§7. Интеграл Лебега от произвольных функций.

По-прежнему на некоторой сигма-алгебре подмножеств X (называемых измеримыми) определена сигма-аддитивная полная мера μ. В этом параграфе мы дадим определение и изучим основные свойства интеграла Лебега от произвольной функции, заданной на X. Сначала рассмотрим случай пространства конечной меры.

Определение 1. *Пусть $\mu(X) < +\infty$. Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют интегрируемой по Лебегу на множестве X по мере μ (пишут $f \in L(X,\, d\mu)$ или просто $f \in L(X)$), если $\exists f_n :\ f_n \rightrightarrows f$ на X, где f_n — интегрируемые простые функции. При этом интеграл Лебега функции f определяется как*

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu.$$

Замечание 1. *Интегрируемой по Лебегу может быть только измеримая функция, т. к. f измерима как предел измеримых f_n.*

Утверждение 1. *Определение 1 корректно.*

◀ 1) Первым делом установим существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu$ для любой последовательности f_n из определения 1. Сделаем это с помощью критерия Коши: из равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N :\ \forall m, n > N\ \ |f_n - f_m| < \varepsilon$ на X, и по свойствам интеграла Лебега для простых функций $\forall n > N$

$$\left|\int\limits_X f_n(x)\, d\mu - \int\limits_X f_m(x)\, d\mu\right| = \left|\int\limits_X (f_n(x) - f_m(x))\, d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f_n(x) - f_m(x)|\, d\mu \leqslant \int\limits_X \varepsilon\, d\mu = \varepsilon\mu(X),$$

то есть последовательность интегралов f_n фундаментальна, а значит, сходится. Отметим, что уже здесь важна конечность меры множества X.

2) Но не могут ли пределы интегралов оказаться разными для разных приближающих функцию f последовательностей? Ведь в этом случае определение 1 потеряет смысл: непонятно будет, какой из пределов следует взять в качестве $\int\limits_X f(x)\, d\mu$. Пусть есть две последовательности $f_n :\ f_n \rightrightarrows f$ и $f_n^* :\ f_n^* \rightrightarrows f$ (f_n, f_n^* — простые интегрируемые функции). Тогда, очевидно, перемешанная последовательность $f_1,\ f_1^*,\ f_2,\ f_2^*, \ldots$ также сходится равномерно к f, и по доказанному в пункте 1) существует предел последовательности интегралов

$$\int\limits_X f_1(x)\, d\mu,\ \ \int\limits_X f_1^*(x)\, d\mu,\ \ \int\limits_X f_2(x)\, d\mu,\ \ \int\limits_X f_2^*(x)\, d\mu, \ldots.$$

Значит, подпоследовательности по чётным и по нечётным номерам будут сходится к тому же пределу, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n^*(x)\, d\mu$.

3) Итак, определение 1 однозначно определяет интеграл Лебега, и нам осталось выяснить, равносильно ли это определение в случае простой функции f тому определению, что было дано в прошлом параграфе (будем, если имеется в виду оно, писать $\int\limits_X \text{пр.} f(x)\, d\mu$). Пусть f интегрируема как простая, тогда можно взять $f_n = f$ (откуда $f_n \rightrightarrows f$, и $f \in L(X)$ в смысле определения 1), кроме того,

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \text{пр.} f_n(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \text{пр.} f(x)\, d\mu = \int\limits_X \text{пр.} f(x)\, d\mu.$$

Пусть теперь f интегрируема в смысле определения 1), рассмотрим простые интегрируемые $f_n \rightrightarrows f$ и запишем при некотором n неравенство $|f| = |f - f_n + f_n| \leqslant |f - f_n| + |f_n| < 1 + |f_n|$.

Правая часть интегрируема, так как модуль сохраняет интегрируемость и константа тоже интегрируема, а значит, по свойству 4^o интеграла Лебега от простых функций f интегрируема уже как простая. Равенство интегралов $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_X \text{пр.}f(x)\,d\mu$ уже доказано выше. ▶

Теперь рассмотрим случай пространства сигма-конечной меры.

Определение 2. ***Исчерпанием*** *множества X называют последовательность множеств X_n такую, что: 1) $\forall n\ X_n \subset X_{n+1}$, 2) $\forall n\ \ \mu(X_n) < +\infty$, 3) $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.*

Для множества σ–конечной меры всегда существует хотя бы какое-то исчерпание: по определению σ–конечности $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ и $\mu(X_n) < +\infty$, условие 1) исчерпания может быть не выполнено, но система $X_n^* = \bigcup\limits_{k=1}^{n} X_k$ уже будет, как легко видеть, удовлетворять всем трём условиям исчерпания.

