§8. Счётная аддитивность интеграла Лебега.

Последним базовым свойством интеграла Римана, аналог которого мы ещё не рассматривали для интеграла Лебега, является аддитивность: интеграл по отрезку равен сумме интегралов по разбивающим этот отрезок меньшим отрезкам. Для интеграла Лебега это свойство верно в более общей формулировке: разбивающие множества могут быть любыми измеримыми, а их количество может быть не только конечным, но и счётным. Ввиду этой сложности по сравнению с остальными базовыми свойствами мы выносим доказательство аддитивности и вывод её следствий в отдельный параграф, завершающий вводный модуль.

Итак, всюду далее X_n — измеримые множества в конечном или счётном количестве. Напомним, что доказательства мы проводим только для случая конечной меры, даже если утверждение верно и для сигма–конечного случая.

Теорема 1. *Пусть* $X = \bigsqcup\limits_n X_n,\ \ f \in L(X)$. *Тогда* $\forall n\ f \in L(X_n)$, *ряд* $\sum\limits_n \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu$ *сходится абсолютно и его сумма равна интегралу* $\int\limits_X f(x)\,d\mu$.

◀ Действовать будем так же, как и ранее при доказательстве свойств интегрируемых функций: сначала рассмотрим случай простых функций, а потом обобщим результат на прочие.

1) Пусть $f(x) = a_k$ при $x \in A_k$, и $\bigsqcup\limits_k A_k = X$ (подразумеваем, что все a_k различны, откуда благодаря измеримости f все A_k измеримы). Отметим, что $X_n = X_n \cap X = X_n \cap \Bigl(\bigsqcup\limits_k A_k\Bigr) = \bigsqcup\limits_k (A_k \cap X_n)$ и $A_k = A_k \cap X = A_k \cap \Bigl(\bigsqcup\limits_n X_n\Bigr) = \bigsqcup\limits_n (A_k \cap X_n)$.

Зная, что $f \in L(X)$ и используя свойства абсолютно сходящихся рядов, запишем

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k) = \sum_k a_k \sum_n \mu(A_k \cap X_n) = \sum_n \sum_k a_k \mu(A_k \cap X_n) = \sum_n \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu.$$

При этом все внутренние ряды в предпоследней сумме сходятся абсолютно, что влечёт интегрируемость f на любом X_n. Кроме того,

$$\sum_n \Biggl|\int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu\Biggr| = \sum_n \Biggl|\sum_k a_k \mu(A_k \cap X_n)\Biggr| \leqslant \sum_n \sum_k |a_k| \mu(A_k \cap X_n) < +\infty,$$

и мы проверили все утверждения теоремы.

2) Для произвольной интегрируемой функции f для каждого $\varepsilon > 0$ существует простая интегрируемая функция g такая, что $|f - g| < \varepsilon$ на X. По пункту 1) мы знаем, что из $g \in L(X)$ следует $g \in L(X_n)$. Тогда в неравенстве $|f| = |f - g + g| \leqslant |f - g| + |g| < \varepsilon + |g|$ правая часть интегрируема на X_n, и по свойству 4^o $f \in L(X_n)$. Проверим абсолютную сходимость ряда из интегралов от f, опираясь на аналогичный ранеее установленный факт для g:

$$\sum_n \Biggl|\int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu\Biggr| = \sum_n \Biggl|\int\limits_{X_n} (f(x) - g(x))\,d\mu + \int\limits_{X_n} g(x)\,d\mu\Biggr| \leqslant \sum_n \int\limits_{X_n} |f(x) - g(x)|\,d\mu + \sum_n \Biggl|\int\limits_{X_n} g(x)\,d\mu\Biggr| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n \int\limits_{X_n} \varepsilon\,d\mu + \sum_n \Biggl|\int\limits_{X_n} g(x)\,d\mu\Biggr| = \varepsilon \sum_n \mu(X_n) + \sum_n \Biggl|\int\limits_{X_n} g(x)\,d\mu\Biggr| = \varepsilon\mu(X) + \sum_n \Biggl|\int\limits_{X_n} g(x)\,d\mu\Biggr| < +\infty.$$

