

## §4. Часть 2. Измеримость функций и предельный переход.

Напомним, что мы рассматриваем скалярные функции нескольких переменных и называем их измеримыми, если прообраз по этим функциям любого борелевского множества измерим, т.е. принадлежит некоторой заранее оговорённой сигма-алгебре. Чаще всего это борелевская сигма-алгебра или сигма-алгебра измеримых по Лебегу множеств, таким образом, борелевские или измеримые по Лебегу функции являются частным случаем общего понятия измеримости, и доказываемые нами свойства оказываются справедливыми и для этих наиболее важных для нас классов функций. В первой части мы доказали, что вместо проверки прообраза произвольного борелевского множества для установления измеримости функции  $f(x)$  достаточно проверить на измеримость прообразы лучей, например, вида  $(-\infty, c)$ , то есть множества  $\{x \mid -\infty < f(x) < c\}$  для всевозможных  $c \in \mathbb{R}$ . С помощью этой модификации определения измеримости мы доказали, что арифметические операции сохраняют измеримость, т.е. сумма, произведение и частное измеримых функций измеримы. Теперь сделаем то же для основной операции анализа — предельного перехода. Сначала установим более общий факт об измеримости верхнего и нижнего пределов.

**Теорема.** Пусть функции  $f_n : X_n \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы. Тогда функции  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  измеримы.

◀ Пусть сначала все функции  $f_n(x)$  определены на общем множестве  $X$ . Рассмотрим верхний предел, измеримость нижнего доказывается аналогично. Напомним, что верхний предел по определению есть максимум множества частичных пределов последовательности. Верхний предел последовательности будет меньше некоторой константы  $c$  тогда и только тогда, для некоторого  $k \in \mathbb{N}$  все члены последовательности, начиная с некоторого, лежат левее, чем  $c - \frac{1}{k}$ :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < c \iff \exists k, N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ f_n(x) < c - \frac{1}{k}. \quad (1)$$

Действительно, если правая часть верна, то все частичные пределы не превосходят  $c - \frac{1}{k}$  (предельный переход в неравенстве), в том числе и максимальный из них — верхний предел, т.е. он меньше  $c$ . А если правая часть неверна, то для всякого  $k \in \mathbb{N}$  бесконечное число членов последовательности  $f_n(x)$  не меньше, чем  $c - \frac{1}{k}$ , а значит, существует частичный предел, больший либо равный  $c - \frac{1}{k}$ , тогда и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq c - \frac{1}{k}$ , и в силу произвольности  $k$   $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq c$ . Итак, (1) доказано.

Используя (здесь и далее) принципы соответствия квантора существования операции объединения, а квантора всеобщности — операции пересечения:

$$\boxed{\exists k : x \in A_k \iff x \in \bigcup_k A_k, \quad \forall k : x \in A_k \iff x \in \bigcap_k A_k,}$$

запишем (1) в терминах множеств:

$$A_c := \left\{ x \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < c \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \left\{ x \mid f_n(x) < c - \frac{1}{k} \right\}.$$

Поскольку по условию все множества в правой части измеримы, то измеримы для всякого  $c$  и множества  $A_c$ . Однако это не даёт ещё измеримость функции  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , поскольку верхний предел может принимать и бесконечные значения, т.е. в  $A_c$  включены и те  $x$ , для которых  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -\infty$ . Чтобы их исключить, заметим, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -\infty \iff \forall k \in \mathbb{N} \ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < -k$ , и, вновь пользуясь принципами в рамочке, получаем

$$\left\{ x \mid -\infty < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < c \right\} = A_c \setminus \left\{ x \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = -\infty \right\} = A_c \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{-k}.$$

Снова все элементы в правой части измеримы, значит, измерима и левая часть, откуда получаем измеримость функции  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Распространим полученный результат на общий случай, когда у каждой функции  $f_n(x)$  своя область определения  $X_n$ . Для того, чтобы рассматривать  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы для  $x$  было определено бесконечное число членов последовательности  $f_n(x)$ , т.е. чтобы  $x$  принадлежал бесконечному числу  $X_n$ . Это так, если и только если  $\forall k \in \mathbb{N} \exists n > k : x \in X_n$  (этот факт следует из перехода к отрицаниям: подмножество натуральных чисел конечно, если и только если оно ограничено; в частности,  $x$  принадлежит конечному числу  $X_n$ , если только если  $\exists k \in \mathbb{N} : \forall n > k \ x \notin X_n$ ). Таким образом, верхний и нижний пределы определены на множестве  $X = \bigcap_k \bigcup_{n>k} X_n$ , измеримом в силу измеримости всех  $X_n$  (каждое из них — прообраз  $\mathbb{R}$  относительно  $f_n(x)$ ), и мы должны в рассуждениях выше просто пересечь все рассматриваемые множества с этим  $X$ , что не нарушит измеримости. ►

**Следствие.** *Предел последовательности измеримых функций измерим.*

Действительно, существование обычного предела равносильно равенству верхнего и нижнего пределов, поэтому

$$\left\{ x \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in (-\infty, c) \right\} = \left\{ x \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \right\} \cap \left\{ x \mid -\infty < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) < c \right\},$$

и оба множества справа от знака равенства измеримы (первое — как прообраз нуля по разности измеримых функций, которая тоже измерима), откуда и множество слева измеримо для всякого  $c$ , что даёт измеримость функции  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

