $F(x) = x^2$*? г) в среднем относительно меры Лебега–Стилтьеса для функции* $F(x) = e^x$*?*

Задача 102. *Пусть* $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$, $x \in [0,+\infty)$. *Сходится ли такая последовательность а) по мере Лебега? б) в среднем относительно меры Лебега? в) в среднем относительно меры Лебега–Стилтьеса для функции* $F(x) = x^2$*? г) в среднем относительно меры Лебега–Стилтьеса для функции* $F(x) = -e^{-x}$*?*

Задача 103. *Для каких* p *функция* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{[0,1/n]}(x)$ *принадлежит* $L^p([0,1],\, d\mu_F)$, $F(x) = x^2$*?*

Задача 104. *Пусть* $f_n(x) = n\chi_{[0,1/n]}(x)$. *Для каких* p *такая последовательность сходится в* $L^p([0,1],\, d\mu_F)$, $F(x) = x^2$*?*

Задача 105. *Доказать неравенство Чебышева: если* $f(x) \geq 0$ *почти всюду на* X, *то*

$$\forall c > 0 \ \mu\{x \mid f(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int\limits_X f(x)\, d\mu(x).$$

(указание: расписать данный интеграл по аддитивности, выделив множество под знаком меры)

Задача 106. *Доказать с помощью неравенства Чебышева, что если* $f(x) \geq 0$ *почти всюду на* X*, то равенство* $\int\limits_X f(x)\,d\mu(x) = 0$*, влечёт равенство* $f(x) = 0$ *почти всюду на* X*.*

(указание: $\{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) > 1/n\}$)

Задача 107. *Доказать с помощью неравенства Чебышева, что сходимость в среднем влечёт сходимость по мере.*

При работе с пространствами Лебега полезны неравенство Гёльдера:

$$\left| \int\limits_X f(x) g(x)\,d\mu(x) \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad 1/p + 1/q = 1,\ p, q > 1,$$

и неравенство Минковского: $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad p \geq 1.$

Задача 108. *Вывести из неравенства Гёльдера неравенство Минковского.*

(указание: представить интеграл $\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\,d\mu(x)$ в виде $\int\limits_X |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)|\,d\mu(x)$, разбить на два интеграла и применить неравенство Гёльдера)

Задача 109. *Говорят, что нормированное пространство* Y *топологически вложено в нормированное пространство* Z*, если* $Y \subset Z$ *и существует* C *такое, что* $\forall f \in Y\ \|f\|_Z \leq C\|f\|_Y$*. Доказать, что для пространств конечной меры* $L^p(X,\,d\mu)$ *топологически вложено в* $L^r(X,\,d\mu)$ *при* $p \geq r$*.*

(указание: применить к норме неравенство Гёльдера, положив один из множителей равным единице)

Задача 110. *Построить пример функции, принадлежащей* $L^p((0,1),\,d\mu_L)$ *и не принадлежащей* $L^r((0,1),\,d\mu_L)$ *при любом* $r > p$*.*

Задача 111. *Построить пример функции, принадлежащей* $L^p((0, +\infty),\, d\mu_L)$ *и не принадлежащей* $L^r((0, +\infty),\, d\mu_L), r \neq p$.

В некоторых задачах этой и предыдущих глав мы рассматривали взаимосвязь различных видов сходимостей. Подведём итог. В случае пространства конечной меры из равномерной сходимости следуют сходимости почти всюду и в $L^p(X,\, d\mu)$, а из каждой сходимости из этой пары следует сходимость по мере. Сходимость по мере или в $L^p(X,\, d\mu)$ не влечёт сходимость почти всюду (пример — "бегунок" из задачи 85), сходимость почти всюду или по мере не влечёт сходимость в $L^p(X,\, d\mu)$ (пример в задаче 101). В случае сигма-конечной меры остаются только импликации "из равномерной сходимости следует сходимость почти всюду и по мере" и "из сходимости в $L^p(X,\, d\mu)$ следует сходимость по мере".

