

**Московский Государственный Технический Университет  
имени Н.Э. Баумана**

Дубограй И.В., Скуднева О.В., Левина А. И.

## **Функции нескольких переменных.**

**методические указания для подготовки к аттестации.**

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2010

Рецензент

**Дубограй И.В., Скуднева О.В., Левина А. И.**

Теория поля: Методические указания к практическим занятиям.-  
М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010, -62с.

**Ирина Валерьевна Дубограй  
Оксана Валентиновна Скуднева  
Александра Игоревна Левина**

**Функции нескольких переменных.**

Тираж 1500 экз.

## Введение.

Данные методические указания предназначены для работы студентов второго курса всех специальностей при изучении темы «Функции нескольких переменных».

В работе кратко изложены все необходимые для решения задач сведения из теории, подробно разобраны решения типовых задач.

Разделы «указаний» полностью соответствуют программе обучения студентов, утверждённой методической комиссией МГТУ им. Н.Э.Баумана.

Указания можно использовать как для самостоятельной работы, так и для проведения занятий в аудитории

## **Методические указания для подготовки к аттестации по теме «Функций нескольких переменных».**

### **Тема 1. Основные понятия.**

#### **§1.1 Область определения, линии и поверхности уровня.**

Определение. Множество упорядоченных наборов из  $n$  действительных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , для которых определены линейные комбинации и скалярное произведение, называется точечным евклидовым арифметическим  $n$  – мерным пространством  $R^n$ , а наборы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называются его точками  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  или  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Действительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются координатами точки.

Точку  $O = (0, 0, \dots, 0)$  называют началом отсчёта или началом координат.

Например, рассмотрим множество  $R^1$ . Его точки имеют одну координату и могут быть изображены на числовой оси. Расстояние между двумя точками  $x_1 \in R^1$  и  $x_2 \in R^1$  равно  $\rho = |x_1 - x_2|$ .

$\varepsilon$  - окрестностью точки  $x_0 \in R^1$  является множество точек  $x \in R^1$ , таких, что  $|x - x_0| < \varepsilon$ .

Рассмотрим теперь множество  $R^2$ . Его точки имеют две координаты  $x = (x_1, x_2)$  или  $P(x_1, x_2)$  и могут быть изображены на плоскости в системе координат  $X_1OX_2$ . Расстояние между двумя точками  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$  вычисляется как длина отрезка

$$\rho = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2}, \text{ где } x^{(1)} = (x'_1, x'_2), x^{(2)} = (x''_1, x''_2).$$

$\varepsilon$  - окрестностью точки  $x_0 \in R^2$  является множество точек  $x \in R^2$ , таких, что  $\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < \varepsilon$ , где  $x = (x_1, x_2)$  и  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ .

Обобщим эти представления.

Определение. Метрикой или расстоянием между двумя точками  $x^{(1)} = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  и  $x^{(2)} = (x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$  в пространстве  $R^n$  называется

$$\text{число } \rho = |x^{(1)} - x^{(2)}| = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \dots + (x'_n - x''_n)^2}.$$

Или  $\rho = |P_1P_2| = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \dots + (x'_n - x''_n)^2}$ , если  $P_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  и  $P_2(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ .

Определение.  $\varepsilon$  - окрестностью точки  $x_0 \in R^n$   $n$ -мерного арифметического пространства  $R^n$  называется множество точек  $x \in R^n$ , таких, что  $|x - x_0| < \varepsilon$ .

Такую окрестность обозначают  $U(x^0, \varepsilon) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$  и называют шаровой окрестностью точки  $x^0$  радиуса  $\varepsilon$ .

Определение. Если в пространстве  $R^n$  определён закон, по которому каждой точке  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  некоторой области  $D$  этого пространства ставится в соответствие единственное действительное значение переменной  $u$ , то этот закон называется функцией  $n$  переменных и обозначается  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Множество  $D$  называется областью определения функции, а множество

$$E = \{u \in R \mid u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\} - \text{областью значений функции.}$$

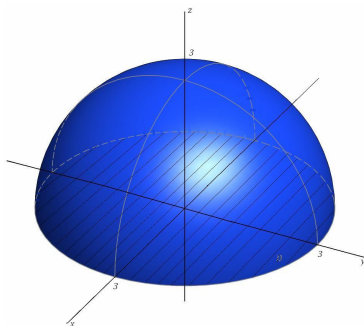
Функция нескольких переменных (ФНП) есть отображение  $f: D \rightarrow R$ , где  $D \subset R^n$ .

**Определение.** Графиком функции  $n$  переменных  $f : R^n \rightarrow R$  называется подмножество  $\Gamma(f)$  пространства  $R^{n+1}$  такое, что

$$\Gamma(f) = \{ (x, y) \in R^{n+1} \mid x \in D(f), y = f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \}$$

Например, рассмотрим функцию двух переменных:  
 $z = f(x, y), D \subset R^2$ . Её область определения  $D$  изображается на плоскости  $XOY$ . Если в каждой точке  $D$  построить перпендикуляр к пл.  $XOY$  и отложить на нём направленный отрезок  $z = f(x, y)$ , то в пространстве  $OXYZ$  получим множество точек  $P(x, y, f(x, y))$ , которые являются графиком функции  $z = f(x, y)$ .

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .



Областью определения  $D$  данной функции является множество точек  $(x, y)$  плоскости  $XOY$ , таких, что их координаты удовлетворяют неравенству  $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ .

То есть  $D(f) = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9 \}$ .

Это точки круга с центром в начале координат. Радиус этого круга равен 3.

Графиком данной функции является множество точек пространства  $R^3$ , а именно  $\Gamma(z) = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0 \}$  - точки верхней полусферы.

**Определение.** *Линией уровня функции*  $z = f(x, y)$  называется множество точек на плоскости  $XOY$ , в которых функция сохраняет постоянное значение  $z=C$ .

**Пример 2.** Найти и построить линии уровня функции

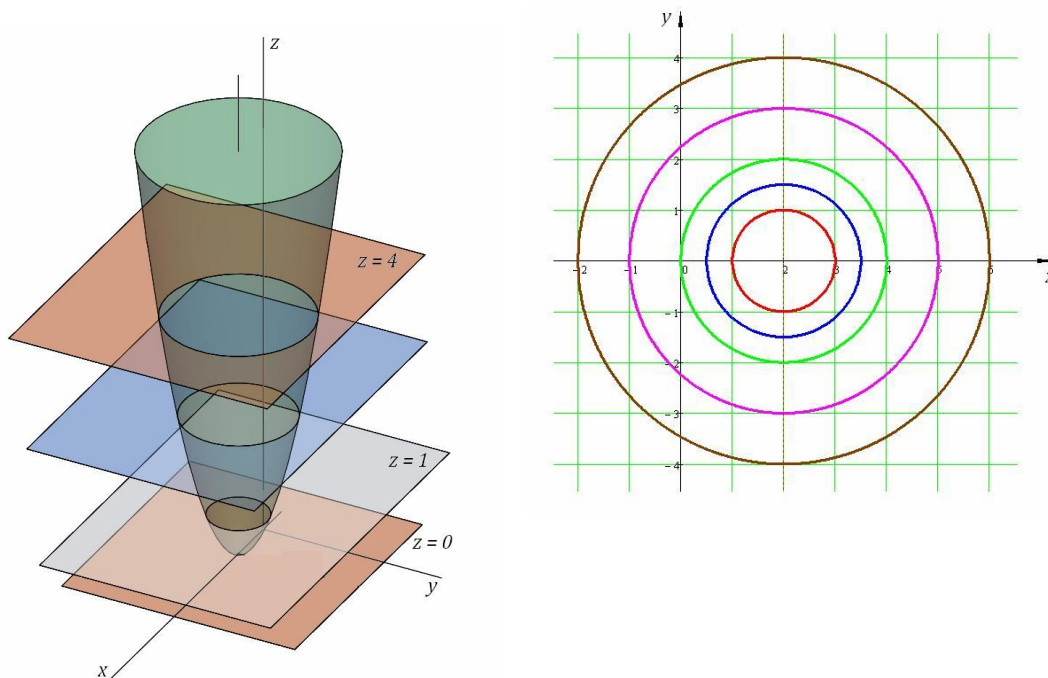
$$z = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

Решение.

Областью определения данной функции является множество точек  $(x, y) \in R^2$ . Условие линий уровня  $z=C$ .

Выделив в заданной функции полный квадрат:  $z = (x-2)^2 + y^2$ , получим, что и  $(x-2)^2 + y^2 = C$ . Это уравнения линий уровня, которые могут быть изображены на плоскости  $XOY$  как окружности с центром в точке  $O_1(2,0)$  и радиусами  $\sqrt{C}$ ,  $C \geq 0$ .

Графиком данной функции в пространстве  $R^3$  является множество точек кругового параболоида, для которого линии уровня есть проекции на плоскость  $XOY$  линий его пересечения с плоскостями  $z=C$ . На рис. 2 изображены линии уровня, соответствующие  $C=0$ ,  $C=1$ ,  $C=2$  и  $C=4$ .



При  $C=0$  получаем точку  $O_2$  (соответствующая плоскость касается поверхности в точке  $O_1(2,0,0)$ ).

Рассмотрим функцию трёх переменных  $u = f(x, y, z)$ . Она является отображением  $D \rightarrow R$ , где  $D \subset R^3$ .

Определение. Поверхностью уровня функции трёх переменных называется множество точек пространства  $R^3$ , в которых функция

сохраняет своё значение. Из условия поверхности уровня  $u=C$  следует, что  $f(x, y, z)=C, C \in R$ . Это уравнения поверхностей уровня.

### Задачи для самостоятельного решения к § 1.1.

1. Найти область определения и построить на плоскости ХОУ линии уровня следующих функций:

а)  $z = 3x - 2y$  ; б)  $z = x^2 - y^2$  ; в)  $z = ye^x$  ; г)  $z = \frac{x-2}{y+1}$  ;

д)  $z = xy$  ; е)  $z = \frac{\ln x}{y}$  ; ж)  $z = x(y^2 + 1)$  .

2. Найти область определения и уравнения поверхностей уровня следующих функций. Изобразить поверхности уровня:

а)  $u = x + 3y + 2z$  ; б)  $u = x^2 - y^2 + z^2$  ; в)  $u = 4x^2 + y^2 + 9z^2$  ; г)

$u = \sqrt{x^2 + y^2 - z}$  .

3. Построить на одном чертеже область  $D \subset R^2$  . и линии уровня функции  $z = f(x, y)$ . Чему равны, и в какой точке области D достигаются  $\max_D f(x, y)$  и  $\min_D f(x, y)$ ?

а)  $D: \begin{cases} x \leq 3 \\ x + y \geq 2 \\ 2y - x \leq 7 \end{cases}, f(x, y) = x^2 + y^2$ ; б)  $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 20 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}, f(x, y) = x - 2y$  .

Ответы.

1. а)  $D \subset R^2$ , линии уровня  $3x - 2y = C, C \in R$  - семейство прямых;

б)  $D \subset R^2$ , линии уровня  $\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1$  с действительной осью ОХ при  $C > 0$ ;

в)  $D \subset R^2$ , линии уровня  $y = Ce^{-x}, C \in R$ ;

г)  $D = \{(x, y) | x \in R, y \in R \setminus \{-1\}\}$ , линии уровня  $\begin{cases} C(y+1) = x-2 \\ y \neq -1 \end{cases}$  - пучок

прямых с центром в точке  $(2, -1)$  кроме  $y = -1$  ;

д)  $D \subset R^2$ , линии уровня  $xy = C, C \in R \Rightarrow$  гиперболы при  $C \neq 0$ ,

$x = 0, y = 0$  при  $C = 0$ ;

$$\text{е) } D = \{(x, y) | x > 0, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \text{ линии уровня } Cy = \ln x \Rightarrow \begin{cases} x = e^{Cy} \\ C \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases};$$

$$\text{ж) } D \subset \mathbb{R}^2, \text{ линии уровня } x(y^2 + 1) = C.$$

$$3. \text{ а) } \min f(x, y) = f(1, 1) = 2, \max f(x, y) = f(3, 5) = 34;$$

$$\text{б) } \max f(x, y) = f(2, -4) = 10.$$

## §1.2. Предел, непрерывность, точки и линии разрыва функции нескольких переменных.

Определение. Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при стремлении  $x$  к  $x^0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих неравенству

$$0 < |x - x^0| < \delta, \text{ выполняется неравенство } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Или иначе:

Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при стремлении  $x$  к  $x^0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(x^0, \delta) \quad f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

$$A = \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x \in \overset{\circ}{U}(x^0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$$

Определение.

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = \infty \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : x \in \overset{\circ}{U}(x^0, \delta) \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Определение. Точка  $x^0 = \infty$  называется бесконечно удалённой.

Окрестностью точки  $x^0 = \infty$  радиуса  $r$  называется множество точек  $x$  таких, что  $|x| > r$ .

$$\text{Т.е. } U(\infty, r) = \{x \mid |x| > r\}$$

Определение. Число  $A$  называется пределом ФНП  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся действительное число  $r(\varepsilon)$  такое, что для всех точек  $x$  таких, что  $|x| > r$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Рассмотрим несколько примеров вычисления пределов ФНП.

**Пример 3.** Вычислить  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy}$ .

Решение. При непосредственной подстановке получаем неопределённость типа  $\frac{0}{0}$ . В результате замены  $xy = t$  преобразуем предел функции двух переменных в известный предел функции одной переменной, а именно  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ .

Ответ: 1.

