

Вопросы к экзамену по обыкновенным дифференциальным уравнениям

для ФН11-31,2,3

Теория

Модуль 1

1. Фазовое пространство. Понятие о фазовом потоке, как об однопараметрической группе преобразований. Фазовая кривая, интегральная кривая.
2. Фазовый поток как однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Фазовая скорость. Особые точки. Пример.
3. Дифференциальное уравнение как связь фазового потока и векторного поля над фазовым пространством. Пример.
4. Фазовый поток на прямой. Решение задачи Коши. Пример неоднозначности ее решения.
5. Теорема сравнения (с доказательством)
6. Фазовый поток на прямой. Теорема существования и единственности решения (с доказательством)
7. Неавтономное уравнение. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
8. Однородные ДУ первого порядка
9. Линейные ДУ первого порядка
10. Уравнение Бернулли.
11. Уравнение Риккати.
12. ДУ в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.
13. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешенные относительно производной. Общее решение. Особое решение. Дискриминантная кривая.
14. Уравнение Лагранжа. Особые решения. Уравнение Клеро. Общее решение.
15. Фазовый поток в n -мерном пространстве. Нормальная система дифференциальных уравнений. Приведение дифференциального уравнения n -го порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений.
16. Приведение нормальной системы n дифференциальных уравнений к одному уравнению n -ого порядка.
17. Понижение порядка дифференциального уравнения, не содержащего явно независимой переменной.
18. Понижение порядка обобщенно-однородного уравнения.
19. Условие Липшица. Примеры выполнения и невыполнения.
20. Преобразование задачи Коши в интегральное уравнение (с обоснованием)
21. Метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения первого порядка.
22. Теорема Коши-Пеано существования и единственности решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (формулировка, доказательство существования).
23. Теорема Коши-Пеано существования и единственности решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (формулировка, доказательство единственности).

Модуль 2

24. Линейное дифференциальное уравнение n -ого порядка. Теорема существования и единственности решения (с доказательством)
25. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Свойства их решений.
26. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Теорема об определителе Вронского линейно зависимой системы функций (с доказательством)
27. Теорема об определителе Вронского системы линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения (с доказательством)
28. Теорема об общем виде решения линейного однородного дифференциального уравнения (с доказательством)
29. Фундаментальная система решений. Теорема существования фундаментальной системы решений (с доказательством)
30. Теорема о коэффициентах двух линейных дифференциальных уравнений, имеющих одну и ту же фундаментальную систему решений (с доказательством)
31. Формула Остроградского-Лиувилля (с выводом)
32. Решение однородного линейного уравнения второго порядка с помощью формулы Остроградского-Лиувилля.
33. Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n -ого порядка методом Лагранжа вариации произвольных постоянных (с обоснованием)
34. Линейное однородное дифференциальное уравнение n -ого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Элементы фундаментальной системы решений в случаях кратных и комплексных корней характеристического уравнения. Примеры.
35. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n -ого порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Структура общего решения. Структура частного решения. Примеры.
36. Особые точки фазового потока на плоскости. Связь с уравнением первого порядка. Линеаризация фазового потока в окрестности особой точки (приведение к нормальной системе двух линейных однородных дифференциальных уравнений). Характеристическое уравнение линеаризованной системы.
37. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Особая точка типа узел (с графической иллюстрацией).
38. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Особая точка типа седло (с графической иллюстрацией)
39. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Особая точка типа фокус (с графической иллюстрацией)
40. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Особая точка типа центр (с графической иллюстрацией)
41. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Особая точка типа дикритический узел (с графической иллюстрацией)
42. Классификация особых точек линейной системы второго порядка. Особая точка типа вырожденный узел (с графической иллюстрацией).
43. Экспоненциальная функция матрицы. Основные свойства (с доказательством). Вычисление приведением к жордановой форме.
44. Устойчивость решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость по А.М.Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Неустойчивость. Примеры.

45. Теорема А.М.Ляпунова об устойчивости (с доказательством).
46. Теорема об асимптотической устойчивости (формулировка). Теорема Н.Г.Четаева о неустойчивости (формулировка). Пример.
47. Линеаризация нормальной системы дифференциальных уравнений. Теорема об устойчивости по первому приближению (формулировка). Теорема о неустойчивости по первому приближению (формулировка) . Примеры

Возможные типы задач

Модуль 1

1. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.
2. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.
3. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка.
4. Уравнение Бернулли.
5. Уравнение Риккати.
6. Уравнение в полных дифференциалах или сводящиеся к ним.
7. Дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной.
8. Уравнение второго порядка, не содержащее явно независимую переменную.

Модуль 2

9. Решение линейного неоднородного ДУ второго порядка методом вариации произвольных постоянных (найти общее решение)
10. Решение линейного ДУ с постоянными коэффициентами (найти общее решение)
11. Решение линейного ДУ с помощью формулы Остроградского-Лиувилля
12. Решение системы линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами.
Определение типа и характера устойчивости особой точки линейной системы ДУ второго порядка.
13. Анализ устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений второго порядка с помощью функций Ляпунова или Четаева.
14. Построение фазового портрета дифференциального уравнения второго порядка.

Структура экзаменационного билета.

Допустимый минимум - 18 баллов (из 30)

1. Теоретический вопрос (модуль 1), (5 баллов)
2. Теоретический вопрос (модуль 1), (5 баллов)
3. Задача(модуль 1), (5 баллов)
4. Теоретический вопрос (модуль 2), (5 баллов)
5. Теоретический вопрос (модуль 2), (5 баллов)
6. Задача(модуль 2), (5 баллов)