Задача 112. *Построить а) пример функциональной последовательности на* $(0, +\infty)$*, которая сходится равномерно, но не сходится в* $L^p((0, +\infty),\, d\mu_L)$ *ни для какого* $p \geq 1$*, б) пример функциональной последовательности на* $(0, +\infty)$*, которая сходится почти всюду относительно меры Лебега, но не сходится по мере Лебега.*

ГЛАВА 10. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

Теорема (Лебега о мажорируемой сходимости)**.** *Если последовательность интегрируемых функций* $f_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *почти всюду на* X *и существует функция* $\varphi \in L(X,\, d\mu) : \forall n$ *почти всюду на* X

верно $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ *(т.е.* φ *мажорирует* f_n *на* X*), то*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_X f(x)\,d\mu(x).$$

Теорема (Беппо Леви о монотонной сходимости)**.** *Если последовательность интегрируемых функций* $f_n(x)$ *монотонно неубывает (по* n *при любом фиксированном* $x \in X$*) и интегралы* f_n *равномерно ограничены* $\left(\int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x) \le M\right)$*, то* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *почти всюду на* X *конечен,* $f \in L(X,\,d\mu)$ *и*

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x) = \int\limits_X f(x)\,d\mu(x).$$

Теорема (Фату)**.** *Если последовательность интегрируемых функций* $f_n(x) \ge 0$ *сходится к* $f(x)$ *почти всюду на* X *и интегралы* f_n *равномерно ограничены* $\left(\int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x) \le M\right)$*, то* $f \in L(X,\,d\mu)$ *и* $\int\limits_X f(x)\,d\mu(x) \le M$*.*

Для конкретных вычислительных примеров обычно применяется теорема Лебега. Две другие теоремы часто используются при доказательстве теоретических утверждений. Будем везде далее вместо $d\mu_L(x)$ писать просто dx.

Задача 113. *Доказать с помощью теоремы Фату теорему из прошлой главы о равенстве предела почти всюду и предела в* $L^p(X,\,d\mu)$*.*

Задача 114. *Найти предел (двумя способами — по теореме Лебега и сведением к интегралу Эйлера–Пуассона):* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} e^{-nx^2}dx$*.*

Задача 115. *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^{+\infty} n \sin \dfrac{1}{1+n^2x^4}\,dx$*.*

(указание: оценить синус своим аргументом и применить неравенство $1 + n^2x^4 \ge 2nx^2$)

Задача 116. *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{n}{1+x^4}\,\sin\dfrac{x}{n}\,dx.$

Задача 117. *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x/n)^n x^{1/n}}$

(указание: нужна разная мажоранта для $(0,1)$ и $[1,+\infty)$)

Теоремы о предельном переходе, конечно, верны и для случая непрерывного изменения параметра.

Задача 118. *Найти* $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2}\cos tx\,dx.$

Задача 119. *Найти* $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{1-\cos tx}{t^2}\,e^{-x}dx.$

Задача 120. *Найти* $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x \operatorname{arctg}(t^2x)\,dx.$

Задача 121. *Найти* $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{0}^{\pi} e^{\sin^t x}dx.$

Задача 122. *Найти* $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos x \operatorname{arcctg}(tx)\,dx.$

Справедлива следующая теорема о дифференцировании по параметру под знаком интеграла Лебега:

Теорема. *Если для почти всех* $x\in X$ *и* $\forall y\in U(y_0)$ $\exists f'_y(x,y)$, *мажорируемая по модулю интегрируемой функцией* $g(x)$, *то* $\exists \left(\int\limits_X f(x,y)\,dx\right)'_{y=y_0} = \int\limits_X f'_{y=y_0}(x,y)\,dx.$

Задача 123. *Доказать сформулированную выше теорему.*

(указание: расписав определение производной, использовать теорему Лагранжа и применить теорему Лебега)

Задача 124. *Найти* $\left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-px}}{x}\,dx\right)'_p$, $p > 0$.

Задача 125. *Можно ли применять дифференцирование по параметру для нахождения* $F'(y)$, *где* $F(y) = \int\limits_0^1 K(xy)\,dx$, $0 \le y \le 1$? *Чему на самом деле равна* $F'(y)$?

