ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К РК ПО КУРСУ “ДОП. ГЛАВЫ МАТЕМ. АНАЛИЗА” ПО МОДУЛЮ 1 “ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА: ВВЕДЕНИЕ” для ИУ-9, 4 семестр, 2020

1. Кольцо множеств. Теорема о пересечении колец. Теорема о минимальном кольце, содержащем данную систему множеств. Теорема о равенстве минимальных колец.

2. Сигма-кольцо (сигма-алгебра) множеств. Теорема о минимальном сигма-кольце (сигма-алгебре), содержащем данную систему множеств. Теорема о равенстве минимальных сигма-колец.

3. Борелевская сигма-алгебра. Порождение борелевской сигма-алгебры на прямой конечными интервалами.

4. Полукольцо множеств.Примеры.Теорема о минимальном кольце,содержащем данное полукольцо.

5. Мера на полукольце множеств. Счётная аддитивность меры. Теорема о продолжении меры с полукольца на наименьшее содержащее его кольцо.

6. Свойства меры: мера разности, оценка разности мер, монотонность, формула включений-исключений, полуаддитивность, счётная полуаддитивность, счётно-аддитивная монотонность, эквивалентная форма счётной аддитивности.

7. Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой, их аддитивность и счётная аддитивность.

8. Верхняя мера и её элементарные свойства. Совпадение верхней меры с изначально определённой для элементов исходного полукольца. Мера Лебега конечного и счётного множества.

9. Понятие измеримого множества (случай полукольца с единицей). Примеры. Теорема Каратеодори (без док-ва). Полнота меры, полученной внешним продолжением. Измеримость борелевских множеств. Пример неизмеримого по Лебегу множества.

10. Верхняя мера, понятие измеримого множества (случай сигма-конечной меры). Теорема Каратеодори (без док-ва). Непрерывность меры. Связь непрерывности и счётной аддитивности.

11. Измеримые функции, измеримость по Лебегу, борелевость. Измеримость композиций. Достаточное условие измеримости. Арифметические операции над измеримыми функциями.

12. Измеримость верхнего и нижнего предела последовательности измеримых функций. Равенство функций почти всюду. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций.

13. Теорема Егорова. С-свойство Лузина (без док-ва).

14. Сходимость по мере. Арифметические свойства. Единственность предела по мере.

15. Связь сходимости по мере и почти всюду для пространств конечной и бесконечной меры. Пример последовательности, сходящейся по мере и не сходящейся почти всюду. Теорема Рисса.

16. Простые функции. Интеграл Лебега для простых функций и его свойства.

17. Определение интеграла Лебега для произвольной функции в случае конечной меры, корректность такого определения. Определение интеграла Лебега по сигма-конечной мере. Основные отличия конечного случая от сигма-конечного.

18. Основные свойства интеграла Лебега для произвольных функций.

19. Счётная аддитивность интеграла Лебега.

20. Неравенство Чебышева. Равенство нулю неотрицательной функции с нулевым интегралом. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ РК ПО МОДУЛЮ 1

1. Задачи по теме: системы множеств, свойства меры.

2. Задачи по теме: вычисление мер множеств, измеримые функции, сходимость по мере.

3. Задачи по теме: интеграл Лебега.