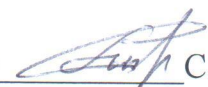


СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель работ,

ст. науч. сотр. НОЦ «Ионно-плазменные технологии», профессор кафедры теплофизики, д-р физ.-мат. наук

5.12.2017  С.В. Рыжков (введение, разделы 1, 2, заключение)
дата, подпись

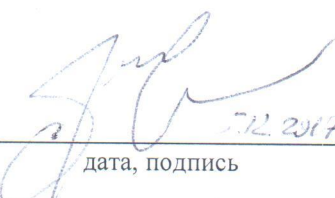
Ст. науч. сотр. НОЦ «Ионно-плазменные технологии», доцент кафедры теплофизики, канд. техн. наук

5.12.2017  В.В. Кузенов (разделы 3-5)
дата, подпись

Инженер НОЦ «Ионно-плазменные технологии», аспирант кафедры теплофизики


5.12.2017  В.В. Шумаев (раздел 5)
дата, подпись

Инженер НОЦ «Ионно-плазменные технологии», аспирант кафедры теплофизики

5.12.2017  П.А. Фролко (раздел 4)
дата, подпись

Нормоконтролер,



05.12.2017  А.Н. Князик
дата, подпись

РЕФЕРАТ

Отчет 52 с., 13 рис., 95 источников

МОЩНЫЕ ИСТОЧНИКИ НАГРЕВА, ТЕПЛОФИЗИКА, ТЕРМОЯДЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИКА, МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ, ЗАМАГНИЧЕННАЯ ПЛАЗМА, ВЫСОКАЯ ПЛОТНОСТЬ, ПЛАЗМЕННЫЕ ИМПУЛЬСЫ.

Основная цель проекта – обоснование возможности создания новых мощных плазменных источников излучения (в том числе рентгеновского диапазона, например, для задач экстремально ультрафиолетового (ЭУФ) диапазона) и магнитного поля на основе методов расчета плазмофизических и теплофизических свойств замагниченной плазмы в схеме магнитно-инерциального термоядерного синтеза. Разработка способов создания источников импульсных струй ионизированного газа микросекундного диапазона для плазменных технологий нового поколения и решения задач управляемого термоядерного синтеза на основе гибридизации методов получения и ускорения плазмы. В ходе выполнения 1 этапа “Разработка и тестирование квазимонотонной компактно-полиномиальной разностной схемы повышенного порядка точности” получены следующие научно-технические результаты:

- проведен анализ научно-технической литературы, нормативно–технической документации и других материалов по теме проекта;
- сформулирована инженерная и физико–математическая проблема. Обоснованы преимущества предлагаемого подхода;
- создана математическая модель для расчета сжатия вещества и магнитного потока мощными струями;
- разработан компьютерный метод расчета, реализованный для 1D и 2D геометрий;
- проведен тест на известных задачах;
- опубликованы статьи в рецензируемых научных журналах из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, баз данных Scopus и Web of Science.

Результатом работы и одновременно показателем выполнения проекта является подготовленная заявка на патент. Полученный по результатам НИР материал может быть использован в МГТУ им. Н.Э. Баумана при подготовке курсовых проектов, бакалаврских, магистерских и дипломных работ и кандидатских диссертаций и квалифицированных кадров в рамках направления «Ядерная энергетика и теплофизика».

СОДЕРЖАНИЕ

	С.
ВВЕДЕНИЕ	5
1 Анализ научно-технической литературы, нормативно–технической документации и других материалов по теме проекта.....	6
2 Инженерная и физико–математическая проблема. Обоснование преимущества предлагаемого подхода.....	12
3 Математическая модель для расчета сжатия вещества и магнитного потока мощными струями	16
4 Компьютерный метод расчета, реализованный для 1D и 2D геометрий.....	20
5 Тест на известных задачах	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	45

ВВЕДЕНИЕ

Первый этап научно-исследовательской и опытно-конструкторской технологической работы (НИОКТР) «Создание научно-технических основ для разработки многоцелевого источника импульсных струй плазмы для технологий нового поколения» (СУБГЗ/НФБП) посвящен разработке и тестированию квазимонотонной компактно-полиномиальной разностной схемы повышенного порядка точности.

В рамках выполнения первого этапа “Разработка и тестирование квазимонотонной компактно-полиномиальной разностной схемы повышенного порядка точности” научно-исследовательской работы (НИР) проведен анализ научно-технической литературы, нормативно-технической документации и других материалов по теме проекта, сформулирована инженерная и физико-математическая проблема и обоснованы преимущества предлагаемого подхода, создана математическая модель для расчета сжатия вещества и магнитного потока мощными струями, осуществлена разработка компьютерного метода расчета, реализованного для 1D и 2D геометрий, проведен тест на известных задачах и, как следствие выполненных работ (а также показатель выполнения проекта) опубликованы статьи в высокорейтинговых рецензируемых научных журналах из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, баз данных Scopus и Web of Science.

1 Анализ научно-технической литературы, нормативно–технической документации и других материалов по теме проекта

Существуют два основных способа удержания горячей плазмы – магнитный термоядерный синтез и инерциальный термоядерный синтез, которые являются традиционными концепциями управляемого термоядерного синтеза [1-3]. Недостатками магнитного синтеза являются проблема взаимодействия плазмы со стенкой, маленькие плотности плазмы и необходимость увеличения времени удержания, инерционного синтеза - требование прецизионного профилирования лазерных импульсов, повышенная теплопроводность и сверхмощные драйверы. Предлагаемый способ сжатия и нагрева замагниченной плазмы лазерными пучками высокой энергии импульса позволяют получить более высокий коэффициент усиления мощности.

Также известны другие направления, где цилиндрический металлический лайнер сжимается под действием мощного Z -пинча, а термоядерный процесс в горячем сжатом шнуре инициируется фемтосекундным лазером, [4] и система МагЛИФ - магнитное воздействие на лайнер с дейтерием и тритием с предварительным разогревом замагниченного топлива лазерным импульсом [5]. Недостатками являются использование мощного лазера и оболочек из металла, что приводит к образованию осколков и примесей.

Магнитно-инерционное удержание плазмы используется в установке Омега [6], где сжатие магнитного потока в плазме высокой плотности осуществляется в схеме прямого лазерного облучения. Для генерации тока и формирования магнитного поля разработана специальная система электрических разрядов со сменными кольцами-катушками. Недостатком является использование в основном конфигурации магнитного поля типа пробкотрон и стандартных криогенных мишеней. Наиболее близка рассматриваемой установке система, где сферический лайнер для имплозии замагниченной плазмы образуется слиянием высокоскоростных плазменных струй, формируемых в плазменных пушках или ускорителях, которые расположены на удалении от центра камеры [7].

Экспериментальное изучение термоядерной плазмы должно сопровождаться построением многоуровневых радиационно-газодинамических вычислительных

моделей, которые адекватно описывают процессы в активной зоне импульсного термоядерного реактора. Таким образом, расчетно-теоретические методы являются важным элементом в процессе разработки энергетических установок нового поколения, таких как гибридные термоядерно-ядерные реакторы и системы магнитно-инерциального термоядерного синтеза [8-12]. Напомним, что подобная система представляет собой импульсную термоядерную установку, в которой цилиндрически или сферически симметричная плазма, помещенная в затравочное (внешнее) магнитное поле, сжимается (вместе с затравочным магнитным потоком) мощными пучками или всеми видами оболочек, включая газовые, жидкостные и металлические ударники, плазменными лайнерами, образованными слиянием высокоскоростных плазменных струй, и т.д. Здесь отметим, что в работах [3, 10] авторами даны первоначальные оценки теплофизических параметров плазмы, энергетических затрат на сжатие электромагнитного поля и работу вихревых токов. Очевидно, что разрабатываемые математические модели и методы вычислительной плазмодинамики требуют в этом случае обязательной верификации на основе сравнения с надежными расчетными данными и данными физического эксперимента.

В общем случае предметом исследований являются пространственные течения излучающей плазмы при наличии тепломассообмена, электромагнитных полей и ядерных реакций. Решение данных задач предполагает использование сложных плазмодинамических математических моделей, описывающих процессы, протекающие в термоядерной плазме, а также создание высокоточных численных методов их решения, которые позволяют проводить адекватное численное моделирование. При этом первоначальное изучение основных физических закономерностей целесообразно основывать на системе упрощенных одномерных математических моделей.

Обычно численные схемы сквозного счета, предназначенные для решения системы уравнений Эйлера, строятся с учетом свойства не увеличения полной вариации решение (для TVD схем или соответствующего ослабленного условия для ENO, WENO схем). При этом в многостадийных схемах высокого порядка данное свойство (TVD - свойство) выполняется только для TVD схем Рунге-Кутты и до 3-го порядка включительно [13].

Повышение относительно временной переменной t порядка аппроксимации численного решения уравнений Эйлера до четвертого $O(\Delta t^4)$ и выше также возможно, если использовать последовательность сеток по временной переменной t и экстраполяцию по пределу, предложенную Ричардсоном. Экстраполяция Ричардсона имеет следующие особенности:

- возможность использования простейших аппроксимаций дифференциальных задач;
- однородность осуществления алгоритмов на последовательности сеток с различными параметрами аппроксимации;
- простота реализации алгоритма в целом.

В работах [14-16] применена анти-диффузионная коррекция восстанавливаемых параметров на краях ячейки. Целью анти-диффузионной поправки, основанной на этом подходе, является улучшение разрешения контактных разрывов без ущерба точности и устойчивости исходной компактно-полиномиальной разностной схемы.

Распределения, входящие в кусочно – полиномиальные распределения пространственные производные, вычисляются с использованием компактных разностей [17]. Однако для этих целей можно использовать и алгоритмы высокой разрешающей способности (ENO, WENO и т.д.). Здесь отметим, что TVD схемы для этой цели не очень подходят, поскольку их порядок аппроксимации уменьшается до первого на любом гладком экстремуме решения. В результате структуры, подобные распространяющимся волнам или вихрям, быстро затухают под действием численной вязкости.

Среди различных ENO и WENO схем высокой разрешающей способности можно выделить:

- конечнообъемные ENO схемы [18], использующие локальный адаптивный шаблон для реконструкции переменных на границах ячеек из средних по ячейкам и приближенное решение задачи Римана, чтобы вычислить численные потоки;
- конечноразностные ENO схемы [19], использующие расщепление потоков в центрах ячеек, чтобы выделить их «положительную» и «отрицательную» части и локальный адаптивный шаблон для реконструкции численных потоков из «расщепленных» потоков в центрах ячеек;

- конечнообъемные WENO схемы [20], использующие выпуклую линейную комбинацию шаблонов с адаптивными коэффициентами для реконструкции и приближенное решение задачи Римана подобно конечнообъемным ENO схемам.

Конечно-разностные WENO схемы [21-23], использующие расщепление потоков подобно конечноразностным ENO схемам и выпуклую линейную комбинацию шаблонов с адаптивными коэффициентами для реконструкции.

Построенная таким образом схема высокого порядка будет приводить к численным осцилляциям в тех случаях, когда используемый шаблон пересекает газодинамический разрыв, поскольку полиномиальная аппроксимация при этом теряет точность. Чтобы избежать осцилляций в TVD схемах вблизи разрывов и экстремумов решения производится автоматический переход на схему первого порядка точности, для чего используется зависящие от решения нелинейные функции - ограничители. Они определяются так, чтобы полная вариация решения не возрастала; выполнение этого свойства гарантирует сохранение монотонности: если решение было монотонным на старом временном слое, оно останется таковым и в новый момент времени. Применение ограничителей вносит, однако, значительную численную вязкость, в результате решение задач, включающих, например, распространяющиеся волны с множеством минимумов и максимумов, может потребовать применения очень подробной сетки.

В отличие от этого ENO (essentially non-oscillatory) схемы сохраняют порядок точности на гладких экстремумах решения. Основная идея, лежащая в их основе, достаточно проста. Чтобы избежать интерполяции через разрывы, из возможных шаблонов выбирается тот, на котором решение наиболее гладкое. В качестве индикатора гладкости используется величины разделенных разностей соответствующего порядка.

Условие невозрастания полной вариации $TV(U^n)$ при этом ослабляется, так что для ENO схемы q -го порядка: $TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) + O(\Delta x^q)$. Таким образом, в отличие от TVD схем ENO могут увеличивать полную вариацию решения, но только на величину порядка $O(\Delta x^q)$, где q – порядок точности схемы.

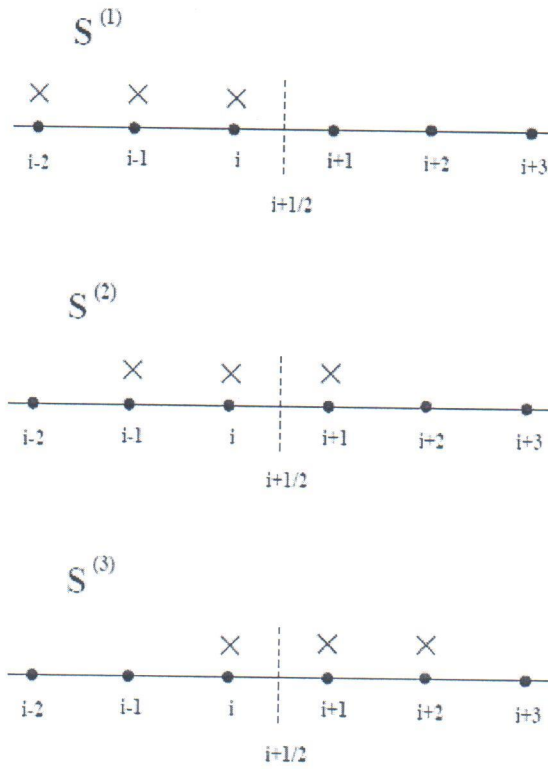


Рисунок 1.1 - Расчетные шаблоны, используемые при построении схем ENO и WENO высокой разрешающей способности

Дальнейшим развитием этого подхода являются так называемые WENO (weighted ENO) схемы. В WENO схемах вместо выбора одного из допустимых шаблонов, используется их выпуклая линейная комбинация с коэффициентами, зависящими от решения. Рассмотрим конструкцию WENO схемы 5-го порядка точности [21]. Её три допустимых шаблона (при $a = \frac{\partial f}{\partial u} > 0$) показаны на рисунке 1.1.