ГЛАВА 11. ДВОЙНОЙ И ПОВТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Теорема (Фубини для меры Лебега)**.** *Если существует хотя бы один из интегралов* $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dx\,dy$, $\int\limits_{\mathbb{R}} dx \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dy$, $\int\limits_{\mathbb{R}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx$, *где* $dxdy = d\mu_L^2(x,y)$, $dx = d\mu_L(x)$, $dy = d\mu_L(y)$, *то существуют и равны друг другу интегралы* $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$, $\int\limits_{\mathbb{R}} dx \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$, $\int\limits_{\mathbb{R}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$ *(при этом существование повторного интеграла подразумевает существование внутреннего почти всюду).*

Домножая функцию на индикатор подмножества плоскости, можно получать равенства интегралов по соответствующим множествам.

Задача 126. *Доказать, что у функции* $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ *на* $[-1,1]^2$ *существуют повторные интегралы, но не существует двойного.*

(указание: двойной интеграл Лебега можно сравнить с интегралом Римана, который имеет особенность в нуле и не обладает абсолютной сходимостью)

Задача 127. *Пусть* $f(x,y) = 2^{2n}$ *при* $1/2^n \le x \le 1/2^{n-1}$, $\quad 1/2^n \le y < 1/2^{n-1}$; $f(x,y) = -2^{2n+1}$ *при* $1/2^{n+1} \le x \le 1/2^n$, $\quad 1/2^n \le y < 1/2^{n-1}$; *и* $f(x,y) = 0$ *во всех остальных случаях (см.рис.3).*

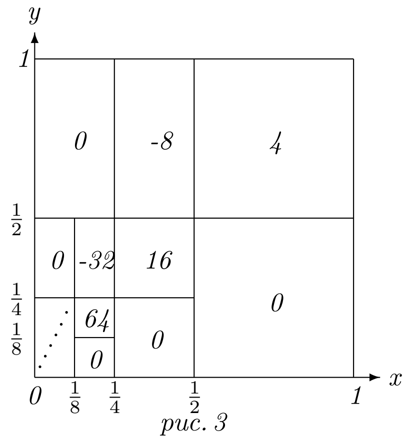

рис. 3

Убедиться, что у этой функции повторные интегралы на $[0,1]^2$ *различны.*

В следующих задачах этого раздела необходимо провести и обосновать смену порядка интегрирования.

Задача 128. *Найти* $\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\,dy}{x^4+y^4}$.

Задача 129. *Найти* $\int\limits_{\mathbb{R}} dy \int\limits_0^{+\infty} xe^{-(x^4+1)^2y^2}dx.$

(указание: использовать интеграл Эйлера–Пуассона $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$)

Задача 130. *Найти* $\int\limits_{\mathbb{R}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+1)^4y^2}dx.$

(указание: $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ можно найти, интегрируя по частям $\int \frac{dx}{x^2+1}$)

Задача 131. *Найти* $\int\limits_{\mathbb{R}} dy \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-y^2/x}}{x+x^2}dx.$

Задача 132. *Найти* $\int\limits_{\mathbb{R}} dy \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+1)^3y^2}dx.$

ГЛАВА 12. КЛАССЫ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

Функцией скачков называется функция вида $H(x) = \sum\limits_{n\colon x_n<x} g_n + \sum\limits_{n\colon y_n\le x} h_n$ ($n \in \mathbb{N}$, где (x_n), (g_n), (y_n), (h_n) — конечные или бесконечные числовые последовательности, а ряды $\sum\limits_n g_n$ и $\sum\limits_n h_n$ абсолютно сходятся).

Задача 133. *Доказать, что первое слагаемое в определении $H(x)$ непрерывно слева, а второе — справа.*

Задача 134. *Показать, что производная функции скачков равна нулю почти всюду.*

(указание: см. №1 из списка литературы, гл.VI, §1, т-ма 2)

Функция f на отрезке $[a, b]$ называется функцией ограниченной вариации, если величина $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ ограничена равномерно по всем разбиениям $a = x_0 < x_1 < \ldots < b = x_n$ отрезка $[a, b]$. Точная верхняя грань такой величины называется вариацией функции f на $[a, b]$ (обозначается $V_a^b(f)$, сам класс функций ограниченной вариации обозначается $BV[a, b]$). Вариация аддитивна относительно отрезка. Критерием ограниченности вариации функции на отрезке является возможность представить эту функцию в виде разности двух неубывающих функций. Функцию, заданную на луче или всей числовой прямой, будем считать функцией ограниченной вариации, если она является таковой на каждом отрезке внутри своей области определения.