**Пример 4.** Вычислить  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + y}{x - y}$

Решение. При непосредственной подстановке получаем неопределённость типа  $\frac{0}{0}$ . Заметим, что если этот предел существует, то он не должен зависеть от того, как точка  $P(x, y)$  стремится к точке  $O(0, 0)$ . Вычислим этот предел при условии, что точка  $P(x, y)$  стремится к  $O(0, 0)$  вдоль оси  $OX$ , т. е. при  $y = 0$ .

$$\text{Тогда } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = 0}} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Теперь вычислим этот предел при условии, что точка  $P(x, y)$  стремится к  $O(0, 0)$  вдоль оси  $OY$ , т. е. при  $x = 0$ .

$$\text{Тогда } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{\substack{x = 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-y} = -1$$

Оказалось, результат зависит от направления подхода точки  $P(x, y)$  к  $O(0, 0)$ .

Ответ: предел не определён.

**Пример 5.** Вычислить  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

Решение. Непосредственная подстановка даёт неопределённость типа  $\frac{0}{0}$ . Вычислим этот предел при стремлении точки  $P(x, y)$  к  $O(0,0)$  вдоль оси  $OX$  и вдоль оси  $OY$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^3}{y^2} = -\lim_{y \rightarrow 0} y = 0.$$

То, что эти пределы совпали, не гарантирует существования предела, так как необходимо учесть все возможные направления стремления точки  $P(x, y)$  к  $O(0,0)$ . Рассмотрим множество прямых, проходящих через точку  $O(0,0)$  и вычислим данный предел при условии, что точка  $P(x, y)$  стремится к  $O(0,0)$  по любой из них. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - k^3 x^3}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1 - k^3}{1 + k^2} = 0 \quad \text{при любом значении } k.$$

Ответ: 0.

**Пример 6.** Вычислить  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{y^2 + x^4}}$ .

Решение. При непосредственной подстановке  $x = 0, y = 0$  получим неопределённость типа  $\frac{0}{0}$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{y^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{y^2 + x^4}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \frac{0}{0}.$$

Вычислим данный предел при условии стремления точки  $(x, y)$  к точке  $(0,0)$  по любой параболе  $y = kx^2$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx^2}} \frac{x^3 - xy}{\sqrt{y^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(1-k)}{\sqrt{k^2 + 1} \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-k)}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0.$$

Ответ: 0.

**Пример 7.** Вычислить  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+2y}{\sqrt{y^2+3x^2}}$ .

Решение. При непосредственной подстановке  $x=0, y=0$  получим неопределённость типа  $\frac{0}{0}$ . Если предел существует, то он не зависит от способа стремления  $x$  и  $y$  к нулю. Положим  $y=kx$ , т. е. будем приближаться к точке  $O$  по различным прямым.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{x+2y}{\sqrt{y^2+3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2kx}{\sqrt{k^2x^2+3x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+2k)}{|x|\sqrt{k^2+3}} = \begin{cases} \frac{(1+2k)}{\sqrt{k^2+3}} \text{ при } x \rightarrow +0 \\ -\frac{1+2k}{\sqrt{k^2+3}} \text{ при } x \rightarrow -0 \end{cases}.$$

Ответ: Так как результаты при  $x \rightarrow +0$  и  $x \rightarrow -0$  не совпадают, предел не определён.

Определение. Функция  $u = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x^0$ , если она определена в этой точке, существует  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$  и

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0).$$

Определение. Функция  $u = f(x)$  называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Определение. Точкой разрыва функции  $u = f(x)$  называется внутренняя или граничная точка области определения ФНП, в которой нарушено хотя бы одно из условий непрерывности.

Если точки разрыва образуют линию, то она называется линией разрыва. Если точки разрыва образуют поверхность, то она называется поверхностью разрыва.

**Пример 8.** Найти и построить на плоскости  $XOY$  точки разрыва функции

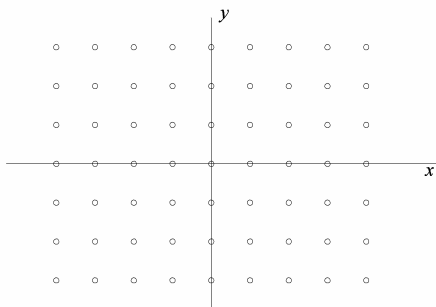
$$z = \frac{1}{\cos^2 \pi \left(x + \frac{1}{2}\right) + \cos^2 \pi \left(y + \frac{1}{2}\right)}.$$

Решение. Данная функция не определена там, где

$$\cos^2 \pi \left(x + \frac{1}{2}\right) + \cos^2 \pi \left(y + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\cos^2 \pi \left(x + \frac{1}{2}\right) + \cos^2 \pi \left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \pi \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \cos \pi \left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \pi \left(y + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = n \end{cases}.$$

Ответ: Точки разрыва ФНП  $P(k, n)$ , где  $k, n \in Z$ .



## Тема 2. Дифференцирование функций нескольких переменных.

### § 2.1. Частные производные первого порядка.

Определение. Частным приращением функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в точке  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по переменной  $x_k$  с шагом  $\Delta x_k$  называется разность

$$\Delta_k u = f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n).$$

Определение. Частной производной функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по

независимой переменной  $x_k$  называется конечный предел  $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k}$ .

Частная производная обозначается  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$  или

$f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Частные производные вычисляются по формулам и правилам дифференцирования функции одной переменной в предположении, что все переменные, кроме  $x_k$ , являются постоянными.

**Пример 9.** Найти частные производные первого порядка от функции

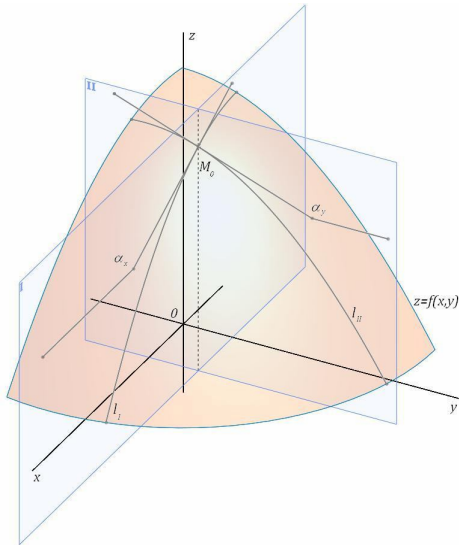
$$z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

Решение. Найдём  $\frac{\partial z}{\partial x}$  в предположении, что  $y = \operatorname{const}$ , а  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в предположении, что  $x = \operatorname{const}$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}.$$

Для функции  $z = f(x, y)$  частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  имеют



следующий геометрический смысл:

если через точку  $M_0$  построить плоскость, параллельную плоскости  $XOZ$ , то она пересечёт поверхность, соответствующую  $z = f(x, y)$ , по

некоторой кривой  $l_1$ . Производная  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,

вычисленная в точке  $M_0$ , равна угловому коэффициенту касательной, построенной через точку  $M_0$  к этой линии пересечения  $l_1$ .

$f'_x(x_0, y_0) = k_1 = \operatorname{tg} \alpha$ . Аналогично

$f'_y(x_0, y_0) = k_2 = \operatorname{tg} \beta$  - в плоскости, параллельной  $YOZ$ .

### Задачи для самостоятельного решения к § 2.1.

1. Для данных функций двух переменных вычислить  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  в указанных точках:

а)  $z = x \arcsin y - y \arcsin x$  в точке  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;

б)  $z = x^y - y^x$  в точке  $M(2; 2)$ .

2. Для следующих функций трёх переменных вычислить  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и

$\frac{\partial u}{\partial z}$  в указанных точках:

а)  $u = \frac{\ln x}{\ln y} - z$  в точке  $M(e; e^2; 1)$ ;

б)  $u = 2^{\frac{x}{z}} - 2^{\frac{y}{z}}$  в точке  $M(2;1;1)$ .

Ответы.

1. а)  $z'_x = \arcsin y - \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_M = \frac{\pi}{3} - 1$ ,  $z'_y = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} - \arcsin x \Big|_M = 1 - \frac{\pi}{6}$ ;

б)  $z'_x = yx^{y-1} - y^x \ln y \Big|_M = 4 - 4 \ln 2$ ,

$z'_y = x^y \ln x - xy^{x-1} \Big|_M = 4 \ln 2 - 4$ .

2. а)  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x \ln y} \Big|_M = \frac{1}{2e}$        $\frac{\partial u}{\partial x} = 2^{\frac{x}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{z} \Big|_M = 4 \ln 2$   
 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\ln x}{y \ln^2 y} \Big|_M = -\frac{1}{4e^2}$       б)  $\frac{\partial u}{\partial y} = -2^{\frac{y}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{z} \Big|_M = -2 \ln 2$   
 $\frac{\partial u}{\partial z} = -1 \Big|_M = -1$        $\frac{\partial u}{\partial z} = -2^{\frac{x}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x}{z^2} + 2^{\frac{y}{z}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{y}{z^2} \Big|_M = -6 \ln 2$

## §2.2 Частные производные высших порядков.

Рассмотрим ФНП  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которая имеет частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$  во всех точках  $x \in D$ . Эти производные в свою очередь есть новые ФНП, определённые в некоторой области  $D_1$ .

Определение. Если функция  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  имеет частную производную по переменной  $x_j$ , то эта производная называется производной второго порядка функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по переменным  $x_i$  и  $x_j$ .

Обозначение:  $\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f''_{x_i x_i}$ ;  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j}$ .

Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Определение. Частная производная по любой переменной от частной производной ФНП (k-1)-порядка называется производной k-ого порядка.

Определение. Частная производная высшего порядка, вычисленная по разным переменным, называется смешанной.

Смешанная производная k-ого порядка в точке P функции, которая непрерывна в окрестности этой точки вместе со своими частными производными до k-ого порядка включительно, не зависит от порядка дифференцирования.

В частности, если функция  $f(x, y)$  непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в

окрестности точки  $(x, y)$ , то  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

**Пример 10.** Для функции  $z = \cos \frac{y}{x}$  убедиться, что  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \cos \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \cos \frac{y}{x}$$

Следовательно,  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

### Задачи для самостоятельного решения к § 2.2.

1. Для функции  $z = \sin \frac{x}{y}$  вычислить  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$  и  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ ;
2. Для функции  $u = e^{x^2+y^2+z^2}$  вычислить  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$  и  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ .

### §2.3. Матрица Гессе.

**Определение.** Матрицей Гессе для функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется квадратная матрица порядка  $n \times n$ , составленная из производных второго порядка следующим образом:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Т. к. смешанные производные равны, матрица является симметрической. Об использовании Матрицы Гессе речь пойдёт позже.

## §2.4. Дифференциал функции.

Определение. Полным приращением функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , соответствующим приращениям аргументов  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , называется разность

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Определение. Функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определённая в некоторой окрестности точки  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется

дифференцируемой в ней, если существуют такие числа  $A_i, i = \overline{1, n}$  что в этой точке полное приращение функции может быть представлено в виде  $\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho)$ , где

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2},$$

$o(\rho)$  бесконечно малая более высокого порядка, чем каждое  $\Delta x_i \rightarrow 0, i = \overline{1, n}$ .

Теорема. (Необходимое условие дифференцируемости функции в точке). Если функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена и дифференцируема в точке  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то она в этой точке непрерывна и имеет в ней конечные частные производные, причём

$$A_i = \left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_P, i = \overline{1, n}.$$

Теорема. (Достаточное условие дифференцируемости функции в точке). Если функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена и имеет частные производные по всем переменным в некоторой окрестности точки  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и эти производные непрерывны в самой точке, то функция в ней является дифференцируемой.

Определение. Дифференциалом первого порядка функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется главная часть полного приращения этой функции, линейная относительно приращений аргументов, т. е.

$$du = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е.  $dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \dots, dx_n = \Delta x_n$ .

Если функция дифференцируема в точке  $P$ , то числа

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(P), A_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}(P), \dots, A_n = \frac{\partial u}{\partial x_n}(P).$$

Тогда дифференциал ФНП

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n \quad (2)$$

В частности, для  $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (3)$$

Для  $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (4)$$

Правила дифференцирования:

$$d(C) = 0$$

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(Cu) = C du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Для дифференцируемой в точке ФНП  $u = f(x)$  её полное приращение  $\Delta f = df + o(\rho)$ . Тогда с точностью до бесконечно малой более высокого порядка относительно приращения аргумента (или  $\rho$ ) верно следующее приближённое равенство:  $\Delta f \approx df$ . Это можно использовать для приближённых вычислений значений ФНП.

**Пример 11.** Используя дифференциал функции двух

переменных, вычислить приближённо число  $1,06^{2,98}$ .

Решение. Будем считать, что искомое число есть значение функции  $z = x^y$  в точке  $M$  с координатами  $x = 1,06$  и  $y = 2,98$ . В соседней точке  $M_0(1,3)$  значение функции легко вычисляется:  $f(x_0, y_0) = 1$

$x = 1,06 = x_0 + \Delta x = 1 + 0,6$   $y = 2,98 = y_0 + \Delta y = 3 - 0,02$ . Таким образом, при переходе из точки  $M_0$  в точку  $M$  координаты получают приращения  $\Delta x = 0,6$ ,  $\Delta y = -0,02$ .

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = dz(x_0, y_0) + o(\rho),$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \text{ Отсюда}$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Вычислим  $dz(x_0, y_0)$ :

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy, \quad dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y.$$

$$dz(1,3) = 0,18.$$

$$1,06^{2,98} \approx 1 + 0,18 = 1,18.$$

**Определение.** Дифференциалом второго порядка функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется дифференциал от её дифференциала 1-го порядка, рассматриваемого как функция  $x_1, x_2, \dots, x_n$  при фиксированных значениях  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ .

Обозначается  $d^2u = d(du)$ .