В ENO схеме 3-го порядка точности поток $f_{i+1/2}$ реконструируется с помощью ENO интерполяции из потоков f_i в серединах ячейках на одном из трех шаблонов $S^{(v)}$:

$$S^{(1)} = \{i-2, i-1, i\}, S^{(2)} = \{i-1, i, i+1\}, S^{(3)} = \{i, i+1, i+2\}.$$

$$f_{i+1/2} = \begin{cases} f_{i+1/2}^{(1)} = \frac{11}{6} f_i - \frac{7}{6} f_{i-1} + \frac{2}{6} f_{i-2} \\ f_{i+1/2}^{(2)} = \frac{2}{6} f_{i+1} + \frac{5}{6} f_{i-1} - \frac{1}{6} f_{i-2} \\ f_{i+1/2}^{(3)} = -\frac{1}{6} f_{i+2} + \frac{5}{6} f_{i+1} + \frac{2}{6} f_i \end{cases}$$

Выбор одного из них, в соответствии с величиной вторых разделенных разностей, приводит к ENO схеме 3-го порядка. При этом полный шаблон, внутри которого располагаются 3 допустимых шаблона, включает 5 точек. В этом случае в гладкой части решения можно построить поток более высокого порядка (5-го порядка точности). Его можно представить в виде суперпозиции трех потоков:

$$f_{i+1/2} = \sum_{v=1}^3 \Omega^{(v)} f_{i+1/2}^{(v)},$$

$$\Omega^{(v=1)} = \frac{1}{10}, \quad \Omega^{(v=2)} = \frac{6}{10}, \quad \Omega^{(v=3)} = \frac{1}{10}.$$

В WENO схеме [18-23] веса линейной комбинации выбираются так, чтобы они были малы для всех шаблонов, содержащих разрыв и близки к оптимальным весам $\Omega^{(v)}$ в областях, где решение гладкое.

$$f_{i+1/2} = \sum_{v=1}^3 \omega^{(v)} f_{i+1/2}^{(v)}, \quad \omega^{(v)} = \frac{\sigma^{(v)}}{\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)}}, \quad \sigma^{(v)} = \frac{\Omega^{(v)}}{[\varepsilon + IS^{(v)}]^p}.$$

Индикаторы гладкости в знаменателе определяются выражением из [22].

Определение численных потоков на грани, разделяющей две ячейки, производится путем решения задачи о распаде произвольного разрыва; между состояниями, полученными с помощью реконструкции, описанной выше. Наиболее часто на практике используется точный Годуновский солвер [24, 25], а также целый ряд приближенных подходов к задаче о распаде разрыва. Отметим, что существует несколько статей [26-27], посвященных компактным схемам, результаты которых нашли отражение и в данной работе.

2 Инженерная и физико–математическая проблема. Обоснование преимущества предлагаемого подхода

Известно, что численное решение уравнений Навье-Стокса в широком диапазоне чисел Маха предъявляет высокие требования к используемому расчетно-теоретическому методу, который должен относительно точно воспроизводить решения, имеющие разрывы первого рода (ударные волны, контактные разрывы), а с другой стороны, правильно воспроизводить динамику акустических возмущений на фоне сложно организованного среднего (возможно турбулентного) течения. Указанные требования противоречивы: численное разрешение акустических возмущений требует понижение схемной (аппроксимационной) вязкости расчетно-теоретического метода, однако это обстоятельство приводит к нефизичным осцилляциям решения в области больших градиентов искомых функций.

В последнее время численное решение уравнений Навье-Стокса находят с помощью разностных схем повышенной разрешающей способности, позволяющих находить одновременно точные и монотонные решения. Стандартные TVD схемы, имеющие второй порядок точности вдали от разрывов и экстремумов решения, хорошо подходят для расчета сверхзвуковых течений с небольшим числом изолированных ударных волн.

Однако в настоящее время требуется решение гораздо более сложных задач сверхзвуковой и гиперзвуковой аэродинамики. Среди наиболее актуальных направлений перечислим прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation. DNS) и моделирование методом крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) высокоскоростных переходных и турбулентных течений, моделирование отрывных и струйных течений, задачи вычислительной аэроакустики, течения со сверхзвуковым горением и детонацией. Для решения такого рода задач, включающих сложные взаимодействия ударных волн между собой, с вязкими слоями, вихрями, акустическими волнами, волнами гидродинамической неустойчивости и турбулентностью, необходимы вычислительные методы и компьютерные коды, позволяющие проводить расчеты не только газодинамических разрывов, но и способных с высокой точностью моделировать гладкую часть решения. К таким

схемам можно отнести FCT – алгоритм, схемы типа ENO (essentially non-oscillatory), WENO (weighted ENO), балансно – характеристический метод и др.

Балансно – характеристический метод позволяет существенно повысить вычислительную эффективность численных методов (в частности методов решения уравнений Навье-Стокса). Данная вычислительная схема имеет следующие преимущества по сравнению с так называемыми алгоритмами высокой разрешающей способности (TVD, ENO, WENO и т.д.). Среди них отметим – максимально компактный вычислительный шаблон и второй порядок аппроксимации на криволинейных шестигранных расчетных ячейках; обладает наилучшими дисперсионными свойствами в классе явных схем второго порядка аппроксимации на минимальном компактных вычислительных шаблонах, а также малыми диссипативными свойствами; имеет относительно простой способ (особенно по сравнению с вычислительными схемами типа ENO, WENO) программной реализации, что положительно сказывается на эффективности многопроцессорного распараллеливания программного кода. В работе представлен вариант балансно – характеристического метода, обладающий повышенным (выше второго) порядком точности и позволяющий использовать, как структурированные, так и гибридные (в том числе и неструктурированные) расчетные сетки.

Из практических расчетов известно, что наиболее предпочтительными являются структурированные расчетные сетки. При этом в случае использования квазиортогональной структурированной сетки близки к нулю некоторые параметры преобразования - компоненты метрического тензора преобразования (матрицы Якоби), находящиеся не на главной диагонали данного тензора. В этом случае наблюдается уменьшение погрешности аппроксимации в сравнении с основным случаем регулярной сетки и, следовательно, повышение точности получаемого решения. Однако неструктурированные сетки имеют одно важное преимущество: они позволяют произвольным образом расположить узлы сетки в геометрически сложной физической области. Эта особенность обуславливает основное преимущество неструктурированных сеток по сравнению с регулярными сетками, которое заключается в большей гибкости при дискретизации физической области сложной геометрической формы. Процесс построение неструктурированной сетки в области сложной пространственной формы происходит во много раз быстрее по сравнению с

регулярным случаем (в этом случае часто необходимо использовать многоблочный вариант метода построения сетки). Произвольность расположения узлов сетки следует понимать в том смысле, что отсутствуют сеточные направления и нет структуры сетки, подобной регулярным сеткам.

Таким образом, при численном решении уравнений Навье-Стокса в пространственных областях сложной формы важной задачей является разработка способов описания пространственных тел (объемных и поверхностных сеток), обтекаемых сплошной средой и задаваемых с помощью параметрических кривых и поверхностей. В качестве такого рода пространственных представлений тел сложной формы удобно использовать NURBS кривые и поверхности, позволяющие описывать объекты, как с криволинейными, так и с прямолинейными границами. Способ NURBS широко применяются для задания кривых и поверхностей во многих современных CAD системах. С помощью B-сплайнов можно представить достаточно сложные поверхности, что позволяет построить гибкую систему моделирования форм. Модели на основе NURBS используются также в универсальных форматах обмена геометрическими данными, например, они реализованы в известном формате STEP. При задании геометрии пространственных тел также определяются граничные условия (в двумерном случае условия ставятся в соответствие контурным кривым, а в трехмерном - граничным поверхностям). Информации о геометрии модели расчетной области, заданной NURBS, используется для генерации трехмерной и поверхностной расчетных сеток. В зависимости от характера решаемой задачи с использованием NURBS параметризации можно строить как структурированные, так и гибридные сетки. При этом для двумерной расчетной области сначала производится разбиение кривых, задающих границу расчетной области, а затем производится построение всей расчетной сетки. В трехмерном случае первоначальным этапом построения является генерация поверхностной сетки. Дискретизация поверхности может быть выполнена с помощью генерации сетки в пространстве параметров с последующим её отображением в физическое пространство. При этом поверхностная сетка должна удовлетворять определенным критериям качества. Для удовлетворения данных критериев генерация сетки в параметрическом пространстве должна выполняться с учетом кривизны поверхности. Расчетная область при этом покрывается тетраэдральными ячейками. Отметим, что имеется большое количество генераторов,

как коммерческих, так и свободно распространяемых. Обычно они позволяют генерировать сетки, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям: отсутствию ячеек с малыми углами, свойству Делоне [28], возможности сгущения в заданных местах. Наиболее часто применяются генераторы расчетных сеток типа Triangle[29], Tetgen[30] и Netgen[31]. Triangle позволяет строить треугольные сетки в 2D расчетах, используя триангуляцию Делоне с ограничениями. Tetgen строит трехмерные тетраэдральные сетки, используя трехмерный аналог триангуляции Делоне с ограничениями. Netgen создает, как треугольные, так и тетраэдральные сетки, используя метод продвигающегося фронта. Самым важным преимуществом неструктурированных сеток является то, что их относительно легко создавать в расчетных областях со сложной формой границы.

Численное исследование высокотемпературных гетерогенных газодинамических течений газа или плазмы можно проводить на основе решения нестационарных трехмерных одножидкостных (однотемпературных) уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью LES (модель Смагоринского) и RANS ($q-\omega$ модель Кокли) моделей турбулентности [32, 33], с учетом процессов диффузии и теплопроводности. Эта система включает в себя уравнения магнитной гидродинамики, а также перенос энергии излучением в многогрупповом диффузионном приближении. При этом учитывается анизотропия диссипативных процессов в условиях замагниченности плазмы. Основная система МГД-уравнений дополнена обобщенным законом Ома.

Граничные условия, необходимые для решения данной системы уравнений конечно-разностным методом, удобно реализуются, когда границы расчетной области совпадают с координатными линиями в некоей обобщенной системе координат. Эта система координат получается путем перехода от цилиндрической к произвольной криволинейной системе координат. Отметим также, что на равномерной сетке в обобщенной системе координат сохраняется порядок конечно-разностной аппроксимации уравнений при сгущении узлов сетки в физической пространстве, что является одним из преимуществ предлагаемого подхода.

3 Математическая модель для расчета сжатия вещества и магнитного потока мощными струями

Произведем описание математической модели процесса сжатия для центрально-симметричной системы координат. Математическая модель, представленная в данной работе, опирается на одномерные уравнения радиационной плазмодинамики: систему уравнений Эйлера (1), уравнение переноса собственного широкополосного излучения (2), уравнение магнитной индукции (3), методы расчета уравнений состояний вещества, определяет условия возникновения и протекания самоподдерживающейся термоядерной реакции синтеза:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^{(\nu-1)}} \frac{\partial (r^{(\nu-1)} \rho u)}{\partial r} = F_\rho, \quad F_\rho = -\rho u \frac{(\nu-1)}{r}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{r^{(\nu-1)}} \frac{\partial (r^{(\nu-1)} (\rho u^2 + P))}{\partial r} = F_{\rho u} + f_r, \quad F_{\rho u} = -(\rho u^2 + P) \frac{(\nu-1)}{r}, \quad f_r = \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{H}]_r,$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{r^{(\nu-1)}} \frac{\partial (r^{(\nu-1)} (\rho E u + P u + q_\Sigma))}{\partial r} = F_E + q_r + Q_{Fus}^e, \quad q_r = j_r E_r, \quad q_\Sigma = q_e + q_i + q_{лаз},$$

$$F_E = -(\rho E u + P u) \frac{(\nu-1)}{r}, \quad P = P_e + P_i,$$

где t – время;

r – радиальная координата;

ρ – плотность;

u – скорость вдоль координаты r ;

$P = P(\rho, \varepsilon)$ – статическое давление;

ε – удельная внутренняя энергия;

$E = (\varepsilon + u^2 / 2)$ – полная энергия потока газа;

$\vec{F} = (F_\rho, F_{\rho u}, F_E)$ – вектор источников в ортогональной системе координат;

F_ρ – плотность потока массы;

$F_{\rho u}$ – плотность потока импульса;

F_E – плотность потока энергии;

q, q_ν – полный и спектральный поток излучения;

T_e, T_i – температуры электронов и ионов плазмы ($T = T_e = T_i$);

χ_ν – спектральный коэффициент поглощения;

f_r – электромагнитная сила;

q_r – приток энергии от электромагнитного поля;

$q_e = -\lambda_e \text{grad} T_e, q_i = -\lambda_i \text{grad} T_i$;

$q_{\text{лаз}}$ – поток лазерного излучения;

λ_e, λ_i – коэффициенты теплопроводности электронов и ионов;

j_r – плотность тока;

$\vec{H}(r)$ – вектор магнитной индукции;

P_e – давление электронов;

P_i – давление ионов;

индекс $\nu = (1, 2)$ отвечает случаям плоской и осевой симметрии.