Задача 135. *Доказать ограниченность функций класса $BV[a, b]$.*

Задача 136. *Доказать, что класс $BV[a, b]$ замкнут относительно операций сложения и умножения функций.*

Задача 137. *Какова вариация функции* $\{x\}$ *(дробная часть* x*) на отрезке* $[0,2]$*?*

Задача 138. *Какова вариация функции* $\{x\} + \{1-2x\}$ *на отрезке* $[-1,1]$*?*

Функция f на отрезке $[a,b]$ называется абсолютно непрерывной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty}|f(b_n) - f(a_n)| < \varepsilon$$

(здесь $a_n \le b_n,\ (a_n, b_n)$ — непересекающиеся интервалы, лежащие внутри отрезка $[a,b]$). Если выбрать все интервалы, кроме первого, вырожденными ($a_n = b_n$, $n \ge 2$), получим определение равномерной непрерывности. Таким образом, абсолютная непрерывность — усиление равномерной. Класс абсолютно непрерывных функций обозначается $AC[a,b]$.

Всякая функция ограниченной вариации разлагается на сумму 3-х компонент: функции скачков, абсолютно непрерывной и сингулярной (т.е. непрерывной функции с нулевой производной почти всюду относительно меры Лебега; нетривиальным примером такой функции является канторова лестница). Это разложение единственно с точностью до прибавления константы к компонентам.

Задача 139. *Доказать, что класс* $AC[a,b]$ *замкнут относительно операций сложения и умножения функций.*

Задача 140. *Доказать, что канторова лестница не является абсолютно непрерывной функцией.*

Задача 141. *Говорят, что функция* f *принадлежит классу Липшица* Lip *на данном множестве, если* $\exists M : \ |f(x) - f(y)| \le |x - y|$ *для всех* *пар элементов x, y этого множества. Доказать вложения*

$$C^1 \subset \mathrm{Lip} \subset AC \subset BV$$

(для функций на отрезке).

Задача 142. *Каким классам (из 4-х в предыдущей задаче) принадлежат функции*

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$,

б) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1], f(0) = 0$,

в) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1],\ f(0) = 0$*?*

ГЛАВА 13. ЗАРЯДЫ. ТЕОРЕМА РАДОНА–НИКОДИМА. РАЗЛОЖЕНИЯ ХАНА И ЖОРДАНА

Зарядом называется сигма–аддитивная функция множества. Отличие от меры в том, что заряд может иметь отрицательный знак. Будем рассматривать заряды, определённые на некоторой сигма–алгебре. Понятия непрерывности снизу и сверху (см. главу 5) переносятся на с мер на заряды.

Заряд на числовой прямой строится по непрерывной слева функции ограниченной вариации (в то время как мера — по непрерывной слева неубывающей): если $f = u - v$ (u, v не убывают и непрерывны слева), то $\nu_f = \mu_u - \mu_v$. Докажем корректность построения: если $f = u - v = g - h$, то $u + h = g + v \Rightarrow \mu_u + \mu_h = \mu_g + \mu_v \Rightarrow \mu_u - \mu_v = \mu_g - \mu_h$.

Заряд ν называется а) сосредоточенным на данном множестве, если на любом множестве, не пересекающемся с данным, он равен нулю, б) дискретным, если он сосредоточен на конечном или счётном множестве, в) непрерывным, если он равен нулю на любом одноточечном множестве, г) абсолютно непрерывным относительно меры μ ($\nu << \mu$), если он равен нулю на всяком множестве μ–меры нуль, д) сингулярным относительно меры μ, если он сосредоточен на множестве μ–меры нуль (в последних двух случаях подразумевается, что заряд определён на той же сигма-алгебре, что и мера μ).