Дифференциал  $n$ -ого порядка:  $d^n u = d(d^{(n-1)}u)$ .

Имеет место символическая формула, которая формально раскрывается по биномиальному закону:

$$d^m u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m u. \quad (5)$$

Например, для  $z = f(x, y)$

$$d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} d^3 z &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z = \\ &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \end{aligned}$$

**Пример 12.** Найти  $d^2u$  для функции  $u = x^2 y z^2$  в точке  $M(1,1,1)$ .  
Решение.

$$d^2u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz \right)$$

Вычисляем все частные производные второго порядка в точке М:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2xyz^2, & \frac{\partial u}{\partial y} &= x^2 z^2, & \frac{\partial u}{\partial z} &= 2x^2 yz, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2yz^2 \Big|_M = 2, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 2yx^2 \Big|_M = 2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 2xz^2 \Big|_M = 2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= 4xyz \Big|_M = 4, & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} &= 2x^2 z \Big|_M = 2. \end{aligned}$$

Ответ:  $d^2u(1,1,1) = 2dx^2 + 2dz^2 + 4dxdy + 8dxdz + 4dydz$ .

Замечание. Дифференциал второго порядка представляет собой квадратичную форму  $F(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ , переменными которой являются приращения аргументов, а матрицей – матрица Гессе для функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , поэтому его можно записать так:

$d^2u = \Delta x^T H \Delta x$ , где H – матрица Гессе,  $\Delta x$  - матрица-столбец:

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix},$$

$$d^2u = [\Delta x_1 \ \Delta x_2 \ \dots \ \Delta x_n] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

Рассмотрим пример вычисления частных производных ФНП с использованием её полного дифференциала.

**Пример 13.**  $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ .

Решение. Используя формулу для дифференциала функции трёх переменных (4), вычислим  $du$ , применяя правила дифференцирования.

$$\begin{aligned} du &= d\left(\operatorname{arctg} \frac{xy}{z}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2} d\left(\frac{xy}{z}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2} \frac{z d(xy) - xy dz}{z^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{xy}{z}\right)^2} \frac{z(y dx + x dy) - xy dz}{z^2} = \\ &= \frac{zy dx + xz dy - xy dz}{z^2 + x^2 y^2}. \end{aligned}$$

Сгруппировав выражения при  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ , сравним результат с формулой (4). Из сравнения следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{zy}{z^2 + x^2 y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 + x^2 y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-xy}{z^2 + x^2 y^2}.$$

Таким образом, как дифференциал функции можно вычислить, зная частные производные, так и частные производные можно получить из выражения дифференциала.

#### Задачи для самостоятельного решения к §2.4.

1. Для данных функций двух переменных вычислить  $dz$  и  $d^2z$ :

а)  $z = x^2 y^2$ ;

б)  $z = \cos(e^x y)$ ;

б)  $z = x^y + y^x$ .

2. Для следующих функций заменив приращение функции дифференциалом, найти приближённо на какую величину изменится значение функции, если:

а) для  $z = \arcsin xy$  в точке  $M\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $x$  увеличить на  $\frac{1}{2}$ , а  $y$  - на  $\frac{1}{10}$ ;

б) для  $z = x^{2y}$  в точке  $M(1; 2)$   $x$  уменьшить на  $\frac{1}{2}$ , а  $y$  увеличить - на  $\frac{8}{10}$ ;

3. Вычислить приближённо:

а)  $\sqrt{\frac{16,02}{3,95}}$  ; б)  $\operatorname{arctg} \frac{0,99}{1,03}$  .

### §2.5. Нахождение функции по её полному дифференциалу.

Рассмотрим функцию двух переменных  $z = f(x, y)$ . Её полный

дифференциал  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$  . (2)

Если дано выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  , то оно по своей структуре похоже на дифференциал некоторой функции двух переменных. И действительно, при выполнении некоторых условий, оно является таковым.

**Теорема.** Если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и их частные производные определены и непрерывны в некоторой области  $D$  , то выражение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  является полным дифференциалом функции

$z(x, y)$  тогда и только тогда, когда  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  .

Если условия теоремы выполнены и  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dz(x, y)$ , то функцию  $z(x, y)$  можно найти следующим образом.

Из сравнения выражения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  и формулы для

$dz$  следует, что 
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Чтобы найти  $z(x, y)$ , возьмём любое уравнение этой системы и проинтегрируем обе его части по соответствующей переменной. Другая переменная при этом будет играть роль константы, поэтому к полученной первообразной прибавим функцию, зависящую от этой переменной. Например, взяв первое уравнение системы, получим:

$$z(x, y) = \int P(x, y) dx = P^*(x, y) + \varphi(y).$$

$\varphi(y)$  играет роль константы относительно переменной интегрирования  $x$ . Для нахождения  $\varphi(y)$  найденную функцию  $z(x, y)$  подставляем во второе уравнение исходной системы.

$$\frac{\partial}{\partial y} (P^*(x, y) + \varphi(y)) = Q(x, y).$$

Отсюда находим сначала  $\varphi'(y)$ , а затем, интегрируя по  $y$ , саму функцию  $\varphi(y) = \int \varphi'(y) dy + C$ . И, наконец, собираем искомую функцию  $z(x, y) = P^*(x, y) + \Phi(y) + C$ .

**Пример 14.** Проверить, является ли выражение

$$(3x^2 + y^2 + 3)dx + (2xy + \sin y)dy$$

полным дифференциалом некоторой функции и найти её.

Решение.

Проверим, выполнено ли условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

$$P(x, y) = 3x^2 + y^2 + 3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$Q(x, y) = 2xy + \sin y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

Условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  выполняется, следовательно, это действительно

полный дифференциал некоторой функции. Для отыскания  $z(x, y)$  имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 3 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + \sin y \end{cases}$$

Интегрируя обе части первого уравнения по  $x$ , получаем:

$$z(x, y) = \int (3x^2 + y^2 + 3) dx = x^3 + y^2 x + 3x + \varphi(y).$$

Подставляем найденную  $z(x, y)$  во второе уравнение исходной

системы:  $\frac{\partial}{\partial y} (x^3 + y^2 x + 3x + \varphi(y)) = 2xy + \sin y \Rightarrow$

$$2xy + \varphi'(y) = 2xy + \sin y \Rightarrow \varphi'(y) = \sin y \Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \int \sin y dy = -\cos y + C.$$

И собираем  $z(x, y) = x^3 + y^2x + 3x - \cos y + C.$

Ответ получен.

Аналогично решается задача для выражения, связывающего функции трёх переменных

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Необходимые и достаточные условия того, что оно является полным дифференциалом функции трёх переменных выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

**Пример 15.** Проверить, является ли выражение

$$(yz + 2x)dx + (xz + 1)dy + (xy - 3z^2)dz$$

полным дифференциалом некоторой функции и найти её.

Решение.

Проверим, выполняются ли соответствующие условия.

$$P(x, y) = yz + 2x, \quad Q(x, y) = xz + 1, \quad R(x, y) = xy - 3z^2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists u(x, y, z) \quad du = Pdx + Qdy + Rdz$$

Из сравнения данного выражения с полным дифференциалом

функции  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$  следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = yz + 2x \\ \frac{\partial u}{\partial y} = xz + 1 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = xy - 3z^2 \end{array} \right.$$

Из первого уравнения находим  $u(x, y, z)$ , интегрируя обе его части по переменной  $x$ , роль константы при этом играют  $y$  и  $z$ .

$$u(x, y, z) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (yz + 2x) dx = yzx + x^2 + \varphi(y, z).$$

Подставляем найденную функцию во второе уравнение системы:

$$\frac{\partial}{\partial y} (yzx + x^2 + \varphi(y, z)) = xz + 1 \Rightarrow$$

$$zx + \varphi'(y, z) = xz + 1 \Rightarrow$$

$$\varphi'(y, z) = 1 \Rightarrow \varphi(y, z) = \int dy = y + \psi(z)$$

Подставляем  $\varphi(y, z)$  в найденное выше выражение  $u(x, y, z)$

$$u(x, y, z) = yzx + x^2 + y + \psi(z)$$

Затем подставляем доопределённую функцию  $u(x, y, z)$  в третье уравнение системы:

$$\frac{\partial}{\partial z} (yzx + x^2 + y + \psi(z)) = xy - 3z^2 \Rightarrow$$

$$xy + \psi'(z) = xy - 3z^2 \Rightarrow \psi'(z) = -3z^2 \Rightarrow \psi(z) = -z^3 + C.$$

Окончательно получаем ответ:  $u(x, y, z) = yzx + x^2 + y - z^3 + C$ .

### Задачи для самостоятельного решения к § 2.5.

Убедиться, что данные выражения представляют собой дифференциалы некоторых функций, и найти эти функции:

- $(2x + y^x \ln y) dx + \left( \frac{1}{\cos^2 y} + xy^{x-1} \right) dy$ ;
- $(\sin 2y + y \operatorname{tg} x) dx + (2x \cos 2y + \ln \cos x + 2y) dy$ ;
- $(yz - xy) dx + \left( xz - \frac{x^2}{2} + yz^2 \right) dy + (xy + y^2 z) dz$ ;
- $\left( \frac{1}{z} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left( \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} \right) dy + \left( \frac{1}{y} - \frac{x}{z^2} \right) dz$ .

Ответы.

- $z(x, y) = x^2 + y^x + \operatorname{tgy} + C$ ;
- $z(x, y) = x \sin 2y + y \ln \cos x + y^2 + C$
- $u(x, y, z) = xyz - \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{2} y^2 z^2 + C$ ;

$$4. u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + C.$$

## § 2.6. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных.

**Теорема.** Если функции  $x_i = x_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  дифференцируемы в точке  $t_0$ , в которой  $x_i^0 = x_i(t_0)$ , а ФНП

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - дифференцируема в точке

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , то сложная функция  $u = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

дифференцируема в точке  $t_0$  и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}. \quad (7)$$

Чтобы составить формулу для вычисления производной от сложно заданной функции, полезно предварительно нарисовать схему зависимости заданной функции от всех переменных. По ней легко прослеживаются все связи.

Рассмотрим несколько вариантов задания сложной функции.

1. Если  $z = f(x, y)$ , где  $y = \varphi(x)$ , то функция  $z$  имеет

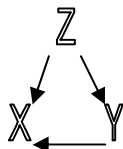
непосредственно две частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$  и

$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ . А если учесть то, что  $y = \varphi(x)$ , то  $z$ , как функция

одной переменной  $x$ , имеет полную производную  $\frac{dz}{dx}$ .

Чтобы составить формулу для вычисления  $\frac{dz}{dx}$ , построим схему

зависимости  $z$  от своих переменных.



По этой схеме  $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ . Здесь учтены все варианты зависимости функции  $z$  от переменной  $x$ .

**Замечание.** Обратите внимание на обозначения производных.

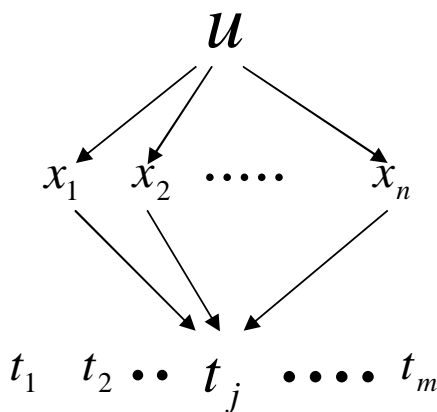
$\frac{\partial z}{\partial x}$  - частная производная функции  $z = f(x, y)$ , которая вычисляется при условии, что  $y$  не меняется;

$\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dy}{dx}$  - полные производные от функций, зависящих от одной переменной  $x$ .

2. Пусть  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ,  $i = \overline{1, n}$

Схема зависимости и формулы для вычисления частных производных

$\frac{\partial u}{\partial t_j}$  выглядят так:



$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j},$$

$$j = \overline{1, m}$$

**Пример 16.** найти частные производные от функции

$$z = f(x^2 + y^2, y^3).$$

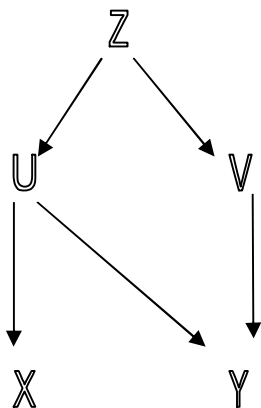
Решение. Функция  $z$  сложно задана, и её можно представить так:

$$z = f(u, v), \text{ где } u = x^2 + y^2; v = y^3$$

Строим схему зависимости функции  $z$  от всех переменных и по ней

составляем формулы для нахождения  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и

$$\frac{\partial z}{\partial y}.$$



По схеме видим, что функция  $z$  зависит от переменной  $x$ , которая связана только с  $u$ . Как бы от  $z$  к  $x$  можно попасть только по одному «пути», сделав два «шага» от  $z$  к  $u$  и от  $u$  к  $x$ .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f'_u(u, v) \cdot 2x;$$

По схеме от  $z$  к  $Y$  можно попасть или через  $u$ , сделав два «шага», или через  $v$ , сделав тоже два «шага».

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_u(u, v) \cdot 2y + f'_v(u, v) \cdot 3y^2.$$

Обратите внимание на обозначение производных.  $\frac{dv}{dy}$  - полная

производная от  $v = v(y)$ , т.к.  $v$  зависит от одной переменной  $y$ .

При вычислении производных высших порядков следует помнить, что любая частная производная зависит от тех же переменных, что и данная функция, причём по той же схеме.

**Пример 17.** Убедиться, что функция  $z = x^2 + y \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

удовлетворяет уравнению  $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x$ .