Определение 3. *Пусть μ — σ-конечная мера на X. Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют интегрируемой по Лебегу на X по мере μ, если существует конечный и одинаковый для всех исчерпаний X предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu$. Этот предел называется интегралом Лебега функции f на X.*

Обозначения для интеграла и класса интегрируемых функций те же, что использовались ранее. Свойства интеграла Лебега для пространств бесконечной меры в целом те же, что для случая конечной меры, хотя некоторые свойства в бесконечномерном случае могут теряться. Главное различие (и оно же причина остальных различий) одного случая от другого заключается в том, что ненулевая константа будет на множестве бесконечной меры неинтегрируема:

$$\int\limits_X c\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X_n} c\,d\mu = \lim_{n\to\infty} c\mu(X_n) = +\infty,$$

т. к. по непрерывности меры снизу из $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \subset X_{n+1}$ следует $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = \mu(X) = +\infty$.

Теперь докажем свойства 1^o-5^o интеграла Лебега, знакомые нам по предыдущему параграфу, для случая произвольной функции, заданной на множестве конечной меры. В качестве упражнения попробуйте доказать свойства 1^o-4^o для случая сигма-конечной меры.

1^o. Если $f \in L(X)$, тогда $\forall c \in \mathbb{R}\ \ cf \in L(X)$ и $\int\limits_X cf(x)\,d\mu = c\int\limits_X f(x)\,d\mu$.

◀ Распишем доказательство максимально подробно, в доказательствах других свойств аналогичные подробности будем опускать (в частности, всегда будут использоваться ранее доказанные свойства 1^o-5^o для простых функций). По определению 1 существует последовательность простых интегрируемых $f_n \rightrightarrows f$, тогда и $cf_n \rightrightarrows cf$, где cf_n — интегрируемые простые по свойству 1^o для простых функций. Значит, по определению 1 $cf \in L(X)$ и

$$\int\limits_X cf(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X cf_n(x)\,d\mu = c\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu = c\int\limits_X f(x)\,d\mu,$$

где в среднем равенстве мы снова воспользовались свойством 1^o для простых функций, вынеся константу c из-под знака интеграла. ▶

2^o. Если $f, g \in L(X)$, тогда $f \pm g \in L(X)$ и $\int\limits_X (f(x) \pm g(x))\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu \pm \int\limits_X g(x)\,d\mu$.

$$◀\ \ \exists f_n \rightrightarrows f,\ \exists g_n \rightrightarrows g\ \Rightarrow\ f_n \pm g_n \rightrightarrows f \pm g\ \Rightarrow\ f \pm g \in L(X),\ \ \text{и}\ \ \int\limits_X (f(x) \pm g(x))\,d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X (f_n(x) \pm g_n(x))\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\,d\mu \pm \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu \pm \int\limits_X g(x)\,d\mu.\ \ ▶$$

3^o. Если $f, g \in L(X)$ и $f \leqslant g$ на X, то $\int\limits_X f(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X g(x)\,d\mu$.

◀ Здесь в плане доказательства ситуация принципиально сложней, чем в случае простых функций: даже если заметить, что $g - f \geqslant 0$, отсюда не следует ещё очевидным образом, что интеграл от разности тоже неотрицателен. Поэтому рассуждение будет более тонкое: при произвольном $\varepsilon > 0$ для $f_n \rightrightarrows f$ возьмём номер $N_1 : \forall n > N_1 \ \ |f_n - f| < \varepsilon \Rightarrow f_n < f + \varepsilon$, и для $g_n \rightrightarrows g$ возьмём номер $N_2 : \forall n > N_2 \ \ |g_n - g| < \varepsilon \Rightarrow g < g_n + \varepsilon$. Тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ верно $f_n < f + \varepsilon \leqslant g + \varepsilon < g_n + 2\varepsilon$, и неравенство между крайними членами можно проинтегрировать в силу свойств интеграла от простых функций:

$$\int\limits_X f_n(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X (g_n(x) + 2\varepsilon)\,d\mu = \int\limits_X g_n(x)\,d\mu + \int\limits_X 2\varepsilon\,d\mu = \int\limits_X f_n(x)\,d\mu + 2\varepsilon\mu(X).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем $\int\limits_X f(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_X g(x)\,d\mu + 2\varepsilon\mu(X)$. Это неравенство слабее того, что нам нужно доказать, но теперь мы можем использовать произвольность $\varepsilon > 0$ и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0+$, что и даст требуемое неравенство. ▶

4^o. Пусть f измерима и $|f| \leqslant g \in L(X)$. Тогда $f \in L(X)$ и $\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X g(x)\,d\mu$.