Осталось проверить само равенство для интегралов от функции f, для чего оценим разность

$$\Biggl|\int\limits_X f(x)\,d\mu - \sum_n \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu\Biggr| = \Biggl|\int\limits_X (f(x) - g(x))\,d\mu - \sum_n \int\limits_{X_n} (f(x) - g(x))\,d\mu + \Biggl(\int\limits_X g(x)\,d\mu - \sum_n \int\limits_{X_n} g(x)\,d\mu\Biggr)\Biggr|.$$

Разность в скобках равна нулю в силу пункта 1), и ввиду оценки $|f-g|<\varepsilon$ будет

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu - \sum_n \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)-g(x))|\,d\mu + \sum_n \int\limits_{X_n} |f(x)-g(x)|\,d\mu = \int\limits_X \varepsilon\,d\mu + \sum_n \int\limits_{X_n} \varepsilon\,d\mu = 2\varepsilon\mu(X).$$

После перехода $\varepsilon \to 0+$ получаем равенство $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum\limits_n \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu$. ►

Теорема 2. *Пусть* $X = \bigsqcup\limits_n X_n$, $\forall n\ f \in L(X_n)$ *и ряд* $\sum\limits_n \int\limits_{X_n} |f(x)|d\mu$ *сходится (или состоит из конечного числа слагаемых). Тогда* $f \in L(X)$ *(и, по теореме 1,* $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum\limits_n \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu$*).*

◄ Для простой функции f в обозначениях доказательства теоремы 1

$$\sum_k |a_k|\mu(A_k) = \sum_k |a_k| \sum_n \mu(A_k \cap X_n) = \sum_n \sum_k |a_k|\mu(A_k \cap X_n) = \sum_n \int\limits_{X_n} |f(x)|\,d\mu,$$

последний ряд сходится по условию, значит, ряд $\sum\limits_k a_k\mu(A_k)$ сходится абсолютно, т. е. $f \in L(X)$.

Для произвольной измеримой функции f (она по условию измерима на каждом X_n, а значит, и на $X = \bigsqcup\limits_n X_n$) существует простая измеримая функция g (см. доказательство свойства 4^o в §7) такая, что $|g-f|<1$ на X. Тогда $|g| = |g-f+f| \leqslant |g-f|+|f| < 1+|f|$, и по свойству 4^o $g \in L(X_n)$. Далее,

$$\sum_n \int\limits_{X_n} |g(x)|\,d\mu = \sum_n \int\limits_{X_n} |g(x)-f(x)+f(x)|\,d\mu \leqslant \sum_n \int\limits_{X_n} |g(x)-f(x)|\,d\mu + \sum_n \int\limits_{X_n} |f(x)|\,d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n \int\limits_{X_n} 1\,d\mu + \sum_n \int\limits_{X_n} |f(x)|\,d\mu = \sum_n \mu(X_n) + \sum_n \int\limits_{X_n} |f(x)|\,d\mu = \mu(X) + \sum_n \int\limits_{X_n} |f(x)|\,d\mu < +\infty.$$

Значит, по уже доказанному для простых функций $g \in L(X)$. Теперь $|f| = |f-g+g| \leqslant |f-g|+|g|$, где $|f-g|$ — ограниченная измеримая (а значит, интегрируемая), а $|g|$ — интегрируемая на X функция. По свойству 4^o $f \in L(X)$. ►

В теореме 2 важно условие сходимости ряда именно из интегралов от модулей.

Пример 1. *Пусть* $X = [0,+\infty)$, $X_n = [2n, 2n+2)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *а функция* $f(x) = (-1)^k$ *при* $x \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu_L\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |0| = 0$, *однако* $f \notin L([0,+\infty), d\mu_L)$, *так как* $|f| = 1 \notin L([0,+\infty), d\mu_L)$.