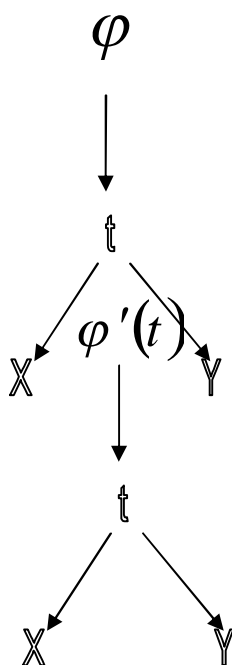
Решение. Для сложной функции  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  введём переменную  $t$  так,

что  $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(t)$ ,  $t = \frac{y}{x}$ . Если  $z$  удовлетворяет данному уравнению,

то подстановка её частных производных в это уравнение приведёт его к тождественному равенству. Построим схему зависимости функции

$\varphi(t)$  от переменных, и, составив формулу для вычисления  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,

найдем эту производную:



$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + y \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(t)) = 2x + y \cdot \varphi'(t) \frac{\partial t}{\partial x} = \\ &= 2x - \frac{y^2}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

Схема зависимости  $\varphi'(t)$  от переменных выглядит аналогично.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2x - \frac{y^2}{x^2} \varphi'(t) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + \frac{2y^2}{x^3} \varphi'(t) - \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi'(t)) \\
&= 2 + \frac{2y^2}{x^3} \varphi'(t) + \frac{y^3}{x^4} \varphi''(t), \text{ т.к. } \frac{\partial}{\partial x} (\varphi'(t)) = \frac{d\varphi'(t)}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi''(t) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right). \\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 2x - \frac{y^2}{x^2} \varphi'(t) \right) = \\
&= -\frac{2y}{x^2} \varphi'(t) - \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi'(t)) = -\frac{2y}{x^2} \varphi'(t) - \frac{y^2}{x^3} \varphi''(t), \text{ т.к. } \\
&\frac{\partial}{\partial y} (\varphi'(t)) = \frac{d\varphi'(t)}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi''(t) \cdot \left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Подставляем  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  в уравнение:

$$\begin{aligned}
&\left( 2x + \frac{2y^2}{x^2} \varphi'(t) + \frac{y^3}{x^3} \varphi''(t) \right) + \left( -\frac{2y^2}{x^2} \varphi'(t) - \frac{y^3}{x^3} \varphi''(t) \right) = 2x \\
&2x \equiv 2x, \text{ ч.т.д. } \bullet
\end{aligned}$$

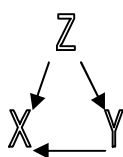
**Пример 18.** Вычислить производные первого и второго порядка функции  $z = x^{\sin x}$ .

Решение.

Можно решить задачу следующим образом:

Обозначим  $y = \sin x$ . Тогда  $z = x^y$  - функция двух переменных,

которая имеет две частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Строим



схему зависимости  $z$  от  $x$  и  $y$  и вычисляем  $\frac{dz}{dx}$ .

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{От } z \text{ к } x \text{ есть два «пути», по первому}$$

из которых делаем один «шаг», а по второму – два.

$$\frac{dz}{dx} = yx^{y-1} + x^y \ln x \cdot \cos x, \quad \frac{dz}{dx} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

$\frac{dz}{dx}$  новая функция двух переменных, зависящая от них по подобной схеме. Составляем по этой схеме формулу для вычисления производной второго порядка.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dz}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{dz}{dx} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = y(y-1)x^{y-2} + yx^{y-1} \ln x \cdot \cos x -$$

$$x^y \ln x \cdot \sin x + (x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x + x^y \ln^2 x \cdot \cos x) \cdot \cos x$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2}.$$

Ответ :  $\frac{dz}{dx} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 1, \frac{d^2 z}{dx^2} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{2}.$

**Пример 19.** Переходя к новым переменным  $u = x^3; v = x^2 - y^2$ , преобразовать уравнение

$$y^3 z''_{xx} + 2xy^2 z''_{xy} + x^2 y z''_{yy} + (x^2 + y^2) z'_y = 0, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

Решение. Вычислим входящие в уравнение частные производные, учитывая, что функция  $z$  и эти производные зависят от своих переменных по одной схеме.

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u \cdot 3x^2 + z'_v \cdot 2x$$

$$z'_y = z'_v \cdot v'_y = z'_v \cdot (-2y)$$

$$z''_{xx} = (z'_u)_x 3x^2 + z'_u \cdot 6x + (z'_v)_x \cdot 2x + z'_v \cdot 2 = (z''_{uu} \cdot u'_x + z''_{uv} \cdot v'_x) \cdot 3x^2 +$$

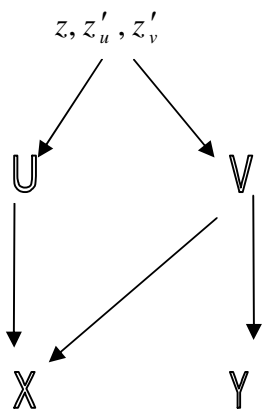
$$+ z'_u \cdot 6x + (z''_{vu} \cdot u'_x + z''_{vv} \cdot v'_x) \cdot 2x + 2z'_v =$$

$$= 9x^4 z''_{uu} + 12z''_{uv} \cdot x^3 + 4x^2 z''_{vv} + 6xz'_u + 2z'_v$$

$$z''_{xy} = (z'_y)_x = (z'_v \cdot (-2y))'_x =$$

$$= -2y \cdot (z''_{vu} \cdot u'_x + z''_{vv} \cdot v'_x) = -6x^2 y z''_{uv} - 4xyz''_{vv}$$

$$z''_{yy} = -2y (z'_v)_y - 2z'_v = -2y (z''_{vv} \cdot v'_y) - 2z'_v$$



Подставляя вычисленные производные в исходное уравнение после упрощения получаем:

$$9x^4 yz''_{uu} + 6xyz'_u = 0 \text{ или}$$

$$uz''_{uu} + 2z'_u = 0.$$

## §2.7 Дифференциал сложной функции. Инвариантность первого дифференциала.

В § 2.4 мы получили для функции  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  следующее выражение её полного дифференциала:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (2)$$

Эта форма записи сохраняется и в случае, если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются не только независимыми переменными, но и функциями некоторых других независимых переменных.

Если  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - сложная функция, где

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_m), \quad i = \overline{1, n}, \text{ то}$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial t_m} dt_m, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставив все  $dx_i$  в

выражение полного дифференциала  $du$ , получим после

$$\text{преобразования } du = \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial t_m} dt_m.$$

То есть выражение  $du$  имеет тот же вид, что исходное.

Полный дифференциал ФНП не зависит от того, являются ли переменные  $x_i, i = \overline{1, n}$  независимыми или зависят от других переменных. (Свойство инвариантности полного дифференциала относительно переменных.)

Дифференциал высшего порядка не обладает свойством инвариантности. Так, например, рассмотрим  $d^2z$  для функции  $z = f(x, y)$ , где  $x = x(t_1, t_2, \dots, t_m)$  и  $y = y(t_1, t_2, \dots, t_m)$

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right).$$

Здесь  $dx = \Delta x$  и  $dy = \Delta y$  зависят

от  $t$ , поэтому

$$d^2 z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial z}{\partial x}d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial y}d(dy) =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$$

Получили выражение, отличающееся от выражения второго дифференциала, в случае независимых переменных  $x$  и  $y$ .

**Пример 20.** Найти дифференциалы первого и второго порядка сложной функции  $u = f(\xi, \eta)$ , где  $\xi = xy$ ;  $\eta = x + y$ .

Решение.

Вычислим  $du$  следующим образом:

$$du = \frac{\partial f}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}d\eta,$$

$$\text{где } d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy \text{ и } d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}dy.$$

Тогда

$$du = \frac{\partial f}{\partial \xi}(ydx + xdy) + \frac{\partial f}{\partial \eta}(dx + dy) = \left(y\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dx + \left(x\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\right)dy$$

Можно вычислить  $du$  иначе, пользуясь свойством инвариантности:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \text{ где } \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ и}$$

$$\frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Тогда

$$du = \left(y\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot 1\right)dx + \left(x\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot 1\right)dy. \text{ Результаты совпадают.}$$

Для вычисления  $d^2u$  используем ранее полученное выражение для  $d^2z$  в случае, когда  $z = f(x, y)$ ,  $x = x(t_1, t_2)$  и  $y = y(t_1, t_2)$ .

Тогда

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}d\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}d\xi d\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}d\eta^2 + \frac{\partial f}{\partial \xi}d^2\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}d^2\eta, \text{ где}$$

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}dx + \frac{\partial \xi}{\partial y}dy = ydx + xdy \Rightarrow d\xi^2 = y^2dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy = dx + dy \Rightarrow d\xi^2 = dx^2 + 2dxdy + dy^2$$

$$d\xi d\eta = ydx^2 + (x+y)dxdy + xdy^2$$

$$d^2\xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy^2 = 2dxdy$$

$$d^2\eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} dy^2 = 0$$

Подставив всё это в выражение для  $d^2u$  и преобразовав, получим ответ:

$$d^2u = \left( y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) dx^2 + 2 \left( xy \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + (x+y) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) dxdy + \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + 2x \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) dy^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial \xi} dxdy.$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение в скобках есть соответствующие частные производные функции  $u = f(\xi, \eta)$  по переменным  $x$  и  $y$ , и

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial \xi} dxdy$$

отличается от выражения  $d^2u$  для функции двух независимых переменных.

### Задачи для самостоятельного решения к §2.7.

1. Найти полный дифференциал для следующих сложных функций:

а)  $u = f(xy; yz)$  ;

б)  $u = f(t)$ ,  $t = xyz$ .

в)  $u = (xy)^z$ ,  $x = t^3 + 3t$ ,  $y = tgt$ ,  $z = t$ .

2. Для следующих функций найти производные указанного порядка:

а)  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}$  для  $u = f\left(\frac{x}{y}; \frac{y}{z}\right)$ ;

б)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  для  $z = x^2 + 2y \cdot f\left(x^2 + y^2; \frac{y}{x}\right)$ ;

$$в) \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{dz}{dx} \text{ для } z = \arctg \frac{x}{y}, \text{ где } y = \varphi(x)$$

Ответы.

$$1. а) t_1 = xy, t_2 = yz.$$

$$du = \frac{\partial f}{\partial t_1} y dx + \left( \frac{\partial f}{\partial t_1} x + \frac{\partial f}{\partial t_2} z \right) dy + \frac{\partial f}{\partial t_2} y dz.$$

$$б) du = \frac{df}{dt} yz dx + \frac{df}{dt} xz dy + \frac{df}{dt} xy dz.$$

$$в) du = \left( y^z z x^{z-1} \cdot 3(t^2 + 1) + x^z z y^{z-1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + xy \ln xy \right) dt.$$

$$2. а) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = \frac{2}{z^3} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{y}{z^4} \frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2}, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{y}{z};$$

б)

$$z''_{xx} = 2 + 4y f'_u(u, v) + 4 \frac{y^2}{x^3} f'_v(u, v) + 8x^2 y f''_{uu}(u, v) - 8 \frac{y^2}{x} f''_{uv}(u, v) + 2 \frac{y^3}{x^4} f''_{vv}(u, v)$$

$$z''_{xy} = 4x f'_u(u, v) - 4 \frac{y}{x^2} f'_v(u, v) + 8xy^2 f''_{uu}(u, v) + \left( 4y - 4 \frac{y^3}{x^2} \right) f''_{uv}(u, v) - 2 \frac{y^2}{x^3} f''_{vv}(u, v)$$

$$в) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \varphi'(x).$$

## § 2.8. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

Знания, полученные при изучении теории функций нескольких переменных, можно применять для решения задач из других областей высшей математики. В частности, для решения дифференциальных уравнений. Грамотно используя замену переменных, можно получить уравнение, вид или решение которого представляются более простым, нежели исходного.

При замене переменных в дифференциальных выражениях производные, входящие в них, необходимо выразить через производные по новым переменным, пользуясь правилами дифференцирования сложных функций.

**Пример 21.** Преобразовать уравнение  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ,

приняв  $u = x^2 - y$ ,  $v = x$  за новые переменные.

Решение. Выразим производные функции  $z$ , входящие в данное уравнение, через производные этой функции, рассматривая её как сложную функцию  $z = z(u, v)$ , где  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x)$ .

Используя формулы для вычисления производных сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{получаем}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial u}. \quad \text{Производные второго порядка}$$

вычисляем подобным образом, учитывая, что производные

$$\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} - \text{сложные функции, зависящие от своих переменных так}$$

же, как исходная функция  $z$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial u} = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot 4x^2 + 4x \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -2x \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение и после упрощения получим новое уравнение.

$$\text{Ответ: } 4v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

С учётом того, что большинство дифференциальных уравнений описывают реальные физические процессы, часто помогает переход к другой системе координат. Например, переход от декартовых координат к полярным. Рассмотрим этот переход подробнее.

