

**Курсовая работа по курсу “Дифференциальные уравнения”  
(ФН11-41,2,3, весенний семестр 2018/19 уч.г.)**

Общее название

**Качественное исследование решений системы дифференциальных уравнений  
специального вида с дополнительным условием в фазовой плоскости.**

Исследовать качественные изменения поведения интегральных кривых системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{\xi} + 2\dot{\zeta} - \dot{\xi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{2\lambda\xi}{1-e^2}, \quad \ddot{\zeta} - 2\dot{\xi} - \dot{\zeta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = 2\lambda(\zeta - ed), \quad \Pi = -ak^3e^3 \frac{A + Bv}{A^2 + B^2}, \quad (1)$$

при дополнительных условиях  $\lambda \leq 0$  и  $\xi^2 + (\zeta - ed)^2(1 - e^2) = 1 - e^2$ , где величины  $A$  и  $B$  определяются равенствами

$$A^2 - B^2 = \xi^2 + \zeta^2 + ke\nu\zeta + \frac{1}{4}k^2e^2(\nu^2 - 1),$$

$$2AB = ke\zeta + \frac{1}{2}k^2e^2\nu,$$

при изменении в заданных пределах соответствующего параметра, построив необходимые фазовые портреты. (Пределы изменяемого параметра указаны в круглых скобках)

№	ФН11-41	$e$	$d$		$k$	$\alpha$	$\nu$
1	Бойко С В	(0, 1)	0	-0.1	0.5	2.5	0.2
2	Герасименко А Б	1/3	0	0.2	(0, 1)	0.75	0.3
3	Глухова Е А	0.5	0	-0.3	1/3	1.08	(0, 1)
4	Глушков Д Е	0.9	0	0.4	1/4	(0, ∞)	0.1
5	Крючков Г М	0.8	0	-0.1	(0, 1)	4.7	0.2
6	Кузнецов М А	(0, 1)	0	0.2	0.1	7.2	0.3
7	Орешникова Е А	0.7	0	-0.3	0.15	(0, ∞)	0.4
8	Петров А М	0.6	0	0.4	0.2	1.2	(0, 1)
9	Полканова Е Е	0.2	0	0.5	0.25	(0, ∞)	0.1
10	Полякова О А	(0, 1)	0	0.5	0.35	0.49	0.2
11	Прусов К М	4/5	0	0.1	(0, 1)	1.95	0.3
12	Пустарнак Г К	3/8	0	-0.2	0.1	(0, ∞)	0.4
13	Рахманкулов Д А	(0, 1)	0	0.3	0.15	2.2	0.5
14	Свиридов И А	0.5	0	0.4	0.2	(0, ∞)	0.6
15	Урденко В Е	0.25	0	-0.1	0.25	0.45	(0, 1)
16	Филатова К И	(0, 1)	0	0.2	0.35	0.14	0.1
17	Хвостов А В	0.35	0	-0.3	(0, 1)	21/9	0.05
18	Черных Н А	0.45	0	-0.4	0.15	3.8	(0, 1)
19	Чилина А А	0.55	0	-0.5	0.33	(0, ∞)	1/7
20	Шамшединов И Х	(0, 1)	0	0.5	3/8	45/17	4/5
21	Шворнев Д Г	0.61	0	0.1	(0, 1)	21/17	3/8
22	Шиленков Д А	(0, 1)	0	-0.2	4/5	11/12	1/8
23		(0, 1)	0	0.3	3/8	0.4103	0.5
24		0.55	0	-0.4	1/8	(0, ∞)	0.43
25		0.15	0	0.1	0.5	0.67	(0, 1)

№	ФН11-42	$e$	$d$		$k$	$\alpha$	$\nu$
1	Алиев Я Г	0.45	0	0.1	0.5	2.6	(0, 1)
2	Губанова В И	1/7	0	-0.2	0.4	(0, $\infty$ )	0.3
3	Достовалова А М	(0, 1)	0	0.3	1/3	11/7	0.5
4	Кутепов Л А	0.73	0	-0.4	1/5	(0, $\infty$ )	0.1
5	Матвейчук Э С	0.66	0	0.1	(0, 1)	0.48	0.2
6	Пешехонов М С	(0, 1)	0	-0.2	0.6	7/13	0.7
7	Прорехин Н А	0.51	0	0.35	0.65	(0, $\infty$ )	0.4
8	Пупышев Н А	0.36	0	-0.45	0.25	1.82	(0, 1)
9	Рыгалин Т Д	0.35	0	0.75	0.45	(0, $\infty$ )	0.5
10	Сарибекян Д А	0.23	0	-0.5	(0, 1)	0.74	0.2
11	Светцов В А	4/7	0	0.1	(0, 1)	1.65	0.3
12	Смолкина Ю А	3/11	0	0.2	0.17	(0, $\infty$ )	0.4
13	Степанов А Д	(0, 1)	0	-0.35	0.15	2.45	0.5
14	Хуцаева Б Х	0.65	0	0.2	0.25	(0, $\infty$ )	0.36
15	Чепурной С Э	0.75	0	-0.1	0.25	0.14	(0, 1)
16	Черкасова М С	3/14	0	-0.2	0.35	(0, $\infty$ )	0.1
17	Шамшидов О Т	0.37	0	0.3	0.05	13/9	(0, 1)
18	Шершакова А О	0.48	0	-0.4	0.15	3/2	(0, 1)
19	Ширяев А В	0.75	0	0.5	0.33	(0, $\infty$ )	1/7
20		(0, 1)	0	-0.5	3/8	5/11	4/5
21		0.67	0	0.1	(0, 1)	20/7	3/11
22		(0, 1)	0	0.2	4/5	17/12	1/8
23		(0, 1)	0	-0.3	3/8	10/7	0.5
24		0.15	0	0.4	11/18	0.68	(0, 1)
25		0.08	0	-0.1	0.5	(0, $\infty$ )	0.27