Вклад локального энерговыделения Q_{Fus}^e в электронный компонент плазмы за счет передачи энергии электронам от термоядерных α -частиц может быть определен с помощью приближенной формулы [34]:

$$Q_{Fus}^e = 8.483 \cdot 10^{29} \rho^2 \frac{(1 + 0.232 \cdot T_i^{3/4}) \exp(-20/T_i^{1/3})}{T_i^{2/3} \sqrt{1 + 9.41 \cdot 10^{-5} \cdot T_i^{13/4}}},$$

где ρ – плотность, г/см³;

T – температура, кэВ.

Перенос широкополосного излучения может рассматриваться с помощью многогруппового диффузионного приближения, уравнения которого выглядят следующим образом [35]:

$$\frac{1}{r^n} \frac{d(r^n q_\nu)}{dr} + \chi_\nu c U_\nu = \chi_\nu 4\sigma T^4, \quad \frac{c}{3} \frac{dU_\nu}{dr} + \chi_\nu q_\nu = 0, \quad (2.2)$$

где q_ν, U_ν – спектральный поток и объемная плотность широкополосного излучения;

c – скорость света;

ν – номер частотной группы;

χ_ν – спектральный коэффициент поглощения;

$n = 0$ – плоский слой;

$n = 1$ – бесконечный одномерный цилиндр;

q_ν – радиационный поток в направлении оси r .

Уравнение магнитной индукции, учитывающее уравнение неразрывности для плотности ρ и закон сохранения вида $\text{div}(\vec{H}) = 0$, записывается следующим образом [36]:

$$\frac{\partial(B_z/\rho)}{\partial t} + \frac{1}{\mu J} \frac{\partial J(\nu B_z/\rho)}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi\mu\rho J r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{J r}{\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad (2.3)$$

Электропроводность определяется по формуле Спитцера [37] с учетом возможной замагниченности плазмы:

$$\sigma(z) = 12.06 \times 10^{13} \cdot \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} \cdot \frac{n_e}{\sum_i n_i z_i^2} \frac{1}{1 + (\Omega_e \tau_e)^2} [1/c],$$

где n_e, n_i – концентрации электронов и ионов, см^{-3} ;

z_i – средний заряд ионов;

$\Omega_e = \frac{e|\vec{B}|}{m_e c}$ – гирочастота электронов;

m_e – масса электрона;

M_i – массы иона.

Коэффициенты электронной и ионной теплопроводности $\lambda_{e,i}$ в случае замагниченной плазмы могут быть рассчитаны с помощью формул [38].

Расчет проводился с использованием модели Томаса-Ферми с квантовыми и обменными поправками [39, 40] и модели среднего заряда [41, 42].

Запишем начальные условия. Расчетная область состоит из центральной части и одного коаксиального слоя. Они имеют цилиндрическую форму со следующим

диапазоном значений начальных параметров:

- центральная часть (радиус ядра $R_{\text{я}} = 0,05$ см) заполнена D-T смесью с плотностью $\rho = 5 \cdot 10^{-2}$ г/см³ и начальной температурой равной $T = 297$ К. Она окружена коаксиальным слоем (наружный радиус $R_c = 0,1$ см), состоящим из металла (Al) с плотностью $\rho = 2,7$ г/см³ и начальной температурой равной $T = 297$ К.

- расчетная область имеет внешний радиус $r = l = 0,2$ см. При этом термодинамические параметры внешней разреженной окружающей среды (состоит из Ar) задаются значениями: $T = 297$ К, $\rho = 2,7 \cdot 10^{-3}$ г/см³.

Начальное значение напряженности $\vec{H}(r)$ затравочного магнитного поля в разреженной окружающей среде составляет доли Тл. Спектральный поток и объемная плотность широкополосного излучения q_{ν}, U_{ν} , а также поток излучения для $r \in [0, l]$ в начальный момент времени $t = 0$ равны нулю.

В качестве граничных условий системы уравнений Эйлера (2.1) ставится условие симметрии (на оси симметрии), на внешней границе задаются невозмущающие

условия на выходящий из расчетной области поток: $\left. \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial r^2} \right|_{r=l} = 0$, $\vec{f} = \{\rho, u, v, e\}$.

Краевые условия при решении уравнения магнитной индукции (2.3) можно описать следующим образом: на оси симметрии – условие симметрии, на внешней границе – $\partial \vec{H}(r) / \partial r = 0$.

Граничные условия для системы уравнений диффузионного приближения (2.2) могут быть сформулированы следующим образом: на внешней границе – отсутствие падающего извне излучения, на оси симметрии – условие симметрии.

4 Компьютерный метод расчета, реализованный для 1D и 2D геометрий

Метод численного решения одномерных уравнений плазмодинамики опирается на метод дробных шагов, который состоит в данном случае из двух шагов [43]. На первом дробном шаге учитываются газодинамические процессы (этим процессам соответствует гиперболической часть рассматриваемой системы уравнений). Процессы переноса излучения и электромагнитные процессы, протекающие в устройствах, рассматриваются на втором дробном шаге.

Отметим, что выше приведенные системы дифференциальных уравнений относительно временной переменной t есть системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые могут быть разрешены с помощью векторного варианта многошагового метода Рунге-Кутты (в данной работе использован четырех шаговый вариант метода [44], который обладает 4-ым порядком аппроксимации по времени t).

На первом дробном шаге используется дивергентная форма уравнений Эйлера. Здесь (для временного дробного шага $t \in [t, t + \Delta t/2]$) применяется нелинейная квазимонотонная компактно - полиномиальная разностная схема повышенного порядка точности:

$$\frac{\partial \vec{U}_i}{\partial t} + \frac{F(\vec{U}_{i+1/2}) - F(\vec{U}_{i-1/2})}{\Delta \xi} = \vec{F}_2, \quad \Delta \xi = [\xi_{i-1/2} - \xi_i, \xi_{i+1/2} - \xi_i].$$

Из приведенных соотношений видно, что в нелинейной квазимонотонной компактно - полиномиальной разностной схеме восстанавливаемое внутри расчетной ячейки $\xi \in [-\Delta \xi/2, \Delta \xi/2]$, распределение $Y(\xi)$ газодинамических параметров опирается на полином 7-й степени, причем главная (негладкая) его часть вблизи разрывов выделяется отдельным способом (на основе разложения Лагранжа-Бюрмана) и находится с использованием компактных разностей восьмого порядка точности [26, 27] (первые $(\partial Y / \partial \xi)_i$ и вторые производные $(\partial^2 Y / \partial \xi^2)_i$).

Численное решение уравнения диффузии магнитного поля и уравнения теплопроводности проводилось с помощью компактной разностной схемы

повышенного порядка точности [45]. Метод расчета переноса широкополосного излучения рассматривается на основе многогруппового диффузионного приближения [35]. Шаг по времени необходимый для интегрирования разработанной компактно-полиномиальной разностной схемы выбирается из условия выполнения критерия устойчивости. Критерий Куранта-Фридрихса-Леви записывается при проведении невязких расчетов в форме

$$\Delta t \leq CFL / \max_{i,j,k} \left(\frac{|u_{i,j,k}| + a_{i,j,k}}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j,k}| + a_{i,j,k}}{\Delta y_j} + \frac{|w_{i,j,k}| + a_{i,j,k}}{\Delta z_k} \right),$$

а при проведении вязких расчетов в следующем виде

$$\Delta t \leq CFL / \max_{i,j,k} \left(\frac{|u_{i,j,k}| + a_{i,j,k}}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j,k}| + a_{i,j,k}}{\Delta y_j} + \frac{|w_{i,j,k}| + a_{i,j,k}}{\Delta z_k} + \frac{2\gamma\mu}{\rho \text{RePr}} \left(\frac{1}{(\Delta x_i)^2} + \frac{1}{(\Delta y_j)^2} + \frac{1}{(\Delta z_k)^2} \right) \right).$$

Число Куранта-Фридрихса-Леви (CFL) задается обычно в диапазоне от 0,25 до 0,8.

Для достижения высокого порядка аппроксимации в разрабатываемом методе (на этапе корректора) интегралы (поверхностные и объемные) необходимо заменить квадратурными формулами, которые должны приближать исходные интегралы с точностью согласованной с порядком точности метода. При этом наиболее часто для вычисления таких интегралов применяются квадратурные формулы Гаусса, которые позволяют при заданном количестве точек получить наиболее высокий алгебраический порядок точности формулы интегрирования.

Если подинтегральная функция $f(x)$ является функцией класса C^{2n} , то n -точечная квадратурная формула Гаусса будет иметь вид:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{(2n+2)((2n)!)} f^{2n}(\xi),$$

где x_i – координата (узел) точки интегрирования i ;

w_i – соответствующий весовой коэффициент.

При условии того, что пределы интегрирования равны $a = -1, b = +1$ гауссова

квадратура примет вид: $\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)w_i$. При этом узлы x_i и веса w_i

интегрирования, входящие в одномерную гауссову квадратуру, определяются с помощью приведенной ниже Таблице 1.

Таблица 1 - Узлы x_i и веса w_i интегрирования, входящие в гауссову квадратуру

	$\pm x_i$	w_i
$n = 2$	0,57735 02691 89626	1,00000 00000 00000
$n = 3$	0,00000 00000 00000	0,88888 88888 88889
	0,77459 66692 41483	0,55555 55555 55556
$n = 4$	0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
	0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
$n = 5$	0,00000 00000 00000	0,56888 88888 88889
	0,53846 93101 05683	0,47862 86704 99366
	0,90617 98459 38664	0,23692 68850 56189
$n = 6$	0,23861 91860 83197	0,46791 39345 72691
	0,66120 93864 66265	0,36076 15730 48139
	0,93246 95142 03152	0,17132 44923 79170
$n = 7$	0,00000 00000 00000	0,41795 91836 73469
	0,40584 51513 77397	0,38183 00505 05119
	0,74153 11855 99394	0,27970 53914 89277
	0,94910 79123 42759	0,12948 49661 68870
$n = 8$	0,18343 46424 95650	0,36268 37833 78362
	0,52553 24099 16329	0,31370 66458 77887
	0,79666 64774 13627	0,22238 10344 53374
	0,96028 98564 97536	0,10122 85362 90376
$n = 9$	0,00000 00000 00000	0,33023 93550 01260
	0,32425 34234 03809	0,31234 70770 40003
	0,61337 14327 00590	0,26061 06964 02935
	0,83603 11073 26636	0,18064 81606 94857
	0,96816 02395 07626	0,08127 43883 61574

	$\pm x_i$	w_i
$n = 10$	0,14887 43389 81631	0,29552 42247 14753
	0,43339 53941 29247	0,26926 67193 09996
	0,67940 95682 99024	0,21908 63625 15982
	0,86506 33666 88985	0,14945 13491 50581
	0,97390 65285 17172	0,06667 13443 08688
$n = 12$	0,12523 34085 11467	0,24914 70458 13403
	0,36783 14989 98180	0,23349 25365 38355
	0,58731 79542 86617	0,20316 74267 23066
	0,76990 26741 94305	0,16007 83285 43346
	0,90411 72563 70475	0,10693 93259 95318
	0,98156 06342 46719	0,04717 53363 86512

Для прямоугольных областей или прямоугольного параллелепипеда (гексаэдрального элемента) квадратурные формулы Гаусса следуют из выражений:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) w_i w_j;$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y, z) dx dy dz \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) w_i w_j w_k.$$

При этом в этом координаты точек интегрирования и весовые коэффициенты берутся из приведенной выше таблицы с учетом аддитивности интегральных сумм. Таким образом, вычисление объемного интеграла внутри гексаэдра произвольной формы выполняется в параметрическом пространстве, в котором каждый гексаэдральный элемент имеет форму единичного куба.

В предлагаемом методе, в силу компактности шаблона аппроксимации, переход от криволинейной расчетной области к некоторой обобщенной нормализованной форме области может быть осуществлен не глобальным способом, а в рамках отдельной (произвольной) расчетной ячейки.

Вначале рассмотрим двумерный случай такого преобразования. Очевидно, что всю расчетную область (для тела сложной пространственной формы) целесообразно разбить на несколько подобластей. Каждую расчетную подобласть (рисунок 4.1) в физической системе координат (r, z) можно обозначить $ABCD$ и преобразовать (с помощью трансфинитной интерполяции) в квадрат в криволинейной системе координат (ξ, η) . При этом координатами углов квадрата являются значения: $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

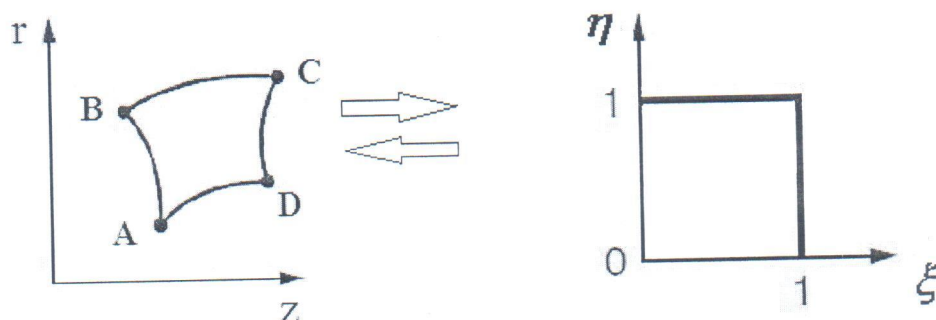


Рисунок 4.1 - Преобразование из цилиндрической системы координат (r, z) в криволинейную систему координат (ξ, η) подобласти $ABCD$

Введем следующие формулы для однонаправленных отображений $P_\xi(\xi, \eta)$ и $P_\eta(\xi, \eta)$:

$$P_\xi(\xi, \eta) = (1 - \xi)\vec{r}(0, \eta) + \xi\vec{r}(1, \eta),$$

$$P_\eta(\xi, \eta) = (1 - \eta)\vec{r}(\xi, 0) + \eta\vec{r}(\xi, 1).$$

В этом случае интерполяция производится по одной координате (направлению) ξ или координате (направлению) η . Трансфинитная интерполяция $P_\xi \oplus P_\eta$ является булевой суммой однонаправленных отображений $P_\xi(\xi, \eta)$, $P_\eta(\xi, \eta)$ и записывается следующим способом:

$$P_\xi \oplus P_\eta = P_\xi + P_\eta - P_\xi P_\eta.$$

Более подробная запись данного преобразования выглядит следующим образом:

$$P_{\xi} \oplus P_{\eta} = (1-\xi)\vec{r}(0,\eta) + \xi\vec{r}(1,\eta) + (1-\eta)\vec{r}(\xi,0) + \eta\vec{r}(\xi,1) - \\ - (1-\xi)(1-\eta)\vec{r}(0,0) - (1-\xi)\eta\vec{r}(0,1) - (1-\eta)\xi\vec{r}(1,0) - \xi\eta\vec{r}(1,1).$$

Если ввести индексы l, r, b, t , которые обозначают: l – левую часть расчетной подобласти $ABCD$; r – правую часть расчетной подобласти $ABCD$; b – нижнюю часть расчетной подобласти $ABCD$; t – верхнюю часть расчетной подобласти $ABCD$.