Для начала вспомним, что

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (*)$$

Вычислим дифференциалы обеих частей уравнений данной системы:

$$\begin{cases} dx = d(r \cos \varphi) \\ dy = d(r \sin \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

Теперь сначала умножим первое уравнение полученной системы на  $\cos \varphi$ , а второе умножим на  $\sin \varphi$  и сложим эти уравнения:

$$+ \begin{cases} \cos \varphi dx = \cos^2 \varphi dr - r \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ \sin \varphi dy = \sin^2 \varphi dr + r \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$


---


$$\cos \varphi dx + \sin \varphi dy = dr$$

Далее, умножим первое уравнение полученной системы на  $-\sin \varphi$ , а второе умножим на  $\cos \varphi$  и сложим эти уравнения:

$$+ \begin{cases} -\sin \varphi dx = -\sin \varphi \cos \varphi dr + \sin^2 \varphi r d\varphi \\ \cos \varphi dy = \cos \varphi \sin \varphi dr + \cos^2 \varphi r d\varphi \end{cases}$$


---


$$-\sin \varphi dx + \cos \varphi dy = r d\varphi$$

Система станет выглядеть так: 
$$\begin{cases} dr = \cos \varphi dx + \sin \varphi dy \\ d\varphi = -\frac{\sin \varphi}{r} dx + \frac{\cos \varphi}{r} dy \quad (**) \end{cases}$$

Если считать переменные  $\varphi$  и  $r$  функциями переменных  $x$  и  $y$ , то их дифференциалы можно записать по формулам следующим образом:

$$\begin{cases} dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy \\ d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \end{cases}$$

Сопоставив две последние системы, нетрудно заметить, что

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r} \end{cases} (**)$$

Разберём простой пример.

**Пример 22.** Преобразовать к полярным координатам следующее выражение:  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ .

Решение. Если рассматривать  $z$  как функцию  $z(r, \varphi)$ , где

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \text{ то } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Подставим (\*) и (\*\*) в исходное выражение:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = r \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos \varphi + r \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \left( -\frac{\sin \varphi}{r} \right) +$$

$$+ r \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \sin \varphi + r \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{r} = r \frac{\partial z}{\partial r}.$$

Ответ:  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = r \frac{\partial z}{\partial r}$ . В результате перехода к полярным координатам количество производных в выражении сократилось.

### Задачи для самостоятельного решения к § 2.8.

1. Перейти к полярным координатам

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. , \text{ где } u = u(x, y), v = v(x, y);$$

в условиях Коши-Римана

2. Преобразовать выражение  $y^6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , переходя к новым переменным  $u = x + \frac{1}{4} y^4, v = y$ .

3. Убедиться, что функция удовлетворяет данному уравнению:

а)  $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , если  $z = x \cdot \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ ;

б)  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ , если  $z = y \cdot \varphi(x^2 - y^2)$ .

Ответы.

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{array} \right. ;$$

$$2. \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

### §2.9. Матрица Якоби.

Пусть функции  $u_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, k}$  зависят от  $n$  переменных, непрерывны и дифференцируемы по ним. Введём векторы

$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$  и  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  $\vec{u} = f(\vec{x})$  называется вектор-функцией векторного аргумента. Матрицей Якоби для неё называется матрица, элементами которой являются частные производные от координат вектора  $\vec{u}$  по координатам вектора  $\vec{x}$  :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_k)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{k \times n} \quad (8)$$

В частности, при  $k=1$   $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - скалярная ФНП и для неё

матрица Якоби.  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial u}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} \right]_{1 \times n}$  -

матрица – строка, (это градиент функции  $u$ ,  $\overrightarrow{gradu}$  - см. тему 4).

При  $n=1$   $u_i = f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, k}$  - вектор-функция одной переменной и для неё матрица Якоби

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_k)}{\partial (x)} = \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dx} \\ \frac{du_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{du_k}{dx} \end{bmatrix}_{k \times 1} \quad \text{- матрица – столбец.}$$

Если векторам  $\vec{u}$  и  $\vec{x}$  поставить в соответствие матрицы –

столбцы  $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ , то с помощью матрицы Якоби можно кратко

записать некоторые формулы.

Дифференциал вектор-функции векторного аргумента.

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} d\vec{x} = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} d\vec{x}, \text{ где } \vec{du} = \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ \vdots \\ du_k \end{bmatrix}, \vec{dx} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

(9)

Для сложно заданной вектор-функции векторного аргумента.

$\vec{u} = f(\vec{x})$ , где  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ , а  $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ , имеет место формула для

вычисления частных производных:  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{t}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{t}}$ , которую

с помощью матриц Якоби это можно записать так: (10)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{t}} = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_m)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_m)} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} & \frac{\partial u_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t_1} & \frac{\partial u_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k}{\partial t_1} & \frac{\partial u_k}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial u_k}{\partial t_m} \end{bmatrix}_{k \times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{k \times n} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

**Пример 23.** Для функции  $u = x^3 y^2 z$ , где  $x = \cos t_1 + \sin t_2$ ,  $y = \sin t_1 - \cos t_2$ ,  $z = \operatorname{tg} t_1$  вычислить значения частных

производных  $\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}$  при  $t_1 = t_2 = 0$ .

Решение. Рассмотрим следующую вектор-функцию  $\vec{u}$  вектор-аргумента  $\vec{x}$ .

$$\vec{u} = [u] = (x^3 y^2 z), \quad \vec{x} = (x, y, z) = (\cos t_1 + \sin t_2, \sin t_1 - \cos t_2, \operatorname{tg} t_1)$$

$$\vec{t} = (t_1, t_2) \quad \vec{x}_0 = \vec{x}|_{t_1=t_2=0} = (1, -1, 0).$$

Для вычисления производных используем формулу (10)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{t}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{t}}, \text{ или}$$

$$\frac{\partial(u)}{\partial(t_1, t_2)} = \frac{\partial(u)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t_1, t_2)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1} & \frac{\partial u}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t_1} & \frac{\partial x}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y}{\partial t_1} & \frac{\partial y}{\partial t_2} \\ \frac{\partial z}{\partial t_1} & \frac{\partial z}{\partial t_2} \end{bmatrix}.$$

Вычислим частные производные:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1} & \frac{\partial u}{\partial t_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin t_1 & \cos t_2 \\ \cos t_1 & \sin t_2 \\ \frac{1}{\cos^2 t_1} & 0 \end{bmatrix}. \text{ При}$$

$t_1 = t_2 = 0$  получаем

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_1} & \frac{\partial u}{\partial t_2} \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ответ: } \frac{\partial u}{\partial t_1} \Big|_0 = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} \Big|_0 = 0.$$

**Пример 24.** Найти выражения дифференциалов функций

$u_1 = x^y$  и  $u_2 = xy$ , где  $x = t^2$  и  $y = \ln t$  при  $t=1$ .

Решение. Обозначим

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{x} = (x, y)$ , Дифференциал можно вычислить по формуле:

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{t}} dt = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{t}} dt \text{ или } d\vec{u} = \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{d(x, y)}{dt} dt.$$

Запишем эту формулу в матричном виде и вычислим все производные.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x \\ y & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2t \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix} dt$$

Подставляя  $x(1)=1, y(1)=0$ , получим

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} \Big|_{t=1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ dt \end{bmatrix}.$$

Ответ:  $du_1|_{t=1} = 0, du_2|_{t=1} = dt$ .

## § 2.10. Дифференцирование неявно заданных функций. Случай одной независимой переменной.

**Теорема.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна вместе со своими частными производными в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , в которой  $f(x_0, y_0) = 0$ , а  $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , то уравнение  $f(x, y) = 0$  определяет в окрестности этой точки однозначную непрерывную функцию  $y = y(x)$ , которая имеет в точке конечную производную

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x_0, y_0)} = - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Функция  $y = y(x)$ , задаваемая уравнением  $f(x, y) = 0$ , называется неявно заданной.

### Случай нескольких независимых переменных.

**Теорема.** Если ФНП  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  определена и непрерывна вместе со своими частными производными по всем переменным в окрестности некоторой точки  $(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n, y^0) \in R^{n+1}$ , в которой  $f(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n, y^0) = 0$ , а  $f'_y(x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_n, y^0) \neq 0$ , то в окрестности этой точки уравнение  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$  определяет однозначную непрерывную ФНП  $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , и эта функция имеет конечные частные производные

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{x^0} = - \frac{f'_{x_i}(x^0, y^0)}{f'_y(x^0, y^0)}.$$

В частности, если  $f(x, y, z) = 0$  задаёт

неявную функцию  $z = z(x, y)$ , то её частные производные могут быть

найденны следующим образом:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}$ .  
(11)

В этих формулах  $f(x, y, z)$  рассматривается как функция трёх переменных.

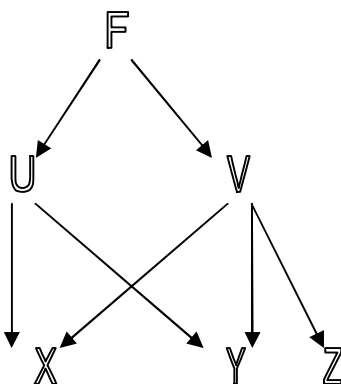
**Пример 25.** Функция  $z$  задана неявно уравнением

$$F(x^2 - y^2, yz - x) = 0. \text{ Найти } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Решение. Левая часть уравнения является сложной функцией переменных  $x, y, z$ . Обозначим  $x^2 - y^2 = u, yz - x = v$ .

Тогда  $F(u, v) = 0$ . Воспользуемся формулами  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$

Для нахождения частных производных построим схему зависимости  $F$  от переменных.



$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = F'_u(u, v) \cdot 2x - F'_v(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -F'_u(u, v) \cdot 2y + zF'_v(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = yF'_v(u, v).$$

Подставляя полученные производные в формулы, для  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,

получим

Ответ:  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_u(u, v) \cdot 2x - F'_v(u, v)}{yF'_v(u, v)}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-F'_u(u, v) \cdot 2y + zF'_v(u, v)}{yF'_v(u, v)}$ .

**Замечание.** Не всегда удобно пользоваться готовыми формулами для вычисления частных производных от неявно заданной функции.

Возможен другой способ их вычисления. Он заключается в том, что берутся частные производные от обеих частей уравнения, задающего неявно функцию нескольких переменных. Например, если функция  $z$

задаётся уравнением  $f(x, y, z) = 0$ , то находим  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , дифференцируя обе части уравнения по переменной  $x$ , при этом помним, что  $z$  зависит

от  $x$  и  $y$ :  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z(x, y)) = 0$ . Аналогично для нахождения  $\frac{\partial z}{\partial y}$

дифференцируем обе части по переменной  $y$ :  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z(x, y)) = 0$ .

**Пример 26.** Функция  $z$  задана уравнением  $x^2 z + z^2 y + xy^2 = 3$ .  
Вычислить значение производной  $z''_{xy}$  в точке  $M(1,1,1)$ .

Решение. Вычислим частную производную  $z'_x$ , продифференцировав обе части уравнения по переменной  $x$ , помня, что  $z$  является функцией, зависящей от  $x$  и  $y$ .

$$\begin{aligned} (x^2 z + z^2 y + xy^2)'_x &= (3)'_x \\ (2xz + x^2 z'_x) + (2zz'_x y) + y^2 &= 0 \quad (\text{a}) \end{aligned}$$

Для вычисления  $z''_{xy}$  можно из полученного равенства (а) выразить  $z'_x$  и продифференцировать её по  $y$ , а можно обе части этого равенства ещё раз продифференцировать, но уже по  $y$ , не забывая, что  $z$ ,  $z'_x$ ,  $z''_{xy}$  зависят от этой переменной.

$$\begin{aligned} (2xz + x^2 z'_x + 2zz'_x y + y^2)'_y &= (0)'_y \\ 2xz'_y + x^2 z''_{xy} + 2(z'_y z'_x y + zz''_{xy} y + zz'_x) + 2y &= 0 \quad (\text{б}) \end{aligned}$$

Видим, что для вычисления значения  $z''_{xy}(M)$  необходимо знать значения  $z'_x$  и  $z'_y$  в этой точке. Вернёмся к исходному уравнению и для вычисления  $z'_y$  продифференцируем обе части по переменной  $y$ .

$$(x^2 z + z^2 y + xy^2)'_y = (3)'_y. \text{ Помним, что } z \text{ зависит от } y!$$

$$x^2 z'_y + (2zz'_y y + z^2) + 2xy = 0 \quad (\text{в})$$

Подставим координаты точки  $M(1,1,1)$  в (а) и (в) и вычислим значения производных первого порядка в этой точке:

$$z'_x(M) = -1, \quad z'_y(M) = -1.$$

Из соотношения (б) теперь получаем значение смешанной производной второго порядка:

$$2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot z''_{xy}(M) + 2(-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot z''_{xy}(M) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0$$

Ответ:  $z''_{xy}(M) = -1$ . ☺

Есть ещё способ нахождения частных производных неявно заданной функции, аналогичный представленному выше – с помощью вычисления дифференциала обеих частей равенства. При этом все переменные будем считать равноправными, не зависящими друг от друга. Рассмотрим пример:

**Пример 27.** Для функции  $z(x, y)$ , заданной неявно уравнением  $x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz$ , найти обе частные производные.