№	ФН11-43	$e$	$d$		$k$	$\alpha$	$\nu$
1	Белов Д С	(0, 1)	0	-0.1	0.5	2/3	0.4
2	Гордина В И	0.39	0	0.2	0.4	(0, $\infty$ )	1/3
3	Григорьева А А	0.58	0	0.3	1/3	11/7	(0, 1)
4	Каланчекаев М М	0.17	0	0.4	1/5	(0, $\infty$ )	0.75
5	Ковлаков А В	0.26	0	0.1	(0, 1)	0.48	0.6
6	Короткова А А	0.74	0	-0.2	0.6	7/9	(0, 1)
7	Курбанов А А	0.14	0	-0.35	0.65	(0, $\infty$ )	0.5
8	Пархоменко Д А	(0, 1)	0	0.45	0.2	1.28	0.36
9	Петров А М	0.25	0	0.75	0.4	(0, $\infty$ )	0.25
10	Растворов А М	0.21	0	-0.5	(0, 1)	0.49	0.2
11	Соколов А А	0.47	0	0.1	(0, 1)	1.57	4/7
12	Тёхта И А	0.04	0	-0.2	0.17	(0, $\infty$ )	3/8
13	Уколов А Д	0.45	0	-0.35	0.15	2.58	(0, 1)
14	Чепурной С Э	0.137	0	0.2	0.25	(0, $\infty$ )	0.25
15	Шамшидов О Т	(0, 1)	0	-0.1	0.25	0.49	0.25
16	Юн А А	0.7	0	0.3	(0, 1)	2.9	3/11

### Замечания и дополнения.

1. Рассматриваемые уравнения являются частным случаем уравнений движения механической системы, изучаемой, в частности, в

[http://nd.ics.org.ru/upload/iblock/0a0/ND\\_2011\\_v7\\_n2\\_07.pdf](http://nd.ics.org.ru/upload/iblock/0a0/ND_2011_v7_n2_07.pdf)

Потенциал  $\Pi$  при этом аналогичен потенциалу, рассмотренному в [http://nd.ics.org.ru/upload/iblock/225/ND\\_2014\\_v10\\_n2\\_08.pdf](http://nd.ics.org.ru/upload/iblock/225/ND_2014_v10_n2_08.pdf)

2. Для анализа фазовых траекторий удобно использовать переменную  $\gamma$ , определяемую равенствами

$$\xi = \sqrt{1 - e^2} \sin \gamma, \quad \zeta = \cos \gamma + ed.$$

3. Рассматриваемая система уравнений допускает первый интеграл (интеграл Якоби), который можно записать как

$$\frac{1}{2}(1 - e^2 \cos^2 \gamma)\dot{\gamma}^2 + \Pi - de \cos \gamma - \frac{1}{2}e^2 \cos^2 \gamma = h = \text{const.}$$

4. Линии уровня этого интеграла и образуют фазовый портрет системы в плоскости переменных  $\gamma$  и  $\dot{\gamma}$ . Анализ этого интеграла позволяет найти особые точки и сепаратрисы фазового портрета.

5. Дополнительное условие  $\lambda \leq 0$  (условие “нахождения на связи”) преобразуется к виду имеет вид

$$\dot{\gamma}^2 + \frac{2(1 - e^2 \cos^2 \gamma)}{\sqrt{1 - e^2}} \dot{\gamma} + 1 + de \cos \gamma - \cos \gamma \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} - \frac{\sin \gamma}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \geq 0$$

6. При выполнении курсовой работы студент должен построить все качественно различные фазовые портреты системы (1), возможные при положительных значениях изменяемого параметра. Если таких портретов окажется меньше 4-х для каждого из указанных в варианте значений параметра  $d$ , студенту будет предложено построить такие портреты также для отрицательных значений  $d$  или при других значениях параметров.

7. Фазовые портреты являются качественно различными, если в полосе  $s \leq \gamma < s + 2\pi$  ( $s$  - действительное число) они содержат различное количество особых точек каждого типа или имеют различное число областей, на которые фазовая плоскость разделяется сепаратрисой (сепаратрисами) или имеют различное число особых точек каждого типа внутри и вне области схода со связи или имеют какие-либо другие характерные отличия. Обязательно должны быть построены фазовые портреты в особых случаях “слипшихся” особых точек и в случаях, когда особая точка (или несколько особых точек) попали на границу области “схода со связи”.

8. На каждом из фазовых портретов должны быть отмечены все особые точки, построены все сепаратрисы. В каждой из областей, на которые сепаратрисы делят фазовое пространство, должна быть построена хотя бы одна интегральная кривая, не являющаяся сепаратрисой или особой точкой.

9. Каждый фазовый портрет должен быть построен на промежутке горизонтальной оси  $\gamma$  длиной несколько большей, чем  $2\pi$ . Должен быть указан промежуток значений изменяемого параметра, при которых фазовый портрет качественно будет именно таким.

10. При выполнении курсовой работы приветствуется использование любых компьютерных вычислительных и графических средств.

11. После выполнения и оформления (по правилам, которые будут сообщены позднее) курсовой работы и проверки преподавателем ее результатов будет организована публичная защита, результатом которой будет выставление оценки.