Тогда трансфинитное преобразование $P_{\xi} \oplus P_{\eta}$ можно записать в следующей форме [46-48]:

$$P_{\xi} \oplus P_{\eta} = (1-\xi)r_l(\eta) + \xi r_r(\eta) + (1-\eta)r_b(\xi) + \eta r_t(\xi) - \\ - (1-\xi)(1-\eta)r_b(0) - (1-\xi)\eta r_t(0) - (1-\eta)\xi r_b(1) - \xi\eta r_t(1).$$

Данные формулы позволяют получить для любой расчетной подобласти $ABCD$ двумерную криволинейную расчетную сетку в физической области (r, z) .

Теперь рассмотрим второй вариант (неструктурированный случай) преобразования расчетной ячейки. Введем в криволинейной расчетной области Ω , которая задается криволинейной системой координат ξ, η и которая представляет некое параметрическое пространство, треугольную сетку и осуществим переход для каждого треугольника к нормализованному треугольнику (его вершины находятся в точках $P_1(0,0), P_2(1,0), P_3(0,1)$ в параметрическом пространстве).

Такой переход можно осуществить для любого треугольного элемента, который задается своими вершинами в физическом декартовом пространстве $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$ с помощью простейшего линейного преобразования:

$$x = (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3, \quad y = (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta + y_3.$$

В том случае, если расчетная граница сильно искривлена, применяется более сложное изопараметрическое нелинейное преобразования второго порядка, которое

переводит искривленный элемент в нормализованный треугольник в параметрическом пространстве:

$$x = (x_1 - x_3)\ell + (x_2 - x_3)m + x_3, \quad y = (y_1 - y_3)\ell + (y_2 - y_3)m + y_3,$$

с учетом дополнительного преобразования второго порядка:

$$\begin{aligned} \ell &= \alpha\xi\eta + \xi, \quad m = \beta\xi\eta + \eta, \\ \alpha &= 2(2l_6 - 1), \quad \beta = 2(2m_6 - 1), \end{aligned}$$

или дополнительного преобразования третьего порядка:

$$\begin{aligned} \ell &= \xi + \frac{9}{2}\xi\eta\alpha_\ell + \frac{27}{2}\xi^2\eta\beta_\ell + \frac{27}{2}\xi\eta^2\gamma_\ell, \quad m = \xi + \frac{9}{2}\xi\eta\alpha_m + \frac{27}{2}\xi^2\eta\beta_m + \frac{27}{2}\xi\eta^2\gamma_m, \\ \alpha_\ell &= 5l_5 - l_4 - 1, \quad \beta_\ell = l_4 - 5l_5, \\ \gamma_\ell &= -l_5 + \frac{1}{3}, \quad \alpha_m = 5m_4 - m_5 - 1, \quad \beta_m = -m_4 + \frac{1}{3}, \quad \gamma_m = m_5 - 2m_4. \end{aligned}$$

Здесь индексы 1,2,3 соответствуют вершинам элемента, а индекса 4,5,6 соответствуют дополнительным точкам искривленной границы элемента.

В частности, для построения такого единичного куба может быть использовано трикватратичное изопараметрическое преобразование (описанное выше), которое основано на базе 20 узлов, из которых 8 – это вершины куба, а 12 являются центрами всех ребер куба. Наличие центральных узлов на ребрах позволяет учитывать кривизну обтекаемой границы.

Для всех указанных случаев поверхностные и объемные интегралы содержат нелинейные якобианы преобразования. Это обстоятельство накладывает достаточно высокие требования на квадратурные формулы интегрирования и требует большего количества гауссовых точек. Отсюда следует, что при вычислении объемных (и поверхностных) интегралов следует использовать квадратуры (Таблица 2), точные для полиномов порядка $3k$ (k – максимальная степень базисных полиномов).

Таблица 2 - Квадратуры для вычисления объемных и поверхностных интегралов

Порядок полинома подынтегральной функции: k	Поверхностный интеграл (количество узлов – порядок точности)	Объемный интеграл (количество узлов – порядок точности)
1	4 – 3	25 – 5
2	10 – 6	38 – 7
3	18 – 9	58 – 9
4	24 – 11	91 – 11

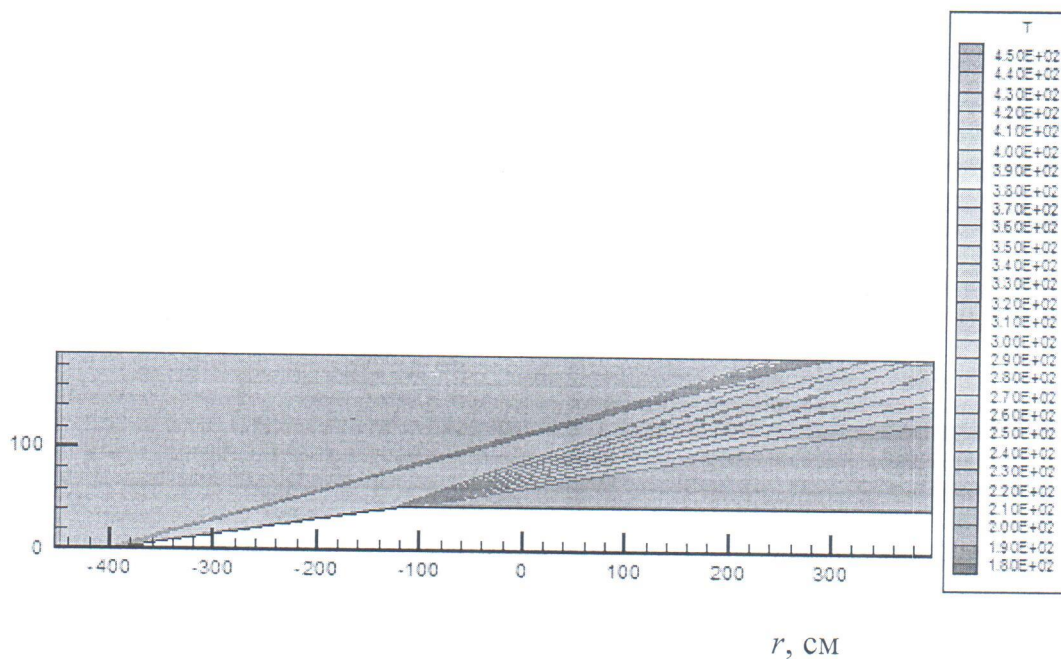
Отметим, что увеличение порядка полиномов может также применяться локально не только в «плохих» ячейках, но и в областях с большими градиентами решения, где желательна более высокая точность.

5 Тест на известных задачах

Для обоснованного количественного анализа физических процессов, которые могут протекать в плазме, необходимо осуществить верификацию предложенной математической модели и численных методов с помощью решения ряда тестовых (модельных) задач.

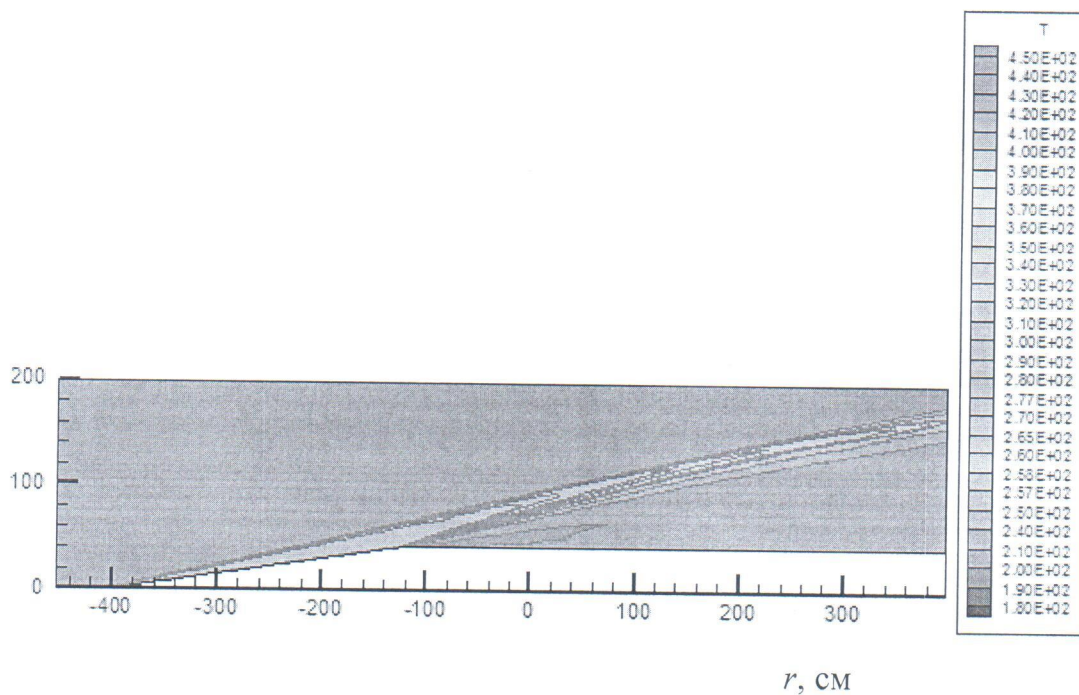
Конвективная часть компьютерной модели тестировалась на одномерном варианте задачи Римана о распаде неустойчивого разрыва заданной конфигурации. Сопоставление точного и приближенного решения показало, что отличие составляет не более процента. В качестве дополнительных тестовых верификационных расчетов рассматривается обтекание потоком воздухом клина, сопряженного с пластиной (рисунок 5.1а), а также конуса (рисунок 5.1б), сопряженного с цилиндром со следующими параметрами набегающего потока: давление $P = 2060$ Па, скорость $V = 1860$ м/с, температура $T = 223$ К, число Маха $M_\infty = 6$. Из работ [49, 50] можно вычислить угол наклона β ударной волны. Для $M_\infty = 6$ и угла отклонения клина от плоскости симметрии $\nu = 8,7^\circ$ угол наклона β ударной волны составляет величину $\beta = 16^\circ$ (в расчете $\beta = 15,91^\circ$, см. рисунок 5.1а). На рисунке 5.1б показаны аналогичные результаты, полученные при обтекании воздушным потоком конуса, сопряженного с цилиндром. При этом из работы [49] (при $M_\infty = 6$ и $\nu = 8,7^\circ$) следует, что угол наклона ударной волны равен $\beta = 12,9^\circ$. Данный результат также находится в хорошем соответствии с выполненным расчетом (в расчете $\beta = 12,85^\circ$, см. рисунок 5.1б).

$T, \text{кК}$



a)

$T, \text{кК}$



б)

а) клин, сопряженный с пластиной; б) конус, сопряженный с цилиндром.

Рисунок 5.1 – Пространственное распределение температуры

Целью следующих тестов является оценка разработанного приближенного метода для анализа термонапряжений в телах простой пространственной формы, например, в форме сферы, сопряженной с цилиндром. Математическая модель оценок, предназначенная для расчета термонапряжений в отдельных элементах конструкции, опирается на решение квазистатической задачи термоупругости [51-55]. Она включает в себя уравнения механического равновесия линейно-упругой среды с учетом температурных напряжений (однако эта математическая модель не позволяет проводить полное описание термомеханических процессов, так как в ней отсутствует основные физические механизмы, учитывающие пластическое деформирование конструкционных материалов) и уравнение теплопроводности специального вида. Как правило, физическая область (в которой ищется решение) имеет криволинейные границы, а их форма в процессе моделирования изменяются под действием тепловых и механических нагрузок. Для решения задачи с такими пространственными границами расчетная область преобразуется к области, в которой возможно введение регулярной декартовой (структурированной) сетки.

При оценке термонапряжений вводятся следующие, упрощающие предположения:

- принимается, что конструкционный материал является изотропной сплошной средой;
- геометрия и теплонапряженное состояние конструкционного элемента описывается в двумерной (2D) постановке;
- изначально задаются внешние механические (силы, поля давлений) и тепловые воздействия (конвективный и радиационный тепловые потоки);
- считается, что скорость акустических волн в конструкционных элементах существенно больше скорости распространения в них тепловых волн.