Решение. Вычислим первый дифференциал обеих частей равенства:

$d(x^4 + y^4 + z^4) = d(4xyz)$ . Используя свойства дифференциала, получаем:

$$4x^3 dx + 4y^3 dy + 4z^3 dz = 4yz dx + 4xz dy + 4xy dz$$

Теперь выразим  $dz$  :

$$dz = \frac{yz - x^3}{z^3 - xy} dx + \frac{xz - y^3}{z^3 - xy} dy$$

Сравнивая полученное выражение с

формулой  $dz = z'_x dx + z'_y dy$ , получим ответ:

$$z'_x = \frac{yz - x^3}{z^3 - xy}, \quad z'_y = \frac{xz - y^3}{z^3 - xy}.$$

### Задачи для самостоятельного решения к § 2.10.

1. Вычислить в точке  $M$  частные производные первого порядка функции  $z = z(x, y)$ , заданной неявно, предварительно найдя её первый дифференциал:

а)  $z^4 + zx^3 + zy^3 = a^4$ ;  $M(a, -a, a)$ ;

б)  $\frac{z}{x^2 + y^2} = \ln(x + y + z)$ ,  $M(-1, 2, 0)$

Проверить ответы, вычислив производные по формулам

2. Для следующих функций  $z = z(x, y)$  найти значение производных  $z'_x$ ,  $z'_y$ ,  $z''_{xy}$  с помощью дифференцирования обеих частей уравнения:

а)  $x^2 + zx + z^2 + y = 0$ ;

б)  $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 2 \ln(xyz)$ ,  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

Ответы.

$$1. \text{ a) } z'_x = -\frac{3x^2z}{4z^3 + x^3 + y^3} \Big|_M = -\frac{3}{4}, \quad z'_y = -\frac{3y^2z}{4z^3 + x^3 + y^3} \Big|_M = -\frac{3}{4};$$

$$\text{б) } z'_x(M) = -\frac{5}{4}, \quad z'_y(M) = -\frac{5}{4};$$

$$2. \text{ a) } z'_x = -\frac{2x+z}{x+2z}, \quad z'_y = -\frac{1}{x+2z};$$

$$\text{б) } z'_x = \frac{z(x^2-1)}{x(1+z^2)}, \quad z'_y = \frac{z(y^2-1)}{y(1+z^2)}, \quad z''_{xy} = \frac{z(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{xy(1+z^2)^3}$$

### § 2.11. Формула Тейлора.

Если функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  дифференцируема  $(m+1)$  раз в окрестности точки  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , то для всякой точки  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , принадлежащей этой окрестности, имеет место формула Тейлора:

$$f(P) = f(P_0) + \frac{1}{1!} df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_0) + \dots + \frac{1}{m!} d^m f(P_0) + R_m, \text{ где}$$

$R_m$  - остаточный член.  $R_m = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\tilde{P})$ ,  $\tilde{P}$  - точка той же

окрестности (форма Лагранжа) или  $R_m = O(\rho^m)$ ,

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} \text{ (форма Пеано).} \quad (12)$$

Для функции двух переменных  $z = f(x, y)$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} (f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)) +$$

$$\frac{1}{2!} (f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \quad (13)$$

$$+ \dots + \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right)^m f(x_0, y_0) + R_m(x, y)$$

$$R_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} (y - y_0) \right)^{m+1} f(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0))$$

$$0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1 \text{ или } R_m = O(\rho^m), \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

**Пример 28.** Разложить функцию  $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $P_0(0;1)$  до членов второго порядка включительно.

Решение. Находим частные производные функции  $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$  до второго порядка включительно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^3}\right) + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

В точке  $P_0(0;1)$  имеем:  $f(P_0) = 1, \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = -1.$$

Подставляя полученные результаты в формулу Тейлора (13) для  $z = f(x, y), m = 2$ , получаем ответ:

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_3, \text{ где}$$

$$R_3 = O(x^2 + (y-1)^2) \text{ (в форме Пеано).}$$

### Тема 3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Определение. Касательной плоскостью к поверхности в точке  $M_0$  называется плоскость, содержащая все касательные к кривым, принадлежащим поверхности и проходящим через точку  $M_0$ .

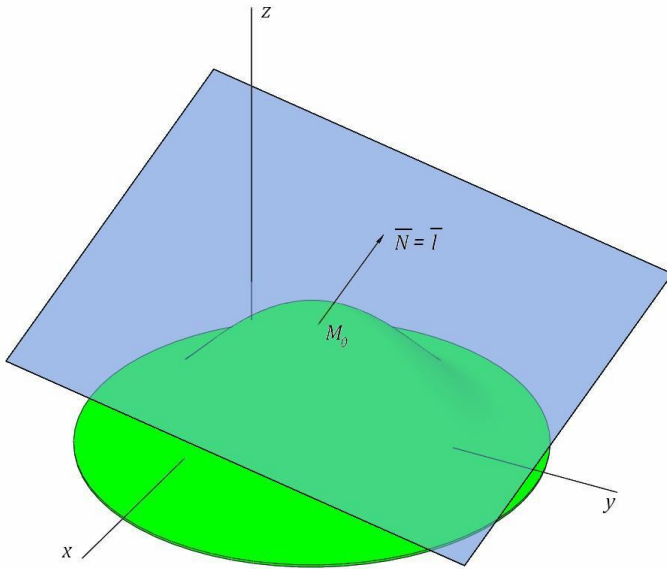
Нормаль к поверхности – это прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящей через точку касания  $M_0$ .

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку  $M_0$ :

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \quad (14)$$

где А, В, С – координаты вектора  $\vec{N}$ , перпендикулярного к плоскости.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$  - точка касания,  $\vec{N} = \{A, B, C\}$  - нормальный вектор.



Уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0$ :

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (15)$$

- где  $m, n, p$  – координаты направляющего вектора  $\vec{l} = \{m, n, p\}$ .

Для нормали в качестве направляющего вектора можно взять вектор  $\vec{N} = \{A, B, C\} = \vec{l}$ . Если уравнение поверхности имеет вид  $F(x, y, z) = 0$ , то нормальный вектор к ней в

точке  $M_0$ :  $\vec{N} = k \{F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)\}$ . (16)

$$A = F'_x(M_0), \quad B = F'_y(M_0), \quad C = F'_z(M_0).$$

Если уравнение поверхности имеет вид  $z = f(x, y)$ , то

$$\vec{N} = \{f'_x(M_0), f'_y(M_0), -1\}.$$

( Это уравнение можно переписать в виде  $f(x, y) - z = 0$  и положить  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ .)

**Пример 29.** Составить уравнения плоскостей, касательных к поверхности  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  и параллельных плоскости  $x + 4y + 6z = 8$ .

Решение. Касательная плоскость имеет уравнение вида (14):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Так как она параллельна плоскости  $x + 4y + 6z = 8$ , то её нормальный вектор  $\vec{N} = \{A, B, C\}$  коллинеарен нормальному вектору этой плоскости  $\vec{N}_1 = \{1, 4, 6\}$ . Необходимо найти точку касания  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Координаты этой точки фигурируют при отыскании нормального вектора  $\vec{N}$  к поверхности. Рассмотрим уравнение поверхности в виде  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$ . Вычислим частные производные функции  $F(x, y, z)$  в точке касания  $M_0$ :

$$\left. \begin{array}{l} F'_x = 2x \\ F'_y = 4y \\ F'_z = 6z \end{array} \right|_{M_0(x_0, y_0, z_0)} = \left. \begin{array}{l} = 2x_0 \\ = 4y_0 \\ = 6z_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{N} = \{2x_0, 4y_0, 6z_0\} \quad (\text{из (16)})$$

Из условия коллинеарности векторов  $\vec{N}$  и  $\vec{N}_1$  следует пропорциональность их координат. Мы получим два уравнения с

тремя неизвестными:  $\vec{N} \parallel \vec{N}_1 \Rightarrow \frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{4} = \frac{6z_0}{6}$

Третье уравнение получим, если учтём, что точка  $M_0$  должна принадлежать поверхности, а, следовательно, её координаты обращают уравнение поверхности в тождество:  $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21$

Для нахождения неизвестных  $x_0, y_0, z_0$  решаем систему:

$$\begin{cases} 2x_0 = y_0 = z_0 \\ x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x_0 \\ z_0 = 2x_0 \\ x_0^2(1 + 8 + 12) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \pm 1 \\ y_0 = \pm 2 \\ z_0 = \pm 2 \end{cases}$$

Нашли две точки касания  $M_1(1, 2, 2)$  и  $M_2(-1, -2, -2)$ .

Составим искомые уравнения касательных плоскостей с нормальным вектором  $\vec{N}_1 = \{1, 4, 6\}$ , подставляя координаты точек и вектора в уравнение (14).

Ответ: через точку  $M_1(1, 2, 2)$ :  $(x-1) + 4(y-2) + 6(z-2) = 0$ ,

через точку  $M_2(-1, -2, -2)$ :  $(x+1) + 4(y+2) + 6(z+2) = 0$ .

### Задачи для самостоятельного решения к теме 3.

1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = x^2 + y^2$  в точке  $M(1, 2, 5)$ .
2. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$  в точке  $M_1(2, 2, 1)$ .
3. Найти точку поверхности  $x^2 - 3y^2 + 6z = 0$ , в которой нормаль параллельна вектору  $\vec{N} = \{1, 1, 2\}$ .
4. Составить уравнение той касательной плоскости к поверхности

$z = x^2 y^3 - xy^2 - \frac{3}{8}$ , которая перпендикулярна прямой

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{-4}.$$

5. Указать координаты тех точек касания сферы

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4 \text{ и конуса } z^2 = x^2 + y^2, \text{ для которых } y=0.$$

Ответы.

$$4. x + 4y - 4z - \frac{11}{2} = 0.$$

#### Тема 4. Производная по направлению. Градиент.

Рассмотрим функцию  $u = f(x, y, z)$ , дифференцируемую в некоторой области  $D \in R^3$ . В точке  $P_1(x_1, y_1, z_1) \in D$  дадим приращение переменным  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  так, чтобы точка  $P(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, z_1 + \Delta z) \in D$ . Пусть вектор  $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{\Delta l}$ , его длина  $|\overrightarrow{P_1P}| = |\Delta l|$ ,  $\vec{l} \parallel \overrightarrow{\Delta l}$ .

Определение. Производной функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  по направлению вектора  $\vec{l}$  называется предел отношения приращения функции, соответствующего приращению  $\Delta l$ , к самому  $\Delta l$  при условии его стремления к нулю.

$$\frac{\partial u}{\partial l}(P_1) = \lim_{\substack{P \rightarrow P_1 \\ \vec{P_1P} \uparrow \vec{l}}} \frac{f(P) - f(P_1)}{|\overrightarrow{P_1P}|} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Если функция  $u = f(x, y, z)$  дифференцируема в точках некоторой области, то в этих точках производная вычисляется по следующей

$$\text{формуле: } \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (17)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, образуемые вектором  $\vec{l}$  с соответствующими осями координат.

Если  $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ , то

$$\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}, \quad \cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}, \quad \cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}. \quad (18)$$

Направляющие косинусы вектора  $\vec{l}$  удовлетворяют равенству:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Для функции двух переменных  $z = f(x, y)$  производная по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha, \quad \text{т. к. } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \cos \beta = \sin \alpha. \quad (19)$$

Производная по направлению в точке есть скорость изменения функции в данном направлении.

Определение. Градиентом функции  $u = f(x, y, z)$  называется вектор, координатами которого являются соответствующие частные

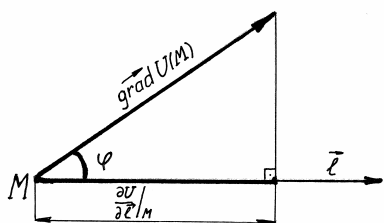
производные данной функции.  $\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$

$$\text{Для } z = f(x, y) \quad \vec{\text{grad}} z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\} \quad (21)$$

Если  $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ - единичный вектор заданного направления, то из формулы (17) следует, что производная по направлению  $\vec{l}$ -равна скалярному произведению векторов  $\vec{\text{grad}} U$  и  $\vec{l}$ , т.е.  $\frac{\partial U}{\partial l} = (\vec{\text{grad}} U, \vec{l}).$

Но  $(\vec{\text{grad}} U, \vec{l}) = |\vec{\text{grad}} U| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos \varphi.$  Тогда  $\frac{\partial U}{\partial l} = |\vec{\text{grad}} U| \cdot \cos \varphi,$  т. к.  $|\vec{l}| = 1.$

Здесь  $\varphi$  - угол между вектором градиента в данной точке и единичным вектором  $\vec{l}.$



Отсюда следуют основные свойства градиента функции:

1. Вектор  $\vec{\text{grad}} U$  в данной точке указывает направление наибольшего роста функции  $U$  в этой точке. При этом наибольшее значение производной по направлению в точке  $M$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial (\vec{\text{grad}} U)} \right|_M = \left\| \vec{\text{grad}} U \right\|_M = \sqrt{\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2} \quad (22)$$

2. Градиент функции трёх (двух) переменных в точке  $M$  ортогонален к поверхности (линии) уровня, проходящей через точку  $M$ .

**Пример 30.** Найти производную функции  $u = x^2 y + y^3 - xyz$  в точке  $M(1; -1; -2)$  по направлению от неё к точке  $N(4; 3; 10)$ .

Решение. Производная функции  $u$  вычисляется

$$\text{по формуле } \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma .$$

Найдём частные производные функции в точке  $M$ .

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = 2xy - yz \Big|_M = -4, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = x^2 + 3y^2 - xz \Big|_M = 6, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = -xy \Big|_M = 1$$

В качестве вектора направления возьмём

$$\vec{l} = \vec{MN} = (3, 4, 12), \quad \left| \vec{MN} \right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13. \quad \text{Тогда направляющие косинусы}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{13}, \quad \cos \beta = \frac{4}{13}, \quad \cos \gamma = \frac{12}{13}.$$

Подставляем найденные величины в формулу и получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial l}(M) = -4 \cdot \frac{3}{13} + 6 \cdot \frac{3}{13} + 1 \cdot \frac{12}{13} = \frac{24}{13}.$$

Ответ:  $\frac{\partial U}{\partial l}(M) = \frac{24}{13}$ .

Замечание Т.к.  $\frac{\partial U}{\partial l}(M) > 0$ , функция в данном направлении

возрастает.

**Пример 31.** Найти наибольшее значение производной по направлению для функции  $U = xyz$  в точке  $M(1;2;3)$ .

Решение. Известно, что направление наибольшего возрастания

функции указывает вектор градиента.  $\vec{grad}U \Big|_M = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M \vec{k}$ .