Между типами порождающих заряд функций и типами самих зарядов существуют естественные связи (например, абсолютно непрерывная функция порождает абсолютно непрерывный относительно меры Лебега заряд). Дискретный заряд порождается функцией скачков.

Теорема (Радона–Никодима)**.** *Если заряд ν абсолютно непрерывен относительно меры μ, то существует интегрируемая функция f такая, что для всякого множества A, на котором определены заряд и мера,*

$$\nu(A) = \int\limits_A f(x)\,d\mu(x).$$

Функция f называется плотностью заряда по мере и обозначается $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$.

Теорема. *Пусть F — абсолютно непрерывная функция, порождающая заряд Лебега–Стилтьеса ν_F. Тогда 1) Всякое измеримое по Лебегу множество измеримо и по Лебегу–Стилтьесу, 2) ν_F абсолютно непрерывен относительно μ_L, 3) для любого множества A, измеримого по Лебегу, $\nu_F(A) = \int\limits_A F'(x)\,d\mu_L(x)$.*

Таким образом, для абсолютно непрерывных функций $\dfrac{d\nu_F}{d\mu_L} = F'$.

Задача 143. *Найти плотность заряда Лебега–Стилтьеса, заданного функцией а) $F(x) = \arcsin(\sin x)$, б) $F(x) = \eta(x)\eta(2\pi - x)\sin x$, в) $F(x) = K(x)$, по мере Лебега ($\eta(x)$ — функция Хэвисайда).*

(указание: в пункте в) функция Кантора — не абсолютно непрерывна, и плотности Радона–Никодима не существует, что легко доказать и непосредственно)

Задача 144. *Найти плотность Радона–Никодима по мере Лебега для заряда, построенного по функции*

$$F(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \chi_{(0,1]}(x) + \frac{\pi x}{4}\,\chi_{(1,4]}(x) + \pi\,\chi_{(4,+\infty)}(x).$$

Множество A называют положительным относительно заряда ν, если $\forall B \subset A \quad \nu(B) \geq 0$ (если заряд определён на B). Аналогично определяется отрицательное множество. Оказывается, единицу X сигма–алгебры, на которой задан заряд, всегда можно разложить в объединение непересекающихся множеств X^+ и X^-, первое из которых положительно, а второе — отрицательно относительно данного заряда. Такое разложение носит имя Хана. С его помощью можно представить заряд в виде разности двух мер ($\nu(E) = \nu(E \cap X^+) - (-\nu(E \cap X^-))$), получив так называемое разложение Жордана. Заметим, что внутри положительного множества X^+ (т.е. $\forall E \subset X^+$) отрицательная компонента заряда равна нулю, и наоборот. Как мы увидим на примере ниже, разложение Хана может быть неоднозначным. Тем не менее, разложение Жордана однозначным будет, даже если строится разными способами (с помощью разных разложений Хана).

Как было отмечено в начале главы, на практике заряды на числовой прямой строятся по непрерывной слева функции ограниченной вариации. Разберём на примере, как по виду такой функции найти разложения Хана и Жордана для порожденного ею заряда. Пусть

$$F(x) = \chi_{(-\infty,0]}(x) + (2-x)\chi_{(0,2]}(x) + x^2\chi_{(2,4]}(x) + e^{-x}\chi_{(4,+\infty)}(x).$$