Математическая постановка рассматриваемой задачи сводится к численному решению системы двумерных уравнений квазистатической термоупругости, которые позволяют определить поля температур T и перемещений \bar{U} , компоненты тензоров напряжений ε_{ij} и деформаций σ_{ij} в конструкционных элементах [52-58]:

$$\begin{aligned} \mu \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\bar{U})) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \bar{U}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \operatorname{grad}(\theta) &= 0, \\ \rho c_{\varepsilon=0} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0 \operatorname{div}(\partial \bar{U} / \partial t) &= \operatorname{div}(\lambda_q \operatorname{grad} \theta), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$D_\xi = \begin{bmatrix} \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \xi_r & 0 \\ 0 & \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \xi_z \end{bmatrix}, \quad D_\eta = \begin{bmatrix} \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \eta_r & 0 \\ 0 & \alpha_T (3\lambda + 2\mu) \eta_z \end{bmatrix},$$

$$I = \operatorname{div} \bar{U} = \left[\frac{1}{J} \frac{\partial J(U_\xi)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial J(U_\eta)}{\partial \eta} \right],$$

$$F_1 = J(\xi_r^2 + \xi_z^2) u_\xi, \quad F_2 = J(\xi_r^2 + \xi_z^2) v_\xi, \quad G_1 = J(\eta_r^2 + \eta_z^2) u_\eta, \quad G_2 = J(\eta_r^2 + \eta_z^2) v_\eta,$$

$$\bar{S} = \left\| \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} S_r \\ S_z \end{matrix} \right\|,$$

$$S_1 = \frac{1}{J} \frac{\partial \{J(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) u_\eta\}}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \{J(\eta_r \xi_r + \eta_z \xi_z) u_\xi\}}{\partial \eta} + \alpha \frac{1}{r} \left\{ \xi_r \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\},$$

$$S_2 = \frac{1}{J} \frac{\partial \{J(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) v_\eta\}}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \{J(\eta_r \xi_r + \eta_z \xi_z) v_\xi\}}{\partial \eta} + \alpha \frac{1}{r} \left\{ \xi_r \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial v}{\partial \eta} \right\},$$

$$S_r = (\lambda + \mu) \left[\xi_r \frac{\partial \left(\alpha \frac{u}{r} \right)}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial \left(\alpha \frac{u}{r} \right)}{\partial \eta} \right], \quad S_z = (\lambda + \mu) \left[\xi_z \frac{\partial \left(\alpha \frac{u}{r} \right)}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial \left(\alpha \frac{u}{r} \right)}{\partial \eta} \right],$$

где $u(r, z, t) = U_r$, $v(r, z, t) = U_z$ – проекции вектора перемещения $\bar{U}(r, z, t)$ на оси r и z ;

$U_\xi = \xi_r u + \xi_z v$, $U_\eta = \eta_r u + \eta_z v$ – контравариантные компоненты вектора \bar{U} описывающего перемещение точки тела в криволинейной системе координат ξ, η ;

$\alpha = 0$ – плоский случай деформаций;

$\alpha = 1$ – осесимметричный случай деформаций.

Теперь преобразуем, используя переход к криволинейной системе координат ξ, η , уравнение, связанное с переносом внутренней энергии процессом теплопроводности:

$$\rho c_{\varepsilon=0} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{J} \frac{\partial \left(J \lambda_q (\xi_r^2 + \xi_z^2) \theta_\xi \right)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \left(J \lambda_q (\eta_r^2 + \eta_z^2) \theta_\eta \right)}{\partial \eta} + f, \quad (5.3)$$

где $f = S_\lambda + D_\lambda$;

$$S_\lambda = \frac{1}{J} \frac{\partial \{J \lambda_q (\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z) \theta_\eta\}}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \{J \lambda_q (\eta_r \xi_r + \eta_z \xi_z) \theta_\xi\}}{\partial \eta} + \alpha \frac{\lambda_q}{r} \left\{ \xi_r \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\};$$

$$D_\lambda = -\alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0 \left[\frac{1}{J} \frac{\partial J (\partial U_\xi / \partial t)}{\partial \xi} + \frac{1}{J} \frac{\partial J (\partial U_\eta / \partial t)}{\partial \eta} \right] - \alpha \frac{\alpha_T (3\lambda + 2\mu) T_0 u}{r}.$$

При численной реализации уравнений (5.2), (5.3) в параметрической области Ω_p вводится прямоугольная сетка $\omega_h = \{\xi_j, \eta_k; j = \overline{0, J}, k = \overline{0, K}\}$, $\omega_h \in \Omega_h$. Здесь $h_\xi = \xi_j - \xi_{j-1}$, $\xi_{j+1/2} = \xi_j + 0,5h_\xi$, $\xi_{j-1/2} = \xi_j - 0,5h_\xi$, $h_\eta = \eta_k - \eta_{k-1}$, $\eta_{k+1/2} = \eta_k + 0,5h_\eta$, $\eta_{k-1/2} = \eta_k - 0,5h_\eta$.

Численное решение системы уравнений (5.2), (5.3) осуществляется в два этапа. Сначала на первом этапе неявно разрешается уравнение теплопроводности специального вида (5.3). Затем на втором этапе находится решение уравнений термоупругости (5.2).

При решении “тепловой” части двумерных уравнений квазистатической термоупругости, которые описывают перенос внутренней энергии процессом теплопроводности, применяется следующая двухшаговая разностная схема (с использованием работы [61]):

$$c_{j,k} \frac{\theta_{j,k}^{n+1/2} - \theta_{j,k}^n}{\Delta/2} = \frac{a_{j+1/2,k} (\theta_{j+1,k}^{n+1/2} - \theta_{j,k}^{n+1/2}) - a_{j-1/2,k} (\theta_{j,k}^{n+1/2} - \theta_{j-1,k}^{n+1/2})}{h_\xi^2} + F_\xi^n + O(h_\xi^2, h_\eta^2)$$

$$\theta = \theta(\xi, \eta, t = t^n), \quad F_\xi = \frac{\partial (J \lambda_q (\eta_r^2 + \eta_z^2) \theta_\eta)}{\partial \eta} + Jf,$$

$$c_{j,k} \frac{\theta_{j,k}^{n+1} - \theta_{j,k}^{n+1/2}}{\Delta/2} = \frac{a_{j,k+1/2} (\theta_{j,k+1}^{n+1} - \theta_{j,k}^{n+1}) - a_{j,k-1/2} (\theta_{j,k}^{n+1} - \theta_{j,k-1}^{n+1})}{h_\eta^2} + F_\eta^{n+1/2} + O(h_\xi^2, h_\eta^2)$$

$$\theta = \theta(\xi, \eta, t = t^n + \Delta t/2), \quad F_\eta = \frac{\partial (J \lambda_q (\xi_r^2 + \xi_z^2) \theta_\xi)}{\partial \xi} + Jf,$$

где n – верхний индекс, относящийся к моменту “времени” $t = n\Delta t$;

Δt – шаг по времени; $c = \rho c_{\varepsilon=0} J$;

$$a_\xi = J \lambda_q (\xi_r^2 + \xi_z^2);$$

$$a_\eta = J \lambda_q (\eta_r^2 + \eta_z^2).$$

Данная разностная схема (вдоль пространственных направлений ξ, η) легко разрешается скалярной прогонкой.

Для решения уравнений термоупругости $A\bar{U} = 0$ используем метод установления [62]. При этом шаг по “времени” Δt найдем с помощью итерационного метода вариационного типа. Для этого определим вектор невязок $\bar{R} = (R_1, R_2)$:

$$R_{1,j,k}^n = (AU_{j,k})_1^n - b_{1,j,k}^n, \quad R_{2,j,k}^n = (AU_{j,k})_2^n - b_{2,j,k}^n, \quad \bar{b}_{j,m}^n = \{b_{1,j,k}^n, b_{2,j,k}^n\} = \{0, 0\},$$

$$j = \overline{1, J-1}, k = \overline{1, K-1}.$$

Введем скалярное произведение следующим образом [61]:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} (a_{1,j,k} b_{1,j,k} h_\xi h_\eta) + \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=1}^{K-1} (a_{2,j,k} b_{2,j,k} h_\xi h_\eta),$$

$$\bar{a}_{j,k} = (a_1, a_2)_{j,k}, \quad \bar{b}_{j,k} = (b_1, b_2)_{j,k}.$$

Будем минимизировать значение невязки $\bar{R}_{j,k} = AU_{j,k} - \bar{b}_{j,k}$, используя модифицированный вариант итерационного метода вариационного типа – метод минимальных невязок [63]. В этом случае итерации следует проводить по формулам:

$$\bar{U}_{j,k}^{n+1} = \bar{U}_{j,k}^n + c \Delta t \bar{R}_{j,k}^n, \quad c \approx 0.9, \quad \Delta t = \frac{(\bar{R}, A\bar{R})}{(A\bar{R}, A\bar{R})}.$$

При численной реализации метода минимальных невязок для аппроксимации производных от векторов $\bar{F}, \bar{G}, \bar{I}, \bar{W}$ и переменных u, v, θ зададим на введенной выше сетке $\omega_h \in \Omega_h$ следующее конечно-разностное представление производных [64]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[a \frac{\partial g}{\partial \xi} \right]_{j,k} = \frac{a_{j+1/2,k} (g_{j+1,k} - g_{j,k}) - a_{j-1/2,k} (g_{j,k} - g_{j-1,k})}{h_\xi^2} + O(h_\xi^2), \quad a_{j\pm 1/2,k} = \frac{a_{j,k} + a_{j\pm 1,k}}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[a \frac{\partial g}{\partial \eta} \right]_{j,k} = \frac{a_{j+1,k} (g_{j+1,k+1} - g_{j+1,k-1}) - a_{j-1,k} (g_{j-1,k+1} - g_{j-1,k-1})}{4h_\xi h_\eta} + O(h_\xi^2, h_\eta^2).$$

Отметим, что для корректной работы описанного алгоритма необходимо:

- после каждого расчетного шага, так как произошла деформация границ расчетной области Ω , осуществить перестроение расчетной сетки, например, с использованием метода работы [59]);

- затем произвести интерполяцию с учетом выполнения законов сохранения и нужной степени гладкости решения (см. [65]) величин $\bar{U}(r, z, t)$ и $\theta(r, z, t)$, известных на расчетной сетке в момент времени t^n на сетку, полученную после её перестроения.

Для проверки работоспособности сформулированной численной методики была решена группа тестовых задач. Во всех сериях расчетов использовалась система уравнений линейной теории упругости в эйлеровых координатах и уравнение теплопроводности.

Первой тестовой (валидационной) задачей является нахождение равновесного термомодеформируемого состояния стальной балки, которая с двух сторон закреплена с помощью неподвижных шарниров (рисунок 5.2) и находится в однородном поле температуры как сумма начального значения температуры и величины равномерного температурного нагрева $T(x, y) \equiv T_0 + \Delta T$. Решается только задача механики в заданном равномерно распределенном температурном поле $T(x, y) \equiv T_0 + \Delta T$. Точное решение данной задачи выглядит следующим образом:

$$U_y(x) = h/2 \left(\left(\cos(\lambda x) / \cos(\lambda l/2) \right) - 1 \right),$$

где $\lambda = \sqrt{P/D}$, $D = Eh^3/12$;

h – толщина балки;

l – длина балки;

E – модуль упругости первого рода;

P – сила реакции опоры, которая находится из уравнения равновесия балки.

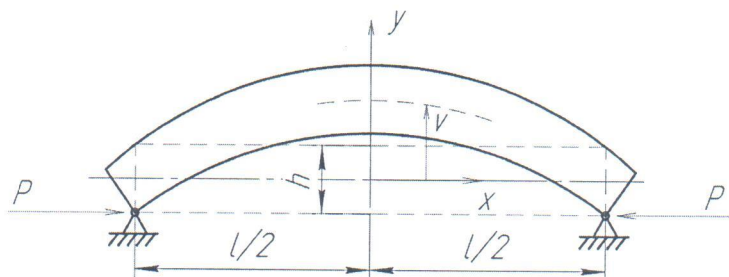


Рисунок 5.2 - Схема тестовой задачи об изгибе равномерно нагретой закрепленной балки под действием температурных напряжений

На рисунке 5.3 приведены результаты (при: $h = 2,5$ мм, $l = 100$ мм, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ $1/^\circ\text{C}$, $\Delta T = 36$ $^\circ\text{C}$) численного расчета первой тестовой задачи по определению прогиба равномерно нагретой закрепленной балки под действием температурных напряжений (максимальное значение относительной ошибки составило 2 %).