◀ Для доказательства этого свойства нам потребуется явная конструкция для простых f_n, равномерно приближающих произвольную функцию f. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и положим $f_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$ на каждом множестве $X_k = \left\{x : \dfrac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Полуинтервалы $\left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right)$ образуют разбиение числовой оси — множества значений функции f, а потому для каждого $x \in \mathbb{R}$ значение $f(x)$ попадёт ровно в один такой промежуток, т.е. число k и, соответственно, значение $f_n(x)$ определены однозначно. Множества X_k измеримы как прообразы полуинтервалов, т.е. борелевских множеств, относительно измеримой по условию функции f, значит, $f_n(x)$ измерима по утверждению 1 предыдущей лекции. Наконец, на каждом X_k, а потому и на всём X, справедливо $f_n(x) \leqslant f(x) < f_n(x) + \dfrac{1}{2^n}$, откуда $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{2^n}$, что обеспечивает равномерную сходимость f_n к f.

Взяв такую приближающую функцию f последовательность f_n, а также последовательность простых интегрируемых $g_n \rightrightarrows g$, существующую по условию $g \in L(X)$, мы для всякого $\varepsilon > 0$ выберем номер $n_0 : |g_{n_0} - g| < \varepsilon \ \Rightarrow \ g < g_{n_0} + \varepsilon$. Тогда при всех n, больших некоторого N,

$$|f_n| = |(f_n - f) + f| \leqslant |f_n - f| + |f| < \varepsilon + g < g_{n_0} + 2\varepsilon,$$

где в правой части стоит интегрируемая простая функция, что согласно свойству 4^o для простых функций обеспечивает интегрируемость f_n. Итак, у нас есть последовательность простых интегрируемых f_n (которую можно рассматривать, начиная с номера $n = N + 1$), которая равномерно сходится к f, значит, $f \in L(X)$.

Наконец, $|f| \leqslant g \Rightarrow -g \leqslant f \leqslant g$, откуда по свойствам 1^o и 3^o

$$-\int\limits_X g\ d\mu \leqslant \int\limits_X f\ d\mu \leqslant \int\limits_X g\ d\mu \quad \Longrightarrow \quad \left|\int\limits_X f\ d\mu\right| \leqslant \int\limits_X g\ d\mu. \ \ ▶$$

Замечание 2. *Если положить $g = |f|$, то 4^o даст неравенство $\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,d\mu$. Кроме того, при условии измеримости f (а значит, и $|f|$) интегрируемость f и $|f|$ равносильны.*

Действительно, импликация $|f| \in L(X) \Rightarrow f \in L(X)$ обеспечивается свойством 4^o. Обратная импликация следует из того, что при наличии простых интегрируемых $f_n \rightrightarrows f$ имеем, благодаря неравенству треугольника $\Big||f_n| - |f|\Big| \leqslant |f_n - f|$, также и $|f_n| \rightrightarrows |f|$, где $|f_n|$ — простые интегрируемые в силу аналога данного замечания из прошлой лекции, а значит, $|f| \in L(X)$.

Замечание 3. *Ограниченная измеримая функция всегда интегрируема на множестве конечной меры (достаточно в 4^o положить функцию g равной мажорирующей константе). Таким образом, ограниченность, будучи необходимым условием интегрируемости по Риману, является почти достаточным условием интегрируемости по Лебегу (поскольку измеримость выполняется для всех "естественных" функций).*

5^o. Если $\mu(X) = 0$, то всякая функция f интегрируема на X и $\int\limits_X f(x)\, d\mu = 0$.

◀ Возьмём $f_n \rightrightarrows f$ из доказательства свойства 4^o, они интегрируемы с нулевым интегралом по свойству 5^o для простых функций. Поэтому $f \in L(X)$ и $\int\limits_X f(x)\, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\, d\mu = 0$. ▶