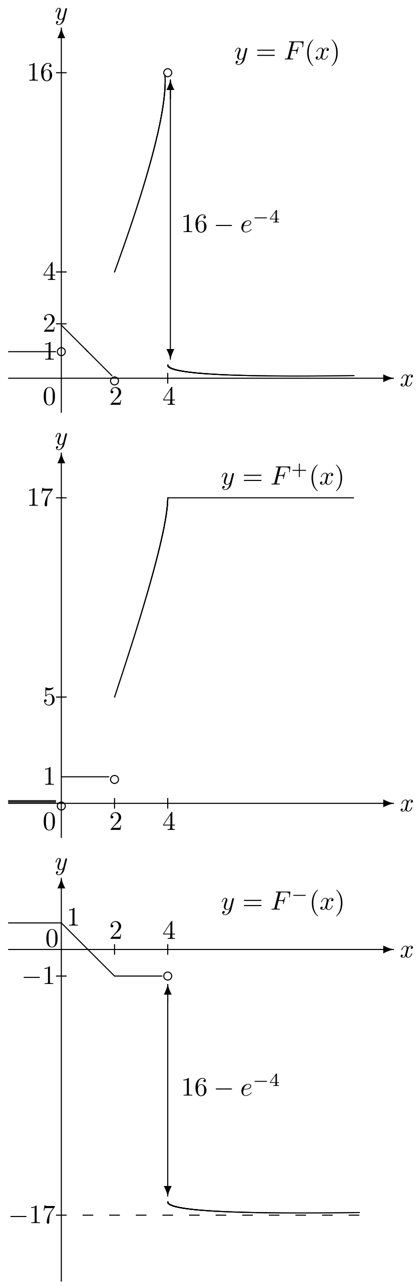

рис.4

Построив график, мы видим, что в нуле и в двойке функция имеет положительный скачок (скачком непрерывной слева функции f в точке x называется величина $f(x+0)-f(x)$), кроме того, на $(2,4)$ функция возрастает. Поэтому X^+ из разложения Хана содержит 0 и $[2,4)$. Напротив, в точке $x=4$ отрицательный скачок, на $(0,2)$ и на $(4,+\infty)$ функция убывает, поэтому X^- из разложения Хана содержит $(0,2)$ и $[4,+\infty)$. При этом отрицательную полуось, на которой функция постоянна, можно отнести к любому из множеств X^+ и X^- или произвольно разбить на части.

Функцию F^+, задающую положительную компоненту из разложения Жордана, следует задавать так, чтобы она "нейтрализовывала" исходную функцию на X^- и копировала её на X^+. Зададим её константой (например, нулём) на $(-\infty, 0)$, затем придадим скачок в нуле на единицу вверх, на $(0, 2)$ опять сохраним постоянной (равной единице), в точке 2 придадим скачок вверх на 4 — получается предел справа, равный 5. На $(2, 4)$ эта задающая положительную компоненту функция должна быть равна $1 + x^2$ — чтобы повторить x^2 из исходной функции (задать такой же заряд) и при этом иметь должный правосторонний предел в точке 2. Правее точки 4 вновь требуется константа — получается 17, чтобы не было разрыва при $x = 4$.

Задающую отрицательную компоненту заряда функцию можно построить аналогично или как разность найденной функции и исходной. При первом пути удобно строить её сначала с обратным знаком, то есть как функцию F^-, порождающую меру, взятую со знаком минус (тогда $F = F^+ + F^-$). На отрицательной полуоси мы должны положить эту функция постоянной и равной 1 (ведь первая компонента здесь равна нулю, а сумма — исходная функция — равна по условию 1). На $(0, 2)$ должен быть линейный спад под углом 90^o — получаем участок функции вида $1 - x$. Скачки пока нам встречаются положительные, учтённые в первой компоненте. На $(2, 4)$ в силу возрастания исходной функции ограничиваемся константой -1 (полученной ранее в точке $x = 2$). В точке $x = 4$ учитываем отрицательный скачок $e^{-4} - 16$, и далее до $+\infty$ спад по экспоненте, повторяя исходную функцию e^{-x}, но только смещая её по вертикали на нужную величину -17. Легко убедиться, что сумма полученных функций даёт исходную.