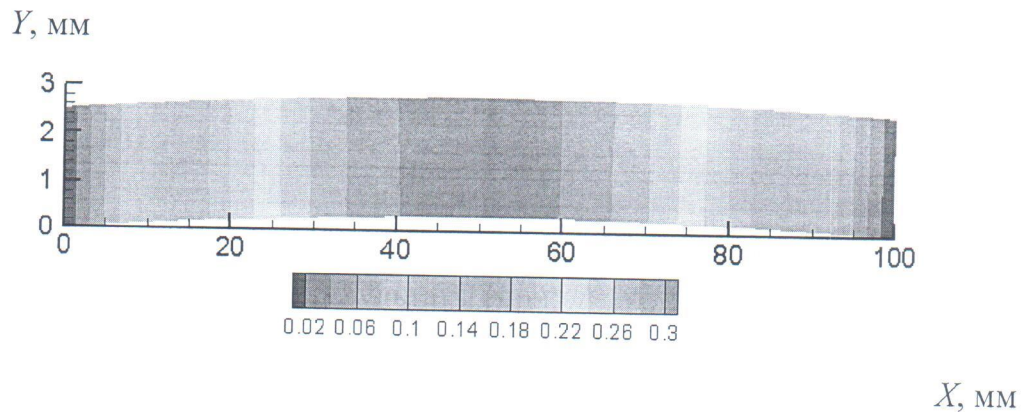


Рисунок 5.3 - Результаты численного расчета тестовой задачи по определению прогиба равномерно нагретой закрепленной балки под действием температурных напряжений

Из систематических расчетов известно [66, 67], что конвективный тепловой поток q_w вблизи передней критической точки можно определить с помощью формул (R – радиус закругления):

$$- q_w = 1,93 \times 10^{-4} V_\infty^{1,08} (H_0 - H_w) \sqrt{\frac{\rho_\infty}{R}} \quad (\text{в ламинарном случае});$$

$$- q_w = 4,69 \times 10^{-4} V_\infty^{1,25} (H_0 - H_w) \left(1 + \frac{T_w}{T_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\rho_\infty^{0,8}}{R^{0,2}} \quad (\text{в турбулентном случае}).$$

Из данных формул следует, что коэффициент теплоотдачи α в передней критической точке можно оценить с помощью соотношения:

$$\alpha \sim 1/\sqrt{R} \quad (\text{в турбулентном случае } \alpha \sim 1/R^{0,2}).$$

Поэтому при больших скоростях движения ($M > 6$) и, соответственно, больших температурах торможения при уменьшении радиуса закругления R в критической

точке резко возрастают (если не учитывать обратного воздействия на конвективный тепловой поток q_w роста температуры T_w поверхности тела) значения конвективных и радиационных потоков. Данные формулы также демонстрируют заметное влияние на конвективный тепловой поток q_w температуры поверхности T_w элемента.

Выполненные в данной работе расчеты (рисунок 5.4 - 5.11) позволяют провести оценку воздействия на конвективный тепловой поток q_w радиуса закругления R , геометрической формы, конструкционного материала и распределения температуры поверхности T_w элемента.

Для валидации и верификации разработанной численной методики в качестве второй тестовой задачи были взяты данные работ [68, 69]. Геометрия (рисунки 5.4 - 5.6) тестирующей задачи представляет собой $2D$ клинообразную оболочку (материал оболочки – сплав Inconel 617, длина клина 7,62 мм, толщина оболочки постоянна и равна 11 мм, угол раскрытия клина 6°), закругленную по цилиндру (радиус закругления $R = 3,18$ мм).

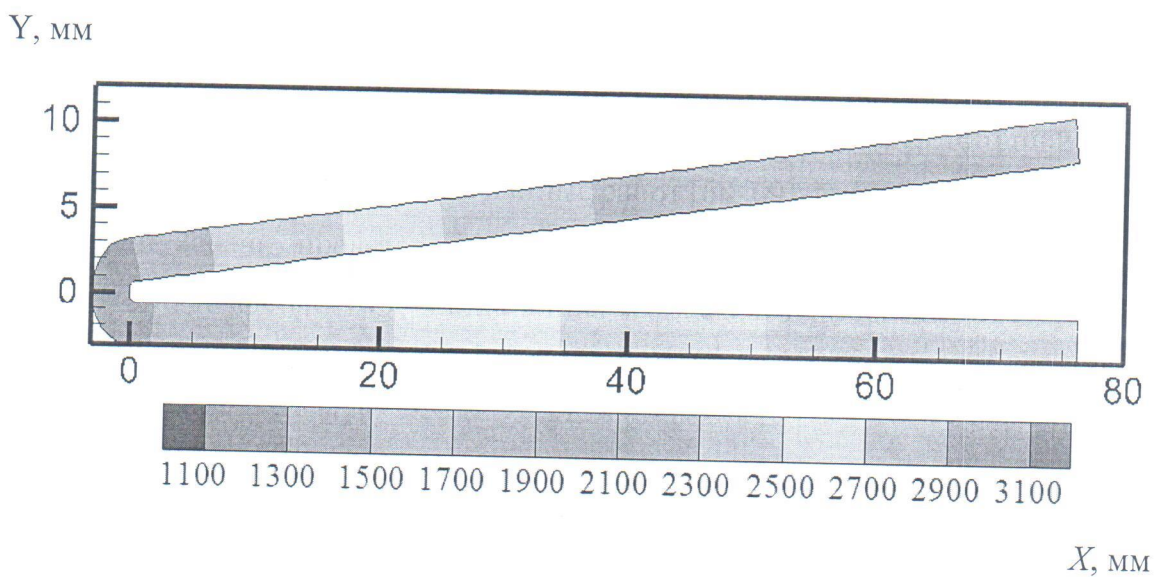
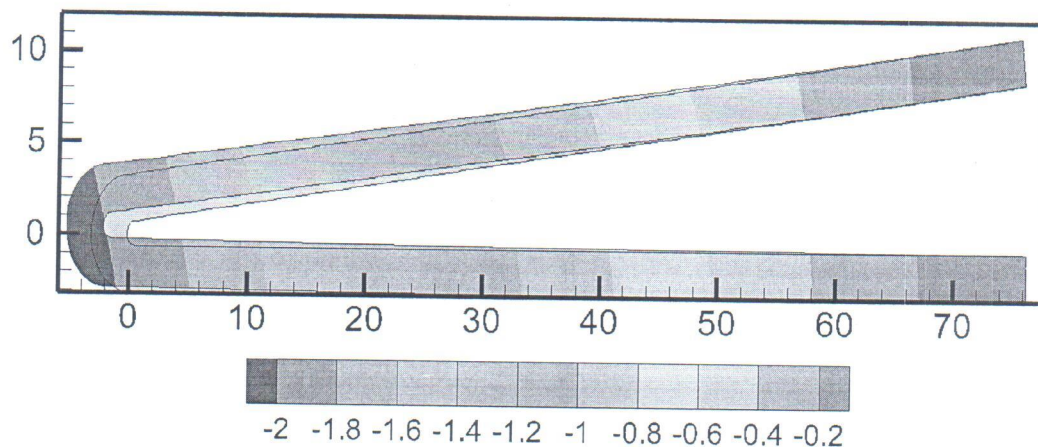


Рисунок 5.4 - Распределение температуры в клинообразной оболочке, закругленной по цилиндру радиусом $R = 3,18$ мм, число Маха в набегающем потоке $M = 5,25$

Y, мм

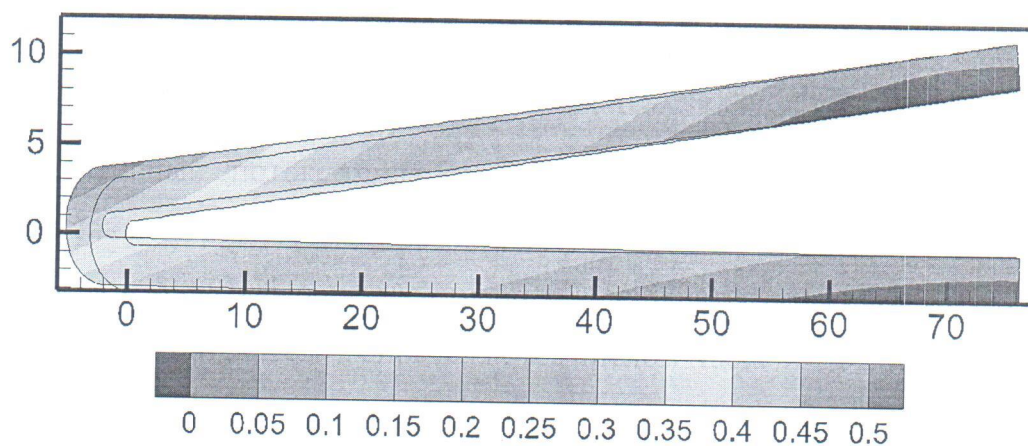


X, мм

Рисунок 5.5 - Распределение перемещений в направлении оси X в клинообразной оболочке для тех же параметров R и M , что и на рисунке 5.4. Сплошными линиями указаны контуры исходного недеформированного тела

Конвективный поток тепла, поступающий на поверхность клинообразной оболочки, а также аэродинамические нагрузки, распределенные вдоль её поверхности, взяты из работ [68, 69]. Параметры потока воздуха, натекающего на элемент (кромки крыльев, носового обтекателя), определяются числом Маха $M = 5,25$. Принимается, что стабилизация внутренней энергии в элементе, который жестко заделан, осуществляется тепловым излучением.

Y, мм



X, мм

Рисунок 5.6 - Распределение перемещений в направлении оси Y в клинообразной оболочке. Обозначения и параметры те же, что и на рисунках 5.4 и 5.5

Результаты расчета равновесного термомодеформируемого состояния, соответствующие второй тестовой задаче (рисунки 5.4 - 5.6), показывают:

- максимальное значение относительной ошибки, как по распределению температуры, так и по значениям перемещений, составляет величину $< 3 \%$.

- имеется заметное изменение распределения температуры T_w вдоль поверхности элемента от 1100 до 3100 К;

- перемещения U_x передней части элемента в направлении оси X равны 2 мм в сторону удлинения тела;

- перемещения U_y передней части элемента в направлении оси Y : 0,25 мм – в нижней части тела, 0,50 мм – в верхней части тела;

- радиус затупления R изменяется и достигает величины $R = 2,10$ мм (приводя к возрастанию конвективного потока тепла q_w на 23 %), что на 34 % меньше исходного радиуса $R = 3,18$ мм.

Следующая задача состояла в нахождении распределения температуры T и перемещений \bar{U} в элементе конструкции – в цилиндре, затупленном по сфере. При решении этой задачи была задана следующая геометрия элемента (сферическое затупление радиуса 1,27 см, длина цилиндра 10 см), а также конвективный поток тепла (рисунок 5.7), падающий на поверхность рассматриваемого элемента.

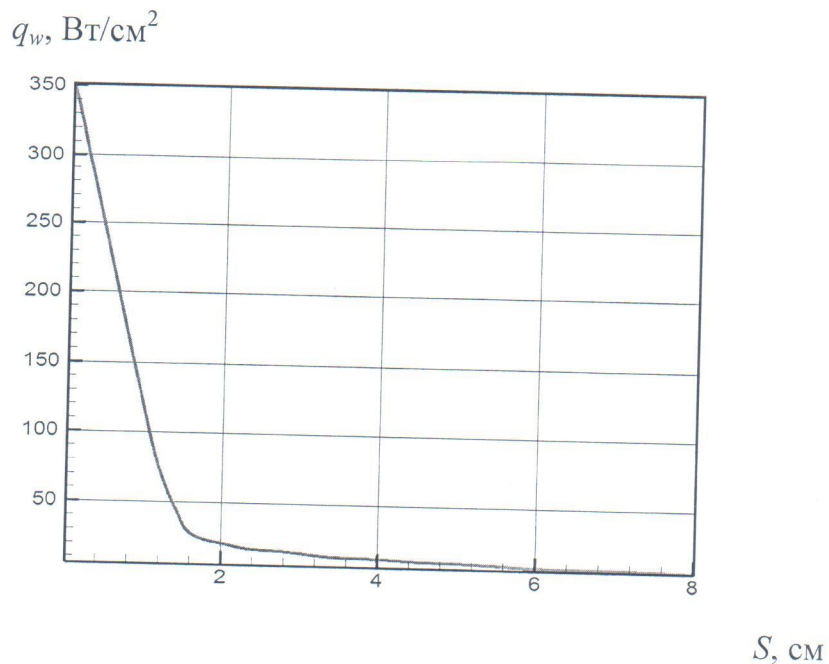


Рисунок 5.7 - Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности цилиндра затупленного по сфере [63]. Радиус затупления $R = 1,27$ см

где t, x_j - время и декартовы координаты;

\vec{U} - вектор, описывающий перемещение точки тела;

T - температура тела;

T_0 - исходная (начальная) температура тела;

$\theta = T - T_0$ - избыточная температура;

ρ - плотность в теле;

$c_{\varepsilon=0}$ - теплоемкость при нулевой деформации;

μ, λ - коэффициенты Ляме;

α_T - коэффициент термического расширения.

Граничные условия для температуры формулируются путем задания теплового потока на поверхности Γ элемента конструкции:

$$-\lambda_q \left. \frac{\partial T}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} = q_i,$$

где T_{0i}, q_i - заданные константы.

Механические граничные условия в виде напряжений задаются аналогично работе [53].

Начальные условия (для момента времени $t = 0$) определяются в виде изначально заданного пространственного распределения температуры T и перемещений \vec{U} .

Граничные условия, необходимые для решения квазистатической задачи термоупругости конечно-разностным методом, удобно реализуются, когда границы расчетной области Ω совпадают с координатными линиями в некоей обобщенной системе координат ξ, η . При этом расчетная область Ω переходит в параметрическую область Ω_p (например: в прямоугольник).

Введем преобразование координат вида:

$$r = r(\xi, \eta), z = z(\xi, \eta).$$

При известных в физическом пространстве координатах узлов сетки в расчетной области ξ, η метрические коэффициенты в общем случае могут быть найдены путем численного дифференцирования по формулам:

$$J = \frac{\partial(r, z)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\xi_r = J^{-1} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \eta_r = -J^{-1} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \xi_z = -J^{-1} \frac{\partial r}{\partial \eta}, \quad \eta_z = J^{-1} \frac{\partial r}{\partial \xi},$$

где $J = \partial(r, z)/\partial(\xi, \eta)$ – якобиан перехода от цилиндрической системы координат r, z к криволинейной системе координат ξ, η ,

Для поиска функций $r(\xi, \zeta)$, $z(\xi, \zeta)$ может быть использована система уравнений, полученная в работе [59]. Данные уравнения гарантируют, что найденные функции $r = r(\xi, \eta)$, $z = z(\xi, \eta)$ являются гладкими функциями координат ξ, η . Однако в некоторых случаях созданная таким образом расчетная сетка по тем или иным причинам может быть признана неудачной. В этой ситуации (вместе с дифференциальными способами) целесообразно использовать аналитические алгебраические преобразования [60].