Следствие 1. *Если* $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} X_n$, *тогда дополнительное условие теоремы 2 вырождается и теоремы 1 и 2 дают*

$$f \in L(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n = 1, \dots N \quad f \in L(X_n), \qquad\qquad \int\limits_X f(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu.$$

Следствие 2. *В частности, если* $f \in L(X)$, *то для каждого измеримого множества* $Y \subset X$ *верно* $X = Y \sqcup (X \setminus Y)$, *поэтому* $f \in L(Y)$ *и* $\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_Y f(x)\,d\mu + \int\limits_{X\setminus Y} f(x)\,d\mu$, *т. е.*

$$\int\limits_{X\setminus Y} f(x)\,d\mu = \int\limits_X f(x)\,d\mu - \int\limits_Y f(x)\,d\mu.$$

Следствие 3. *Если $f \in L(X)$ и $f \geqslant 0$ на X, то по предыдущему следствию для каждого измеримого множества $Y \subset X$ определена функция множества $\nu(Y) = \int\limits_Y f(x)\,d\mu$, σ–аддитивная по теореме 1 и неотрицательная по свойству 3^o интеграла Лебега. Таким образом, эта функция является σ–аддитивной мерой и обладает всеми свойствами такой меры (монотонностью, счётной полуаддитивностью и т. п.).*

Замечание. *Благодаря свойству 5^o интеграла Лебега и аддитивности, при операциях с интегралом можно пренебрегать множествами нулевой меры, а условия теорем проверять не всюду, а почти всюду. Например, пусть $f \leqslant g$ почти всюду на X (т. е. на множестве $X \setminus X_0$, $\mu(X_0) = 0$). Тогда*

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \int\limits_{X\setminus X_0} f(x)\,d\mu + \int\limits_{X_0} f(x)\,d\mu = \int\limits_{X\setminus X_0} f(x)\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{X\setminus X_0} g(x)\,d\mu = \int\limits_{X\setminus X_0} g(x)\,d\mu + \int\limits_{X_0} g(x)\,d\mu = \int\limits_X g(x)\,d\mu.$$

Утверждение 1 (неравенство Чебышёва). *Если $\varphi(x) \geqslant 0$ почти всюду на X и $c > 0$, то*

$$\mu\left\{x \mid \varphi(x) \geqslant c\right\} \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_X \varphi(x)\,d\mu.$$

Доказательство — упражнение. Указание: начать с разбиения интеграла $\int\limits_X \varphi(x)\,d\mu$ по аддитивности на два с участием того множества, меру которого мы оцениваем.

Утверждение 2. *Если $\varphi(x) \geqslant 0$ п. в. на X и $\int\limits_X \varphi(x)\,d\mu = 0$, то $\varphi = 0$ п. в. на X.*

Доказательство — упражнение. Указание: от высказывания $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \ \varphi(x) > \dfrac{1}{n}$ перейти к множествам, потом к мерам и использовать неравенство Чебышёва.

Теорема 3 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Пусть $f \in L(X)$. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \ \mu(A) < \delta \implies \left|\int\limits_A f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

◀ Первым делом отметим, что при условии ограниченности функции ($|f(x)| \leqslant M$) утверждение очевидно, достаточно взять $\delta = \varepsilon/M$. Основная сложность доказательства связана с неограниченной частью f. Положим

$$X_n = \{x \mid n \leqslant |f(x)| < n+1\}, \quad A_N = \bigsqcup_{n=0}^{N} X_n, \quad B_N = \bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} X_n,$$

и поскольку при фиксированном x неравенство $n \leqslant |f(x)| < n+1$ выполняется ровно для одного n (равного $[|f(x)|]$), $X = \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} X_n = A_N \sqcup B_N$. Из интегрируемости функции следует интегрируемость её модуля, и по теореме 1 сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_{X_n} |f(x)|\,d\mu$. Остаток сходящегося ряда стремится к нулю, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \ \sum_{n=N+1}^{\infty}\int\limits_{X_n} |f(x)|\,d\mu = \int\limits_{B_N} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2(N+1)}$, тогда для всякого множества $A: \ \mu(A) < \delta$ имеем

$$A = A \cap X = A \cap (A_N \sqcup B_N) = (A \cap A_N) \sqcup (A \cap B_N) \implies \left|\int\limits_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_A |f(x)|\,d\mu =$$

$$= \int\limits_{A\cap A_N} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{A\cap B_N} |f(x)|\,d\mu \leqslant \int\limits_{A\cap A_N} (N+1)\,d\mu + \int\limits_{B_N} |f(x)|\,d\mu < (N+1)\mu(A \cap A_N) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant (N+1)\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} < (N+1)\delta + \frac{\varepsilon}{2} = (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacktriangleright$$

Упражнение. *Докажите свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега для случая сигма–конечной меры.*