Задача 145. *Найти разложения Хана и Жордана для заряда, построенного по функции*

$$F(x) = 2\chi_{(-\infty,-1]}(x) + (2+x)\chi_{(-1,0]}(x) + (3-x^2)\chi_{(0,1]}(x) + \chi_{(1,+\infty)}(x).$$

Задача 146. *Найти разложения Хана и Жордана для заряда, построенного по функции*

$$F(x) = x \cdot \chi_{(-\infty,0]}(x) - \chi_{(0,1]}(x) + x \cdot \chi_{(1,3]}(x) + (3-x)\chi_{(3,+\infty)}(x).$$

Задача 147. *Найти разложения Хана и Жордана для заряда, построенного по функции*

$$F(x) = x^2 \cdot \chi_{(-\infty,-1]}(x) + 2\chi_{(-1,1]}(x) + x^2 \cdot \chi_{(1,+\infty)}(x).$$

Задача 148. *Найти разложения Хана и Жордана для заряда, построенного по функции* $\{x\}$ *(дробная часть* x*).*

ГЛАВА 14. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА–СТИЛТЬЕСА

По определению, интеграл Лебега–Стилтьеса по заряду равен разности интегралов по мерам–компонентам разложения Жордана этого заряда. Вместо $\int\limits_A f(x)\,d\nu_F(x)$ будем писать $\int\limits_A f(x)\,dF(x)$.

Теорема. *Для абсолютно непрерывной* F *и всякой измеримой по Лебегу функции* f *верна формула*

$$\int\limits_A f(x)\,dF(x) = \int\limits_A f(x)F'(x)\,dx$$

(оба интеграла существуют или не существуют одновременно).

Теорема. *Если g — непрерывная слева функция скачков: $g(x) = \sum\limits_{n\colon x_n<x} g_n$, то для всякой функции f*

$$\int\limits_A f(x)\,dg(x) = \sum_{n\colon x_n\in A} f(x_n)g_n$$

(существование интеграла равносильно абсолютной сходимости ряда).

Произвольную функцию, порождающую заряд, можно разбивать на 3 компоненты (см. главу 12), и интегралы по скачковой и абсолютно непрерывной компонентам считать с помощью этих теорем. При вычитании скачковой компоненты производная почти всюду не меняется, поэтому при вычислении интеграла по абсолютно непрерывной компоненте можно использовать производную исходной функции.

Задача 149. *Найти* $\int\limits_0^7 e^{2x}\,dF(x)$*, где*

$$F(x) = x^2\cdot\chi_{[0,\pi]}(x) + \cos x\cdot\chi_{(\pi,2\pi]}(x) + 2^{-x}\cdot\chi_{(2\pi,7]}(x).$$

Задача 150. *Найти* $\int\limits_0^2 \operatorname{arctg} x\,dF(x)$*, где*

$$F(x) = -x\cdot\chi_{[0,1]}(x) + x^2\cdot\chi_{(1,\sqrt{3}]}(x) - \chi_{(\sqrt{3},2]}(x).$$

Задача 151. *Найти* $\int\limits_0^5 x^2\,dF(x)$*, где*

$$F(x) = \cos x\cdot\chi_{[0,\pi/2]}(x) + 2\chi_{(\pi/2,\,3]}(x) + 3^{-x}\cdot\chi_{(3,5]}(x).$$

Задача 152. *Найти* $\int\limits_0^8 e^{3x}\,dF(x)$*, где*

$$F(x) = x^2\cdot\chi_{[0,\pi]}(x) - \cos x\cdot\chi_{(\pi,2\pi]}(x) + e^{-x}\cdot\chi_{(2\pi,8]}(x).$$

В качестве примера вычисления интеграла Лебега–Стилтьеса по мере, порождённой сингулярной компонентой, рассмотрим меры, связанные с функцией Кантора:

Задача 153. *Найти интегралы а)* $\int\limits_0^1 x dK(x)$, *б)* $\int\limits_0^1 K(x)\, dK(x)$, *в)* $\int\limits_0^1 K^2(x)\, dK(x)$, *г)* $\int\limits_0^1 K(x) dK^2(x)$, *д)* $\int\limits_0^1 K\left(\dfrac{x}{2}\right) dK(x)$.

(указание: применить формулы самоподобия функции Кантора из главы 1)

Литература

Основная литература:

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, 572 с.

2. *Богачёв В. И., Смолянов О. Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2009, 724 с.

3. *Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П.* Методы решения задач по функциональному анализу. М.: Либроком, 2012, 482 с.

Дополнительная литература:

4. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988, 400 с.

5. *Халмош П.* Теория меры. М.: Факториал Пресс, 2003, 256 с.