Система уравнений термоупругости (5.1) в векторной полудивергентной форме в произвольной криволинейной системе координат ξ, η имеет следующий вид:

$$A\vec{U} = B \frac{\partial \vec{F}}{\partial \xi} + B \frac{\partial \vec{G}}{\partial \eta} + C_\xi \frac{\partial \vec{I}}{\partial \xi} + C_\eta \frac{\partial \vec{I}}{\partial \eta} + D_\xi \frac{\partial \vec{W}}{\partial \xi} + D_\eta \frac{\partial \vec{W}}{\partial \eta} + \vec{S} = 0. \quad (5.2)$$

Векторы, входящие в данную систему уравнений, записываются в следующем виде:

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix}, \quad \vec{I} = \begin{Bmatrix} I \\ I \end{Bmatrix}, \quad \vec{W} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \theta \end{Bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{J} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{J} \end{bmatrix}, \quad C_\xi = \begin{bmatrix} (\lambda + \mu)\xi_r & 0 \\ 0 & (\lambda + \mu)\xi_z \end{bmatrix}, \quad C_\eta = \begin{bmatrix} (\lambda + \mu)\eta_r & 0 \\ 0 & (\lambda + \mu)\eta_z \end{bmatrix},$$

В качестве газодинамических расчетных данных в набегающем внешнем потоке, использовались данные [70]: давление $P = 0,23 \cdot 10^3$ Па, плотность $\rho = 0,178 \cdot 10^{-5}$ г/см³, скорость $V = 4,167 \cdot 10^5$ см/с, температура $T = 450$ К. При этом температура поверхности элемента считалась постоянной и равной $T_w = 300$ К. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль обтекаемой некаталитической поверхности взято из работы [68] и показано на рисунке 5.7. На рисунке 5.8 приведено распределение температуры газа вдоль поверхности цилиндра, затупленного по сфере [71-73]. Отметим, что указанные аэротермофизические значения соответствуют гиперзвуковому режиму течения газа ($M = 9,8$).

R , см

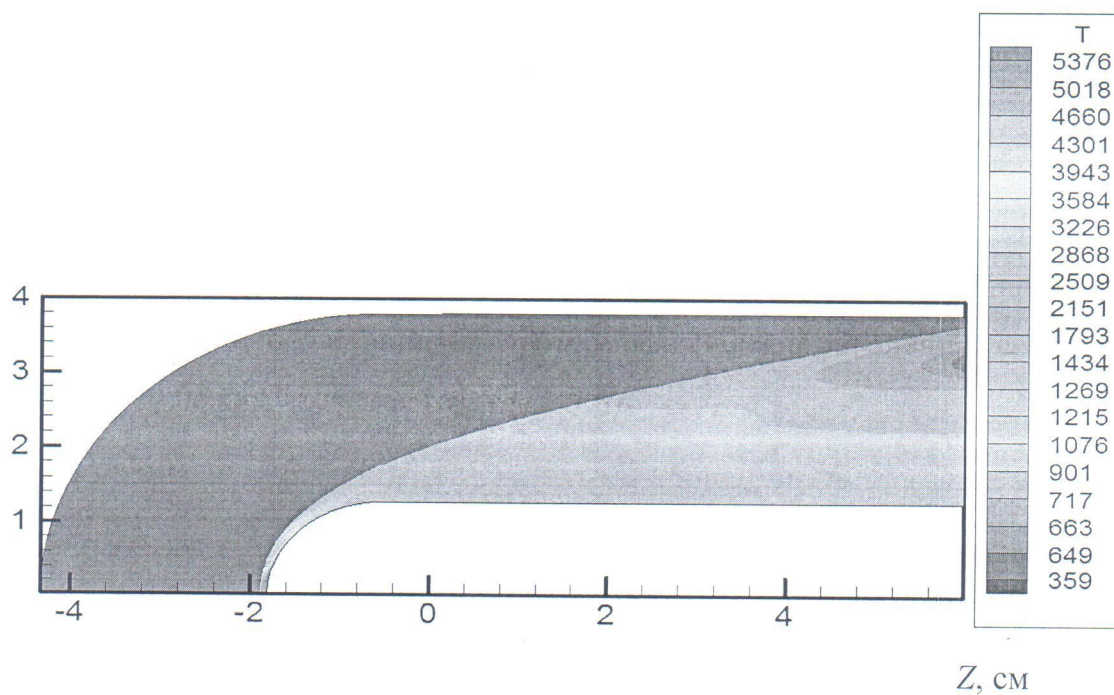


Рисунок 5.8 - Распределение температуры вдоль поверхности цилиндра, затупленного по сфере. Радиус затупления сферы $R = 1,27$ см, скорость набегающего потока $V_\infty = 4,17$ км/с (число Маха $M = 9,8$, высота $h = 22$ км)

При решении данной задачи так же, как и раньше принимается, что потери внутренней энергии элементом осуществляется только за счет теплового излучения. Сам элемент (рисунки 5.9-5.11) выполнен из вольфрама и жестко заделан.

На рисунках 5.9-5.11 приведены результаты расчетов, выполненных с помощью вышеприведенной методики для рассматриваемого элемента.

R , см

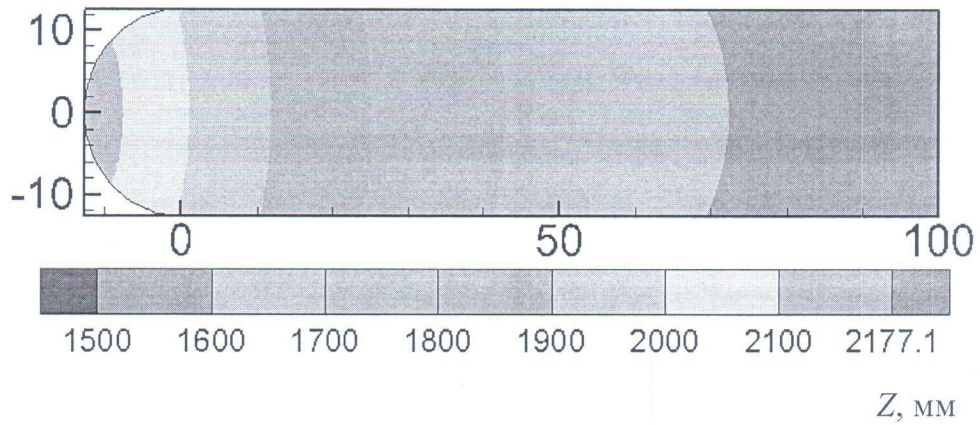


Рисунок 5.9 - Распределение температуры в затупленном по сфере цилиндре. Радиус затупления сферы $R = 1,27$ см, скорость набегающего потока $V_\infty = 4,17$ км/с (число Маха $M = 9,8$, высота $h = 22$ км)

R , мм

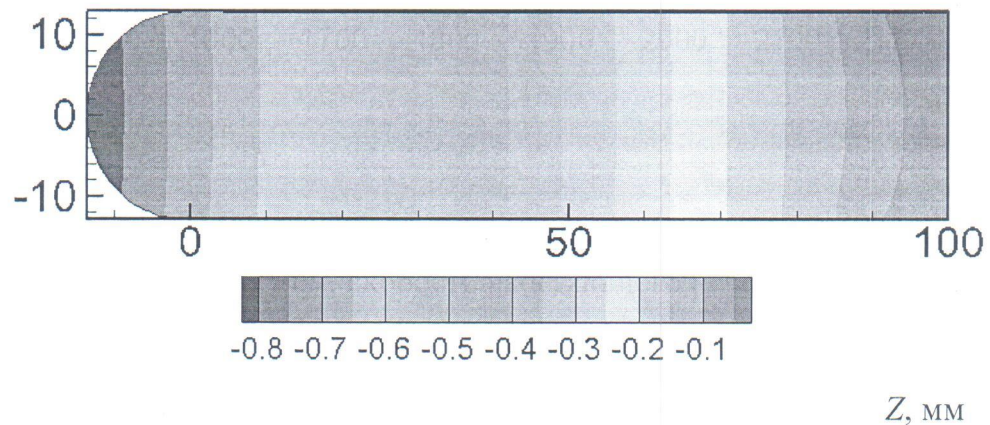


Рисунок 5.10 - Распределение перемещений в направлении оси R в затупленном по сфере цилиндре. Радиус затупления сферы $R = 1,27$ см, скорость набегающего потока $V_\infty = 4,17$ км/с (число Маха $M = 9,8$, высота $h = 22$ км)

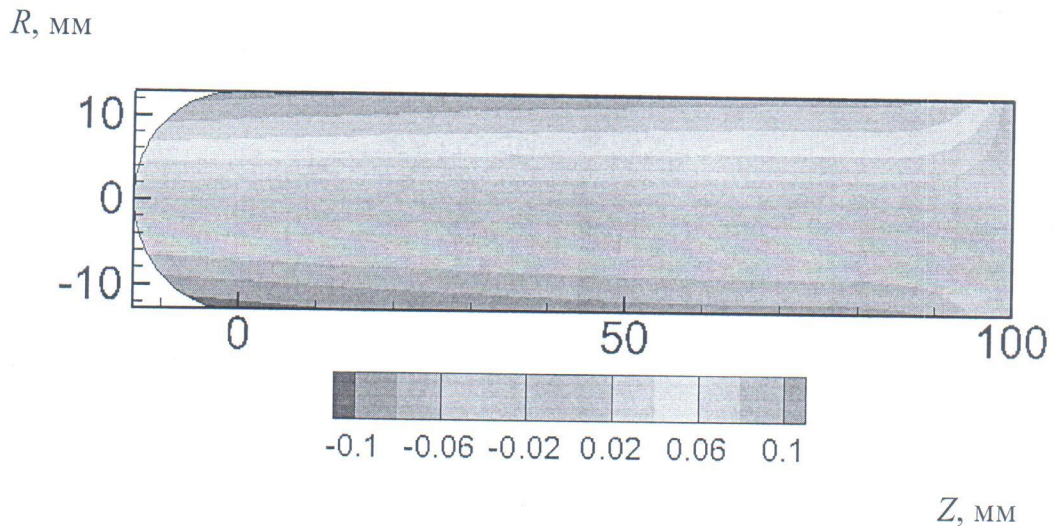


Рисунок 5.11 - Распределение перемещений в направлении оси Z в затупленном по сфере цилиндре. Радиус затупления сферы $R = 1,27$ см, скорость набегающего потока $V_\infty = 4,17$ км/с (число Маха $M = 9,8$, высота $h = 22$ км)

Из приведенных графических зависимостей следует:

- распределение температуры поверхности от 1500 до 2200 К, обтекаемого внешним потоком элемента (вдоль образующей элемента), отличается от постоянного и существенно превышает температуру ($T_w = 300$ К) поверхности элемента, принятую в качестве граничного условия при расчете аэротермодинамики;
- радиус затупления R изменяется на 4,6 % (с $R = 12,7$ мм до $R = 12,12$ мм). При этом конвективный поток тепла q_w в передней критической точке за счет изменения радиуса кривизны R возрастает на 2,4 %. Однако, если учесть существенный рост температуры поверхности $T_w = 2200$ К, то изменение будет уже на уровне от 10 до 20 %;
- перемещения \bar{U} точек рассматриваемого сплошного элемента невелики и, в основном, концентрируются вблизи заделки;
- конвективный тепловой поток (рисунок 5.7), взятый из работы [70], должен быть скорректирован на 70 % вдоль образующей цилиндра при учете решений уравнений квазистатической термоупругости (из-за существенного повышения температуры в теле и на поверхности элемента).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках выполнения первого этапа “Разработка и тестирование квазимонотонной компактно-полиномиальной разностной схемы повышенного порядка точности” базовой части государственного задания в сфере научной деятельности Министерства образования и науки Российской Федерации № 13.5240.2017/БЧ «Создание научно-технических основ для разработки многоцелевого источника импульсных струй плазмы для технологий нового поколения», было подготовлено несколько статей, входящих в базу данных Scopus и Web of Science [74-77], публикаций в трудах конференций и тезисов докладов, входящих в базы данных РИНЦ [78-88]. Представлено 9 обзорных, устных и стендовых докладов на международных и всероссийских конференциях. Опубликовано статьи в журналах из перечня ВАК [89-90].