**Определение.** *Говорят, что функции  $f$  и  $g$  равны почти всюду на  $X$  относительно меры  $\mu$ , если  $f(x) = g(x) \ \forall x \in X \setminus X_0$ , где  $\mu(X_0) = 0$ . Обозначение:  $f \stackrel{n.б.}{=} g$ .*

**Утверждение.** *Пусть  $f \stackrel{n.б.}{=} g$ ,  $g$  измерима и мера  $\mu$  полная. Тогда  $f$  измерима.*

◀ Обозначим  $F := \{x \mid f(x) < c\}$ ,  $G := \{x \mid g(x) < c\}$  и запишем соотношение

$$F = (F \setminus G) \cup (F \cap G) = (F \setminus G) \cup (G \setminus (G \setminus F)).$$

Множество  $G$  измеримо по условию, а множества  $G \setminus F$  и  $F \setminus G$  измеримы благодаря полноте меры как подмножества  $X_0$  — множества меры нуль, где  $f$  и  $g$  не совпадают. Итак,  $F$  выражено через измеримые множества, поэтому  $F$  измеримо, значит, функция  $f$  измерима. ►

**Определение.** *Говорят, что функциональная последовательность  $f_n(x)$  сходится к функции  $f(x)$  почти всюду на  $X$  относительно меры  $\mu$ , если  $f_n(x) \rightarrow f(x) \ \forall x \in X \setminus X_0$ , где  $\mu(X_0) = 0$ . Обозначение:  $f_n \xrightarrow{n.б.} f$ .*

**Следствие.** *Пусть  $f_n \xrightarrow{n.б.} f$ ,  $f_n$  измеримы и мера  $\mu$  полная. Тогда  $f$  измерима.*

Действительно, обозначим  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , тогда условие сходимости почти всюду означает, что  $f \stackrel{n.б.}{=} g$ , и по измеримости предела и предыдущему утверждению  $f$  измерима.

**Теорема** (Д.Ф. Егоров). *Пусть  $\mu$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на множестве  $E$ . Пусть  $f_n \rightarrow f(x) \ \forall x \in E$  и пусть функции  $f_n$  измеримы. Тогда  $\forall \delta > 0 \exists E_\delta \subset E : 1) \ \mu(E) - \mu(E_\delta) < \delta$ , 2)  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E_\delta$ .*

◀ Запишем определение предела

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in E \ \exists N : \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поскольку в нём достаточно рассматривать сколь угодно малые  $\varepsilon$ , его можно переписать с заменой  $\varepsilon$  на  $\frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad \exists N : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}.$$

При фиксированном  $m$  введём множества:

$$E_N^m := \left\{ x \mid \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\} = \bigcap_{n=N+1}^{\infty} \left\{ x \mid -\frac{1}{m} < f_n(x) - f(x) < \frac{1}{m} \right\}.$$

Предыдущее высказывание (переписанное определение предела) означает, что для всякого  $m$  множество  $E$  записывается в виде  $E = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N^m$ . Заметим, что  $E_1^m \subset E_2^m \subset \dots \subset E_N^m \subset E_{N+1}^m \subset \dots$ .

Представление  $E_N^m$  в виде счётного пересечения означает его измеримость (из-за измеримости разности измеримых функций  $f_n$  и  $f$ ). По непрерывности меры снизу

$$\mu(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(E_N^m) \implies \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists N_m : \mu(E \setminus E_{N_m}^m) = \mu(E) - \mu(E_{N_m}^m) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Построим множество  $E_\delta := \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{N_m}^m$ . Тогда справедливо первое утверждение теоремы:

$$\mu(E) - \mu(E_\delta) = \mu\left(\overline{\bigcap_{m=1}^{\infty} E_{N_m}^m}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{E_{N_m}^m}\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} (\mu(E \setminus E_{N_m}^m)) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

Для доказательства второго утверждения запишем, что

$$x \in E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{N_m}^m \iff \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_m \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}.$$

Высказывание после знака эквивалентности — это и есть определение равномерной сходимости на  $E_\delta$  с заменой  $\varepsilon$  на  $\frac{1}{m}$ . ►

**Замечание.** Теорема Егорова остаётся справедливой для случая сходимости почти всюду на  $E$ , т.е. сходимости на множестве  $E \setminus E_0$ ,  $\mu(E_0) = 0$ . Для доказательства нужно применить доказанный вариант к множеству  $E \setminus E_0$  вместо  $E$ . Получим, что  $\forall \delta > 0 \quad \exists E_\delta \subset E \setminus E_0 \subset E$  : 1)  $\mu(E \setminus E_0) - \mu(E_\delta) = \mu(E) - \mu(E_\delta) < \delta$ , 2)  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E_\delta$ , т.е. те же утверждения теоремы.

Последнюю теорему, также принадлежащую российскому учёному, мы приведём без доказательства.

**Теорема (Н.Н. Лузин).** Функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  измерима по Лебегу, если и только если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in C[a, b] : \mu_L\{x \mid f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Эта теорема демонстрирует, что измеримость функции по Лебегу — не столь уж слабое требование, как могло показаться исходя из того, что все привычные нам функции являются таковыми, а пример неизмеримой функции приходится строить специально и с использованием аксиомы выбора. Результат же Лузина (его также называют С-свойством) показывает, что измеримые по Лебегу функции — это чуть-чуть (на множестве сколь угодно малой меры) изменённые непрерывные.