Вычислим значения частных производных в точке  $M$ :  $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M = yz \Big|_M = 6$ ,

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M = xz \Big|_M = 3 \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M = xy \Big|_M = 2 \Rightarrow \vec{grad}U \Big|_M = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$\max \frac{\partial U}{\partial l} = \left\| \vec{grad}U \right\|_M = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \Big|_M$$

Отсюда следует, что  $\max \frac{\partial U}{\partial l} \Big|_M = \sqrt{36+9+4} = 7$ .

Это значение достигается в направлении  $\vec{l} = \vec{grad}U \Big|_M = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ .

Ответ:  $\max \frac{\partial U}{\partial l} \Big|_M = 7$ .

**Пример 32.** Найти  $\vec{grad}z$  в точке  $M(1,2)$  и линию уровня, проходящую через эту точку, для функции  $z = x^2 + y^2$ . Убедиться в их ортогональности.

Решение. а) По определению,  $\vec{grad} z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\}$ . (см. (21))

Вычислим частные производные функции  $z$  в точке  $M$ .

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = 2x|_M = 2; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2y|_M = 4.$$

Отсюда следует, что  $\left. \vec{grad} z \right|_M = \{2; 4\}$ .

б) Для отыскания линии уровня положим  $z=C$ . Тогда  $x^2 + y^2 = C$ . Это уравнения окружностей.

Для линии уровня, проходящей через точку  $M(1,2)$ , выполняется условие  $1+4=C$ . То есть ей соответствует значение  $C=5$ . Отсюда следует, что уравнение искомой линии уровня  $x^2 + y^2 = 5$ .

Убедимся в том, что в точке  $M(1,2)$  вектор  $\vec{grad} z$  ортогонален к найденной линии уровня, то есть он перпендикулярен касательной к окружности  $x^2 + y^2 = 5$  в точке  $M$ .

Тангенс угла  $\varphi$  наклона касательной к окружности в точке  $M$ :

$$tg\varphi = y'(M) = -\frac{f'_x(M)}{f'_y(M)} = -\frac{2x}{2y}\bigg|_M = -\frac{1}{2}$$

Угол наклона  $\vec{grad} z$  к положительному направлению оси  $Ox$  обозначим  $\psi$ :

$$tg\psi = \frac{4}{2} = 2. \text{ Из формулы } tg(\psi - \varphi) = \frac{tg\psi - tg\varphi}{1 + tg\psi \cdot tg\varphi} \text{ следует, что, т.к.}$$

$$tg\varphi \cdot tg\psi = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1, \quad \psi - \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ ч. т. д.}$$

Ответ:  $\left. \vec{grad} z \right|_M = \{2; 4\}, \quad x^2 + y^2 = 5$ .

#### Задачи для самостоятельного решения к теме 4.

1. Найти направление наиболее быстрого роста функции  $z = ye^{\sqrt{x}}$  в точке  $P(4;3)$  и вычислить скорость роста функции в этом направлении.

2. Найти производную функции  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  в точке  $D(5;3)$  в направлении, образующем угол  $\frac{\pi}{6}$  с положительным направлением оси ОХ.
3. Найти угол между градиентами функций  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $v = -x + \frac{y}{4} + \sqrt{3xy}$  в точке  $M(3;4;0)$ .
4. В точке  $M(2;-1;3)$  найти производную функции  $u = x^2 - y^2 + z^2$  по направлению от этой точки к точке  $N(0;1;2)$ . Выяснить, в каком направлении в этой точке достигается наибольшая скорость изменения функции и чему она равна.

### Тема 5. Экстремум функции нескольких переменных.

Определение. Точка  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in R^n$  называется точкой локального максимума (или минимума) функции нескольких переменных  $y = f(x)$ , если существует такая её проколотая окрестность, что для всех точек  $x$ , принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство  $f(x) < f(x^0)$  (или  $f(x) > f(x^0)$ ).

Общее название точек локального максимума и минимума – точки локального экстремума функции.

Определение. Значение функции в точке локального экстремума называется локальным экстремумом функции.

**Теорема.** (Необходимое условие экстремума ФНП).

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , имеет в ней конечные частные производные по всем переменным, и точка  $x^0$  является точкой локального экстремума этой функции, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следствие. Если точка  $x^0$  является точкой локального экстремума дифференцируемой в ней функции, то  $df(x^0) = 0$ .

Определение. Точка, в которой все частные производные функции  $y = f(x)$  обращаются в нуль, называется стационарной точкой.

Стационарная точка может быть точкой локального экстремума, а может и не быть ею.

**Теорема.** (Достаточное условие экстремума ФНП). Если функция  $y = f(x)$  непрерывна вместе с частными производными до второго порядка включительно в окрестности стационарной точки  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  и дифференциал второго порядка  $d^2f$  в этой точке

знакоопределён, то эта точка  $x^0$  является точкой локального экстремума, причём, если  $d^2 f(x^0) > 0$ , то  $x^0$  - точка локального минимума, а если  $d^2 f(x^0) < 0$ , то  $x^0$  - точка локального максимума.

Замечание. Второй дифференциал ФНП

$d^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f$  есть квадратичная форма  $F(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  с матрицей Гессе (1)

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Тогда из критерия Сильвестра следует, что если все главные миноры матрицы  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$

$H(x^0)$  положительны, то в точке  $x^0$   $d^2 f > 0$  и она является точкой минимума, если же главные миноры чередуют знаки, начиная с минуса, то  $d^2 f < 0$  и точка  $x^0$  является точкой максимума.

Если  $d^2 f(x^0) = 0$ , то необходимы дополнительные исследования.

В частности, рассмотрим план исследования на экстремум функции  $z = f(x, y)$ .

1. Используя необходимые условия экстремума, найдём стационарные точки, где возможен экстремум. Для этого решим систему.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow M_i(x_i, y_i).$$

2. Вычислим частные производные второго порядка в каждой из найденных стационарных точек  $M_i(x_i, y_i)$  и составим выражение для  $d^2 z(M_i)$ .

$$d^2 z(M_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_i) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_i) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_i) dy^2 = A_i dx^2 + 2B_i dx dy + C_i dy^2$$

Исследуем полученную квадратичную форму  $F(dx, dy)$  на знакоопределённость.

Матрица Гессе  $H = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ B_i & C_i \end{pmatrix}$ . Её главные миноры  $\Delta_1 = A_i$  и

$\Delta_2 = \det H = A_i C_i - B_i^2$ . Для знакоопределённости  $d^2 z(M_i)$  требуется, чтобы  $\Delta_2 = A_i C_i - B_i^2 > 0$ . Откуда следует, что

а) если  $\Delta_2 = A_i C_i - B_i^2 > 0$ , то в точке  $M_i$  достигается экстремум, причём при  $\Delta_1 = A_i > 0$  это минимум функции, а при  $\Delta_1 = A_i < 0$  - максимум;

б) если  $\Delta_2 = A_i C_i - B_i^2 < 0$ , то  $M_i$  не является точкой экстремума;

в) если  $\Delta_2 = A_i C_i - B_i^2 = 0$ , необходимы дополнительные исследования.

3. Если точка  $M_i$  оказалась точкой локального экстремума, то вычисляем экстремум функции в ней.  $z = f(M_i)$ .

**Пример 33.** Исследовать на экстремум функцию  $z = (x-1)^2 + 2y^2$ .

Решение. (См. план исследования.)

1. Находим точки, где возможен экстремум. Используем необходимые условия экстремума.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2(x-1) \\ f'_y(x, y) = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1, 0).$$

2. Функция может достигать экстремума только в одной точке. Для выяснения вопроса о наличии экстремума в ней применяем достаточное условие

$$\left. \begin{array}{l} f''_{xx}(1, 0) = 2 = A \\ f''_{yy}(1, 0) = 4 = C \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 8 > 0, \text{ экстремум есть, } A = 2 > 0 \Rightarrow,$$

Точка  $M_0$  является точкой локального минимума функции,  $z_{\min}(1, 0) = 0$ .

**Замечание.**

Так как  $d^2 f(x, y) = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2$ , в точке  $M_0$  получаем

$d^2 f(1, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 > 0$  для любых  $dx$  и  $dy$ , одновременно не равных нулю, что гарантирует наличие минимума в точке  $M_0$ .

Ответ:  $z_{\min}(1, 0) = 0$

**Пример 34.**  $z = (x-1)^2 - 2y^2$

Решение аналогично. (См. план исследования)

$$1. \begin{cases} f'_x(x, y) = 2(x-1) \\ f'_y(x, y) = -4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1, 0) \text{ - стационарная точка,}$$

где возможен экстремум.

$$2. \left. \begin{array}{l} f''_{xx}(1, 0) = 2 = A \\ f''_{yy}(1, 0) = 0 = B \\ f''_{yy}(1, 0) = -4 = C \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -8 < 0 \Rightarrow \text{экстремума нет.}$$

Замечание.  $d^2 f(1, 0) = 2dx^2 - 4dy^2$ . Это выражение меняет знак в зависимости от выбора  $dx$  и  $dy$ . Например, если  $dx \neq 0$ , а  $dy = 0$ . То  $d^2 f(1, 0) = 2dx^2 > 0$ , а если  $dx = 0$ , а  $dy \neq 0$ . То  $d^2 f(1, 0) = -4dy^2 < 0$ .

Отсюда следует, что экстремум в точке  $M_0(1, 0)$  отсутствует, т. к.  $d^2 f(1, 0)$  знаконеопределённый.

**Пример 35.** Исследовать на экстремум функцию

$$u = 4x^2 + 4y^2 + z^3 - 2xy + 4x + 2y - 12z.$$

Решение.

1. Найдём стационарные точки, используя необходимое условие экстремума.

$$\begin{cases} u'_x = 8x - 2y + 4 \\ u'_y = 8y - 2x + 2 \\ u'_z = 3z^2 - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y + 2 = 0 \\ 4y - x + 1 = 0 \\ z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1\left(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 2\right), M_2\left(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -2\right) \text{ -}$$

стационарные точки.

2. Составим матрицы Гессе  $H(M_1)$  и  $H(M_2)$  и исследуем на знакоопределённость  $d^2 u$  в каждой точке.

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= 8, & u''_{xy} &= -2, \\ u''_{yy} &= 8, & u''_{xz} &= 0, \\ u''_{zz} &= 6z, & u''_{yz} &= 0. \end{aligned}$$

$$H(M_1) = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 8 > 0, \Delta_2 = 60 > 0, \Delta_3 = 720 > 0 \Rightarrow$$

$d^2 u(M_1) > 0 \Rightarrow$  точка  $M_1$  - точка минимума.

$$H(M_2) = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 8 > 0, \Delta_2 = 60 > 0, \Delta_3 = -720 < 0 \Rightarrow$$

$d^2u(M_2)$  знаконеопределён  $\Rightarrow$  точка  $M_2$  не является точкой экстремума.

Ответ:  $u_{\min}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 2\right) = -\frac{88}{5}$ .

#### Задачи для самостоятельного решения к теме 4.

1. Исследовать на экстремум функции:

а)  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$  ;

б)  $z = -4y^3 + x^2 + 6xy + 2$  ;

в)  $z = y^3 + x^3 - 3xy + 3$ .

#### Тема 6. Условный экстремум функции двух переменных.

Рассмотрим следующую задачу.

**Задача.** Требуется найти максимум или минимум функции  $z = f(x, y)$ , достигнутый при условии, что её аргументы связаны уравнением  $\varphi(x, y) = 0$  (уравнение связи).

Если функции  $z = f(x, y)$  соответствует некоторая поверхность, то в этой задаче требуется найти точки, которые, во-первых, принадлежат линии пересечения поверхности  $z = f(x, y)$  и цилиндра, параллельного оси OZ, уравнение которого  $\varphi(x, y) = 0$ , и, во-вторых, функция  $z = f(x, y)$  принимает экстремальные значения. (см. рис. 5)

**Замечание.** Построим на плоскости XOY линии уровня функции  $z = f(x, y)$  и кривую  $l$ , соответствующую уравнению  $\varphi(x, y) = 0$ . Если точка  $M_0$  - искомая точка, то линия уровня, проходящая через неё, и кривая  $l$  имеют в этой точке общую касательную и находятся в некоторой окрестности точки  $M_0$  по разные стороны от неё. (рис. )

План решения задачи.

Составляется «функция Лагранжа»:

$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ , где  $\lambda$  – некоторый множитель, и решается задача о нахождении обычного экстремума этой функции.

1. Точки, где возможен экстремум, находятся из необходимых условий экстремума, к которым надо присоединить уравнение связи:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow M_i(x_i, y_i), \lambda_i$$

2. Для выяснения наличия или отсутствия экстремума в найденных точках необходимо воспользоваться достаточным признаком экстремума. Возможны следующие варианты.

а) Можно, как в задаче о безусловном экстремуме, составить дискриминант  $\Delta = AC - B^2$ , где  $A = F''_{xx}(M_i)$ ,  $B = F''_{xy}(M_i)$ ,  $C = F''_{yy}(M_i)$ . Затем сделать соответствующие выводы:

$$\begin{cases} \text{если } \Delta > 0 \Rightarrow \text{условный экстремум в точке } M_i \text{ есть} \Rightarrow \begin{cases} A > 0 - \text{минимум} \\ A < 0 - \text{максимум.} \end{cases} \\ \text{если } \Delta \leq 0 - \text{требуется дополнительные исследования.} \end{cases}$$

б) Можно поступить иначе, а именно, составить определитель третьего порядка

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_i) & \varphi'_y(M_i) \\ \varphi'_x(M_i) & F''_{xx}(M_i) & F''_{xy}(M_i) \\ \varphi'_y(M_i) & F''_{xy}(M_i) & F''_{yy}(M_i) \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{если } D > 0, M_i - \text{точка условного минимума,} \\ \text{если } D < 0, M_i - \text{точка условного максимума,} \\ \text{если } D = 0, \text{вопрос остаётся открытым.} \end{cases}$$

в) Наконец, можно вопрос о наличии условного экстремума решить, рассмотрев второй дифференциал функции Лагранжа в точке  $M_i$ , т. е.