Первый этап НИР посвящен разработке и тестированию квазимонотонной компактно-полиномиальной разностной схемы повышенного порядка точности. В прошедшем году разработаны математическая модель и компьютерный метод расчета. После проведенных тестов стал возможен переход к детальной компьютерной реализации разработок, выполненных авторским коллективом, включая разряды и конфигурации низко- и высокотемпературной плазмы [91-95]. Работа по госзаданию Минобрнауки России на проведение в вузе научно-исследовательских работ выполнена сотрудниками кафедры теплофизики в строгом соответствии с Техническим заданием, к участию в исследованиях привлечены 2 аспиранта кафедры теплофизики МГТУ им. Н.Э. Баумана. Полученный по результатам НИР материал может быть использован в МГТУ им. Н.Э. Баумана при подготовке курсовых и дипломных проектов, магистерских и кандидатских диссертаций по направлению «Ядерная энергетика и теплофизика».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1961. 467 с.
- 2 Смирнов В.П., Захаров С.В., Грабовский Е.В. Увеличение интенсивности излучения в квазисферической системе “двойной лайнер”/“dynamic-hohlraum” // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 81. Вып. 9. С. 556-562.
- 3 Кузенов В.В., Лебо И.Г., Лебо А.И., Рыжков С.В. Физико-математические модели и методы расчета воздействия мощных лазерных и плазменных импульсов на конденсированные и газовые среды. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 328 с.
- 4 Ворончев В.Т., Кукулин В.И. Реализация термоядерного процесса в D^3He-^9Be -плазме на основе Z-пинча со сверхбыстрым лазерным поджигом // Ядерная физика. 2010. Т. 73, № 1. С. 41–61.
- 5 Magnetically driven implosions for inertial confinement fusion at Sandia National Laboratories / M.E. Cuneo [et al.] // IEEE Transactions on Plasma Science. 2012. V. 40. P. 3222-3245.
- 6 Magneto-inertial approach to direct-drive laser fusion / O.V. Gotchev [et al.] // Journal of Fusion Energy. 2008. V. 27. P. 25-31.
- 7 Magnetized target fusion in a spherical geometry with standoff drivers / Y.C.F. Thio [et al.] // Current Trends in International Fusion Research: Proceedings of the Second Symposium. 1999. P. 113–134.
- 8 Кузенов В.В., Рыжков С.В. Разработка метода расчета физических процессов в комбинированных схемах магнитно-инерционного удержания плазмы // Известия РАН. Серия Физическая. 2016. Т. 80, № 5. С. 659-663.
- 9 Рыжков С.В. Современное состояние, проблемы и перспективы термоядерных установок на основе магнитно-инерционного удержания горячей плазмы // Известия РАН. Серия Физическая. 2014. Т. 78, № 5. С. 647-653.
- 10 Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Evaluation of hydrodynamic instabilities in inertial confinement fusion target in a magnetic field // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. № 4 (86). P. 103-107.
- 11 Ryzhkov S.V. Low radioactive and hybrid fusion - a path to clean energy // Sustainable Cities and Society. 2015. V. 14. P. 313-315.

- 12 Фролко П.А., Шумаев В.В. Газодинамические аспекты процессов взаимодействия интенсивного лазерного излучения с плазмой энергетических установок // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 4. С. 161-166.
- 13 Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // Journal of Computational Physics. 1988. V. 77. P. 439-471.
- 14 Xu Z., Shu C.-W. Anti-diffusive high order WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations // Method and Application of Analysis. 2005. V. 12. P. 169-190.
- 15 Xu Z., Shu C.-W. Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference WENO schemes // Journal of Computational Physics. 2005. V. 205. P. 458-485.
- 16 Xu Z., Shu C.-W. Anti-diffusive finite difference WENO methods for shallow water with transport of pollutant // Journal of Computational Mathematics. 2006. V. 24. P. 239-251.
- 17 Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
- 18 Harten A., Engquist B., Osher S, Chakravarthy S. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1987. V. 71. P. 231-303.
- 19 Shu C.W., Osher S. Efficient implementation of essentially non- oscillatory shock-capturing schemes // J. Comput. Phys. 1989. V. 83, №. 1. P. 32-78.
- 20 Liu X.D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. V. 115. P. 202-212.
- 21 Jang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202-228.
- 22 Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non- oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // NASA/CR-97-206253. 1997. ICASE Report № 97-65.
- 23 Пинчуков В.И., Шу Ч.В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. РАН, 2000.
- 24 Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н, Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
- 25 Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. С. 271–306.

- 26 Довгилевич Л.Е., Софронов И.Л. О применении компактных схем для решения волнового уравнения. Препринт ИПМ АН СССР №84. Москва, 2008. 26 с.
- 27 Савельев А.Д. Составные компактные схемы высокого порядка для моделирования течения вязкого газа // ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47, № 8. С. 1387-1401.
- 28 Liseikin V.D. Grid Generation Methods. Dordrecht et al.: Springer-Verlag, 2010. 390 p.
- 29 Shewchuk J.R. Triangle. A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and 3D Delaunay Triangulator. <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>
- 30 Hang Si. A Quality Tetrahedral Mesh Generator and a 3D Delaunay Triangulator. <http://tetgen.berlios.de>
- 31 NETGEN - Automatic Mesh Generator. <http://www.hpfem.jku.at/netgen/>
- 32 Coacley T.J. Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations // AIAA Paper. 1983. №83-1693.
- 33 Coacley T.J. Numerical simulation of viscous transonic airfoil flows // AIAA Paper. 1987. №8-0416.
- 34 Козлов Б.Н. Скорости термоядерных реакций // Атомная энергия. 1962. Т. 12, №3. С. 238.
- 35 Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 303 с..
- 36 Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Едиториал УРСС, 2009. 424 с.
- 37 Дьяченко В.Ф., Имшенник В.С. К магнитногидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 5. М.: Атомиздат, 1967. С.394-438.
- 38 Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 1. М.: Атомиздат, 1963. С.183-272.
- 39 Кузенов В.В., Рыжков С.В., Шумаев В.В. Определение термодинамических свойств замагниченной плазмы на основе модели Томаса-Ферми // Прикладная физика. 2014. № 3. С. 22-25.
- 40 Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Shumaev V. V. Application of Thomas-Fermi model to evaluation of thermodynamic properties of magnetized plasma // Problems of Atomic Science and Technology. 2015. No. 1 (95). P. 97-99.

- 41 Кузенов В.В., Лебо И.Г., Лебо А.И., Рыжков С.В. Физико-математические модели и методы расчета воздействия мощных лазерных и плазменных импульсов на конденсированные и газовые среды (2-е изд.). М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 328 с.
- 42 Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical modeling of magnetized plasma compressed by the laser beams and plasma jets // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. № 1 (83). P. 12-14.
- 43 Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. М.: Наука, 1981. 304 с.
- 44 Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 364 с.
- 45 Bokanowski O., Martin S., Munos R., Zidani H. An anti-diffusive scheme for viability problems // Applied Numerical Mathematics. 2006. V. 56. P. 1147-1162.
- 46 Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 384 с.
- 47 Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 560 с.
- 48 Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
- 49 Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. Общий курс. М.: Наука, 1964. 815 с.
- 50 Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
- 51 Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
- 52 Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н., Сыздыков Е.К., Минин В.В. Численное решение сопряженной задачи гиперзвуковой аэродинамики и термомеханики термодеструктурирующих конструкций. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 9. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1114.html>
- 53 Коваленко А.Д. Термоупругость. Учебное пособие. К.: Вища школа, 1975. 215 с.
- 54 Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V., Frolko P.A. Numerical simulation of the coaxial magneto-plasma accelerator and non-axisymmetric radio frequency discharge // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 830. P. 012049.

55 Кузенов В.В., Рыжков С.В. Радиационно-гидродинамическое моделирование контактной границы плазменной мишени, находящейся во внешнем магнитном поле // Прикладная физика. 2014. № 3. С. 26-30.

56 Котов М.А., Кузенов В.В. Численное моделирование обтекания поверхностей перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. 2012. № 3. С. 17-30.

57 Ryzhkov S.V. Compact toroid and advanced fuel - together to the Moon?! // Fusion Science and Technology. 2005. V. 47, № 1Т. P. 342-344.

58 Рыжков С.В. Моделирование теплофизических процессов в магнитном термоядерном двигателе // Тепловые процессы в технике. 2009. № 9. С. 397–400.

59 Кузенов В.В. Построение регулярных адаптивных сеток в пространственных областях с криволинейными границами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. 2008. №1. С. 3-11.

60 Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 384 с.

61 Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971.

62 Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.

63 Альшина Е.А., Болтнев А.А., Качер О.А. Эмпирическое улучшение простейших градиентных методов // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 6. С. 43-57.

64 Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996. 376 с.

65 Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц в ячейках Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т выч. технологий, Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. 360 с.

66 Лунёв В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 328 с.

67 Лунёв В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 760 с.

- 68 Pandey A.K., Dechaumphai P., Weiting A.R. Thermal-Structural Finite Element Analysis using Linear Flux Formulation // NASA Technical Memorandum 102746. 1990. 10 p.
- 69 Three-Dimensional Thermal Structural Analysis of a Swept Cowl Leading Edge Subjected to Skewed Shock-Shock Interference Heating / S.P. Polesky et al. // Journal of Thermophysics. 1992. V. 6, № 1. P. 48-54.
- 70 Суржиков С.Т. Конвективный нагрев сферического затупления малого радиуса при относительно малых гиперзвуковых скоростях // ТВТ. 2013. Т. 51. С. 261-276.
- 71 Кузенов В.В. Тестирование отдельных элементов метода расчета физических процессов в мишени магнитно-инерциального термоядерного синтеза // Прикладная физика. 2016. № 2. С. 16-24.
- 72 Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Approximate method for calculating convective heat flux on the surface of bodies of simple geometric shapes // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 815. P. 012024.
- 73 Kuzenov V.V. Compression of magnetized target in the magneto-inertial fusion // Journal of Physics: Conference Series. 2017.
- 74 Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical simulation of the effect of laser radiation on matter in an external magnetic field // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 830. P. 012124.
- 75 Ryzhkov S.V., Kuzenov V.V. Model for plasma jet-driven magneto-inertial fusion // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 875. P. 122002.
- 76 Shumaev V.V., Kuzenov V.V. Development of the numerical model for evaluating the temperature field and thermal stresses in structural elements of aircrafts // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 891. P. 012311.
- 77 Kuzenov V.V., Some aspects of modeling of the target compression and heating in a magnetic field // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 891. P. 012300.
- 78 Кузенов В.В., Рыжков С.В. Некоторые аспекты моделирования сжатия и нагрева замагниченной мишени плазменными струями // Материалы Межд. конф. «Современные проблемы теплофизики и энергетики». Т. 2. М.: Издательский дом МЭИ, 2017. 9-11.10.2017, Москва, МЭИ. С. 246–248.

79 Добрынина А.О., Кузенов В.В., Рыжков С.В. Воздействие мощных плазменных струй на стенку и материалы термоядерной установки // Международный научный форум «Ядерная наука и технологии», посвященный 60-летию Института ядерной физики, 12-15.09.2017, Алматы, Казахстан. С. 269.

80 Фролко П.А., Шумаев В.В. Взаимодействие импульсных струй плазмы, сформированных группой капиллярных разрядов // Материалы Международной конференции «Современные проблемы теплофизики и энергетики». Т. 2. М.: Издательский дом МЭИ, 2017. С. 263–265.

81 Шумаев В.В., Добрынина А.О. Расчет процессов ламинарного и турбулентного течения газа около поверхности летательного аппарата // «Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках», 21–23 ноября 2017, Новосибирск. С. 105.

82 Кузенов В.В., Фролко П.А. Взаимодействие импульсных струй с замагниченным веществом в сильном магнитном поле // «Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках», 21–23 ноября 2017, Новосибирск. С. 68.

83 Фролко П.А., Шумаев В.В. Тепловые аспекты работы источников плазмы геликонного типа // Тезисы докладов XXI школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». 22-26 мая 2017, Санкт-Петербург. Т. 2. С. 272-273.

84 Кузенов В.В., А.Д. Петренко. Построение регулярной адаптивной расчетной сетки с использованием параболического генератора // Сборник материалов XX Юбилейной Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017). 24-31 мая 2017, Алушта. С. 76-78.

85 Фролко П.А., Шумаев В.В. Численная модель расчета параметров плазмы в газоразрядной камере ВЧ-разряда // Материалы XX Юбилейной Межд. конф. по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017). Алушта, 2017. С. 574-576.

86 Кузенов В.В., Фролко П.А., Шумаев В.В. Система импульсных капиллярных разрядов как способ получения плазменных струй // Сборник тезисов Всероссийской (с международным участием) конференции "Физика низкотемпературной плазмы"

(ФНТП-2017). 5-9 июня 2017, Казань. С. 104.

87 Добрынина А.О., Шумаев В.В. Приближенный расчет термонапряжений в элементе конструкции высокоскоростного летательного аппарата // Сборник докладов X Всероссийской конференции молодых ученых и специалистов (с международным участием) «БУДУЩЕЕ МАШИНОСТРОЕНИЯ РОССИИ», Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 25-28 сентября 2017. С. 561-564.

88 Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Modeling for compression of magnetized plasma for cylindrical and spherical implosions // 44th European Physical Society Conference on Plasma Physics, June 26-30, 2017, Belfast, Northern Ireland. P4.218.

89 Кузенов В.В. Компьютерное моделирование процесса сжатия и энерговыделения при лазерном воздействии на цилиндрически симметричную мишень // Ядерная физика и инжиниринг. 2016. Т. 7, № 4. С. 342–346.

90 Кузенов В.В., Рыжков С.В. Численное моделирование процесса лазерного сжатия мишени, находящейся во внешнем магнитном поле // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. С. 19-32.

91 Кузенов В.В., Рыжков С.В. Отдельные элементы физико-математической модели геликонного разряда // Прикладная физика. 2015. № 2. С. 37-44.

92 Ryzhkov S.V., Khvesyuk V.I., Ivanov A.A. Progress in an alternate confinement system called a FRC // Fusion Science and Technology. 2003. V. 43, No 1T. P. 304-308.

93 Kuzenov V.V., Polozova T.N., Ryzhkov S. V. Numerical Simulation of pulsed plasma thruster with a preionization helicon discharge // Problems of Atomic Science and Technology. 2015. No. 4 (98). P. 49-52.

94 Чирков А.Ю., Рыжков С.В., Багрянский П.А., Аникеев А.В. Термоядерные режимы аксиально-симметричной открытой системы с мощной инжекцией быстрых частиц // Прикладная физика. 2011. № 5. С. 57–63.

95 Chirkov A.Yu., Ryzhkov S.V., Bagryansky P.A., Anikeev A.V. Plasma kinetics models for fusion systems based on the axially-symmetric mirror devices // Fusion Science and Technology. 2011. V. 59, No 1T. P. 39-42.