$d^2F(x, y) = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$ , учтя при этом, что  $dx$  и  $dy$  связаны между собой уравнением  $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$  (вычислен дифференциал левой и правой части уравнения связи  $\varphi(x, y) = 0$ ), где  $dx$  и  $dy$  не обращаются одновременно в ноль. Тогда

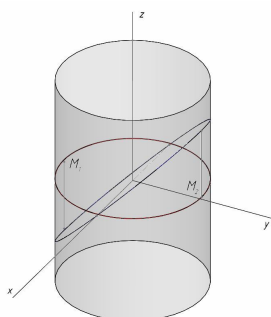
$$d^2F(M_i) \Big|_{\substack{\text{при условии} \\ \varphi'_x(M_i)dx + \varphi'_y(M_i)dy = 0}} = Ldy^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L > 0 - \text{точка условного минимума,} \\ L < 0 - \text{точка условного максимума,} \\ L = 0 - \text{вопрос открыт} \end{cases}$$

**Пример 36.** Найти условные экстремумы функции  $z = x + 2y$  при условии  $x^2 + y^2 = 5$ .

Геометрически это выглядит следующим образом. Наклонная плоскость пересекается круговым цилиндром. В пересечении получается наклонный эллипс, на котором имеются точки условного экстремума (рис. ).

Решение. (См. план решения задачи)



1. Составляем функцию Лагранжа

$$F(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Находим точки, где возможен условный экстремум этой функции, решая соответствующую систему.

$$\begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x \\ F'_y = 2 + 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}, M_1(-1; -2), \lambda_2 = -\frac{1}{2}, M_2(1; 2)$$

2. Находим вторые производные от функции Лагранжа и используем достаточное условие в форме а).

$$\begin{cases} F''_{xx} = 2\lambda = A \\ F''_{xy} = 0 = B \\ F''_{yy} = 2\lambda = C \end{cases} \Rightarrow \Delta = 4\lambda^2 > 0, \text{ - в обеих точках имеется условный экстремум}$$

$A(M_1) = 2\lambda_1 = 1 > 0 \Rightarrow M_1$  – точка условного минимума,

$A(M_2) = 2\lambda_2 = -1 < 0 \Rightarrow M_2$  – точка условного максимума.

Ответ:  $z_{\min}(-1; -2) = -5$   $z_{\max}(1; 2) = 5$ .

**Пример 37.** Найти условные экстремумы функции  $z = xy$  при условии  $x + y = 1$ .

Решение. (См. план решения задачи)

1. Составляем функцию Лагранжа  $F(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$

Находим точки, где возможен условный экстремум, решая соответствующую систему.

$$\begin{cases} F'_x = y + \lambda \\ F'_y = x + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ 2\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);$$

2. Для выяснения вопроса о наличии в точке  $M_0$  условного экстремума используем достаточные условия в форме а).

$$\begin{cases} F''_{xx} = 0 = A \\ F''_{xy} = 1 = B \\ F''_{yy} = 0 = C \end{cases} \Rightarrow \Delta = -1 < 0$$

– вопрос о наличии экстремума остаётся открытым

Воспользуемся условием б): Для этого составим соответствующий определитель третьего порядка  $D$  и вычислим его.

$$\varphi'_x = 1; \varphi'_y = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0 \Rightarrow M_0 \text{ – точка условного максимума}$$

Ответ:  $z_{\max}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ .

Замечание. Можно было бы воспользоваться условием (в). Вычислим  $d^2F$  в точке  $M_0$ .

$$d^2F(M_0) = 0dx^2 + 2dxdy + 0dy^2 = 2dxdy$$

$dx$  и  $dy$  связаны между собой уравнением, которое получается из уравнения связи  $x + y = 1$  следующим

$$\text{образом: } d(x + y) = d1 \Rightarrow dx + dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$$

и тогда  $d^2F(M_0) = -2dy^2 < 0 \Rightarrow M_0$  - точка максимума.

**Пример 38.** Определить размеры цилиндрического закрытого резервуара с данной площадью поверхности  $S$ , имеющего максимальный объём.

Решение. Пусть  $x$  – радиус основания,  $y$  – высота резервуара. Тогда объём его  $z = \pi x^2 y$ . Полная площадь поверхности  $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ .

Требуется найти условный экстремум функции, если  $2\pi x^2 + 2\pi xy - S = 0$ .

Решение. 1. Составляем функцию Лагранжа

$$F(x, y) = \pi x^2 y + \lambda(2\pi(x^2 + xy) - S)$$

Используя необходимые условия получаем систему для нахождения точек  $(x, y)$ , где возможен условный экстремум.

$$\begin{cases} F'_x = 2\pi xy + \lambda \cdot 2\pi(2x + y) \\ F'_y = \pi x^2 + \lambda \cdot 2\pi x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ x^2 + \lambda \cdot 2x = 0 \\ 2\pi x^2 + 2\pi xy = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ x(x + \lambda \cdot 2) = 0 \\ 2\pi x(x + y) = S \end{cases}$$

$x \neq 0$ , т.к. радиус резервуара не может быть равен нулю.

$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ \lambda \cdot (y + 4\lambda) = 0 \\ -4\pi x(-2\lambda + y) = S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -4\lambda, \lambda < 0 \\ 24\pi\lambda^2 = S \end{cases}$$

$\lambda \neq 0$ , иначе  $x = 0$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{S}{24\pi}}; \quad x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}; \quad y = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}} \Rightarrow M_0\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}; \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}\right);$$

2. Вычислив производные второго порядка функции Лагранжа в полученной точке, используем достаточное условие существования экстремума в форме а).

$$\begin{cases} F''_{xx} = 2\pi y + 4\pi\lambda \\ F''_{xy} = 2\pi x + 2\pi\lambda \\ F''_{yy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} A = -4\pi\lambda \\ B = -2\pi\lambda \\ C = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -4\pi^2\lambda^2 < 0 - \text{вопрос открыт}$$

Составим выражение  $d^2F$  в точке  $M_0$  и используем условие в):

$$d^2F(M_0) = -4\pi\lambda dx^2 - 4\pi\lambda dx dy = -4\pi\lambda(dx^2 + dx dy)$$

Найдём связь между  $dx$  и  $dy$  из уравнения связи:

$$d(x^2 + xy) = d\left(\frac{S}{2\pi}\right) \Rightarrow (2x + y)dx + xdy = 0$$

В точке  $M_0$ :  $-8\lambda dx - 2\lambda dy = 0 \Rightarrow dy = -4dx$ .

И тогда  $d^2F(M_0) = -4\pi\lambda(dx^2 - 4dx^2) = 12\pi\lambda dx^2$  -

$L = 12\pi\lambda < 0 \Rightarrow M_0$  - точка условного максимума

Ответ: радиус основания резервуара  $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ , высота  $y = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$ .

**Замечание.** Функция Лагранжа позволяет найти условный экстремум функции  $z = f(x, y)$  при условии  $\varphi(x, y) = 0$  только при выполнении определённых условий, а именно частные производные  $\varphi'_x$  и  $\varphi'_y$  не должны одновременно обращаться в нуль в стационарной точке, т. е.  $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi(M_0) \neq 0$ .

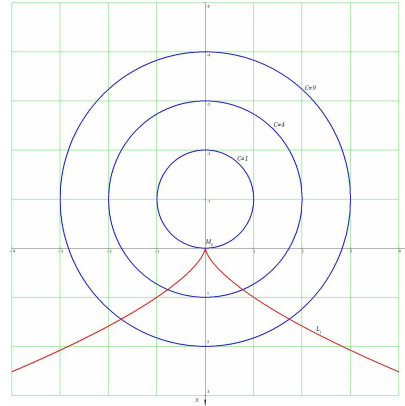
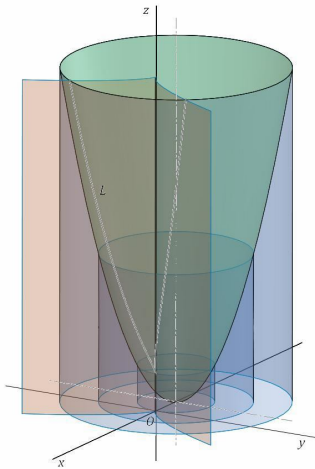
**Пример 39.** Найти условный экстремум функции  $z = (x + 1)^2 + y^2$  при условии  $x^3 = y^2$ .

Решение. Составим функцию Лагранжа и найдём её стационарные точки.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (x + 1)^2 + y^2 + \lambda(x^3 - y^2) \\ F'_x &= 2(x + 1) + 3x^2\lambda \\ F'_y &= 2y - 2y\lambda \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2(x + 1) + 3x^2\lambda = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ x^3 = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

система не имеет решений.

Однако из геометрических соображений ясно, что точка условного экстремума есть. Это  $M_0(0, 0)$ , в которой  $z_{\min} = 1$ . Она принадлежит линии пересечения  $l$  параболоида  $z = (x + 1)^2 + y^2$  с цилиндром  $x^3 = y^2$ .



Если построить линии уровня заданной функции  $(x+1)^2 + y^2 = C$  и кривую  $l_1$ , соответствующую уравнению связи  $x^3 = y^2$ , то в окрестности точки  $M_0(0,0)$  точки  $l_1$  расположены с одной стороны окружности  $(x+1)^2 + y^2 = 1$ . Из всех значений функции  $z$ , которые она принимает в точках кривой  $l_1$ , минимальным будет  $z(M_0) = 1$ . Вычислим частные производные функции  $\varphi(x, y) = x^3 - y^2$ .

$$\varphi'_x = 3x^2, \quad \varphi'_y = -2y.$$

В точке  $M_0(0,0)$  они обращаются в нуль.  $\overrightarrow{grad}\varphi(M_0) = 0$ . Поэтому, используя функцию Лагранжа, задачу решить не удалось.

### Задачи для самостоятельного решения к теме 6.

1. Найти точки условного экстремума следующих функций:

а)  $f = 2x + y - z + 1$  при условии  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 22$ ;

б)  $f = xyz$  при условии  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

### Тема 7. Наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой ограниченной области.

Одно из свойств непрерывной функции заключается в том, что в замкнутой ограниченной области  $D$  множество числовых значений функции имеет точные верхнюю и нижнюю границы, причём обе они являются значениями функции по крайней мере в одной точке области. Эти значения называются наибольшим и наименьшим значениями функции в области  $D$ .

Обозначим наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой области  $D$  соответственно через  $M$  и  $m$ . Эти значения могут достигаться функцией либо во внутренних точках области  $D$  (в точках экстремума), либо на границе области (и тогда они являются условными экстремумами функции).

**План решения задачи о нахождении наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой области  $D$ , граница которой имеет уравнение  $\varphi(x, y) = 0$ .**

1. Находим стационарные точки (точки, где  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  обращаются в нуль), принадлежащие области  $D$ .
2. Находим точки, где возможен условный экстремум функции  $z = f(x, y)$  при условии  $\varphi(x, y) = 0$ .
3. Вычисляем значения функции в этих точках, а также в точках пересечения отдельных участков границы, если таковые имеются. Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

**Пример 40.** Определить наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 y$  в области  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Решение. (См. план решения задачи)

1. Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2xy \\ z'_y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ любой} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

2. Составляем функцию Лагранжа:

$$F(x, y) = x^2 y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Находим её стационарные точки.

$$\begin{cases} F'_x = 2xy + 2\lambda x \\ F'_y = x^2 + 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y + \lambda)x = 0 \\ x^2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1(0; 1), \quad M_2(0; -1), \quad M_{3,4}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right), \quad M_{5,6}\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$3. \quad z(M_1) = 0, \quad z(M_2) = 0, \quad z(M_{3,4}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad z(M_{5,6}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad z(x=0) = 0.$$

Наибольшее значение достигается в точках  $M_{3,4}$ .

Наименьшее значение – в точках  $M_{5,6}$ .

Линии уровня функции  $z = x^2 y$  в этих точках касаются окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

### **Задачи для самостоятельного решения к теме 7.**

Найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданной области

1.  $f = xy - x^2y - \frac{xy^2}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,

2.  $f = -3xy + 3y^2 + x^3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

Ответы. 1.  $f_{\min} = -2$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $f_{\max} = \frac{2}{27}$ ,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ ;

2.  $f_{\min} = -\frac{1}{16}$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{4}$ ,  $f_{\max} = 8$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

## Список литературы.

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2005.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-М.: Дрофа, 2003.
3. Виноградов И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу-М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1988.

## Содержание.

Тема 1. Основные понятия.

§1.1 Область определения, линии и поверхности уровня.

§1.2. Предел, непрерывность, точки и линии разрыва функции нескольких переменных.

Тема 2. Дифференцирование функций нескольких переменных.

§ 2.1. Частные производные первого порядка

§2.2 Частные производные высших порядков.

§2.3. Матрица Гессе.

§2.4. Дифференциал функции.

§2.5. Нахождение функции по её полному дифференциалу.

§ 2.6. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных.

§2.7 Дифференциал сложной функции. Инвариантность первого дифференциала.

§ 2.8. Замена переменных в дифференциальных выражениях.

§2.9. Матрица Якоби.

§ 2.10. Дифференцирование неявно заданных функций. Случай одной независимой переменной.

§ 2.11. Формула Тейлора

Тема 3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Тема 4. Производная по направлению. Градиент.

Тема 5. Экстремум функции нескольких переменных.

Тема 6. Условный экстремум функции двух переменных.

Тема 7. Наибольшее и наименьшее значение функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой ограниченной области.