Энергомашиностроение.

Э6

Лекция №4
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

- Температурное поле, градиент температуры и закон Фурье
- Теплопроводность веществ
- Дифференциальное уравнение теплопроводности
- Условие однозначности

Температурное поле, градиент температуры и закон Фурье

Температурным полем тела (или системы тел) называется совокупность значений температуры, взятая по его объему в любой рассматриваемый момент времени. Математически поле температур может быть выражено в форме уравнения *F(T, x, y, z, τ)* = 0.

В инженерной практике приходится иметь дело как с **нестационарным,** так и **со *стационарным*** температурными полями. Первое из этих полей меняется по пространству и времени, а второе является функцией только координат. Температурное поле обладает всеми свойствами непрерывного скалярного поля.

Изменение температурного поля по пространству наблюдается лишь в направлениях, пересекающих поверхности одинаковой температуры (изотермические поверхности); причем наиболее резкое изменение имеет место в направлении нормали к изотермической поверхности (рис. 1). Предел

$$\lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \bar{n}\frac{\partial T}{\partial n} = grad T \qquad (1)$$

называется в теории теплообмена ***градиентом температуры,*** где *n* - единичный вектор нормали; *n* - нормаль к изотермической поверхности. Градиент температуры представляет собой вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности и численно равный частной производной от температуры по этому направлению.

По определению

$$grad T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \qquad (2)$$

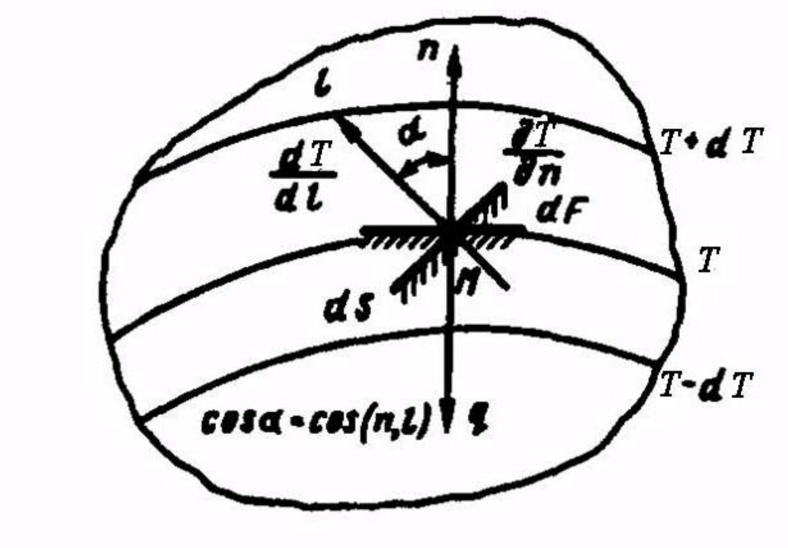


Рис. 1. К определению градиента температуры и формулировке закона Фурье

где *i* , *j* , *к* - единичные векторы.
Количество теплоты, проходящей в единицу времени τ, отнесенное к единице площади изотермической поверхности s, называется плотностью теплового потока *q* и является вектором, направление которого противоположно температурному градиенту (см. рис. 1.):

$$\overline{q} = \left(-\overline{n}\right)\frac{dQ}{d\tau}\frac{1}{S} \qquad (3)$$

В начале XIX столетия была высказана гипотеза о прямой пропорциональности вектора теплового потока градиенту температуры:

$$\overline{q} = -\lambda gradT \qquad (4)$$

которая носит название закона Фурье. Знак минус указывает на то, что векторы плотности теплового потока и градиента температур, в соответствии со II законом термодинамики, направлены в противоположные стороны, а множитель пропорциональности λ рассматривается как некоторая физическая характеристика, именуемая теплопроводностью.

Кроме того, отметим, что производная температуры по направлению *l* определяется через производные температуры по декартовым координатам формулой

$$\frac{dT}{dl} = \frac{\partial T}{\partial x}\cos(x,l) + \frac{\partial T}{\partial y}\cos(y,l) + \frac{\partial T}{\partial z}\cos(z,l) \qquad (5)$$

где cos(x, *l*), cos(y, *l*) и cos(г, *l*) - косинусы углов между направлением *l* и координатными осями *OX, OY, 0Z.* С учетом (4) закон Фурье (2) можно записать в виде:

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dl} dS \qquad (6)$$

где *dS* = *dF* • cos(n, *l*) - элементарная площадка, перпендикулярная направлению *l*.

Теплопроводность веществ

Теплопроводность λ в формуле (4) представляет собой коэффициент пропорциональности, чья роль заключается в уравнивании размерностей в левой и правой частях уравнения (4). Измеряется теплопроводность в ваттах на метр-кельвин [Вт/(м • К)].

Теплопроводность - это теплофизическая характеристика веществ. Для различных веществ при одинаковых градиентах температуры, поверхностях *F* и времени т количество проходящей через тело теплоты определяется только λ. Чем больше теплопроводность, тем выше будет способность вещества проводить теплоту, и наоборот. Другими словами, теплопроводность представляет собой теплофизический параметр, определяющий способность тел проводить теплоту.

Для одного и того же материала теплопроводность изменяется в довольно широком диапазоне, причем характер изменения определяется многими факторами: температурой, количеством примесей, наличием влаги, давлением и т.п. Как правило, зависимость λ от вышеперечисленных факторов не поддается строгому аналитическому описанию, поэтому основным источником получения достоверных значений теплопроводности остается эксперимент. *Теплопроводность металлов и сплавов* (рис. 2.) изменяется в диапазоне 2...450 Вт/(м • К). Самая большая теплопроводность у серебра, наименьшая - у висмута. С увеличением температуры А практически у всех чистых металлов уменьшается. Исключение составляют кобальт, бериллий и некоторые другие металлы.

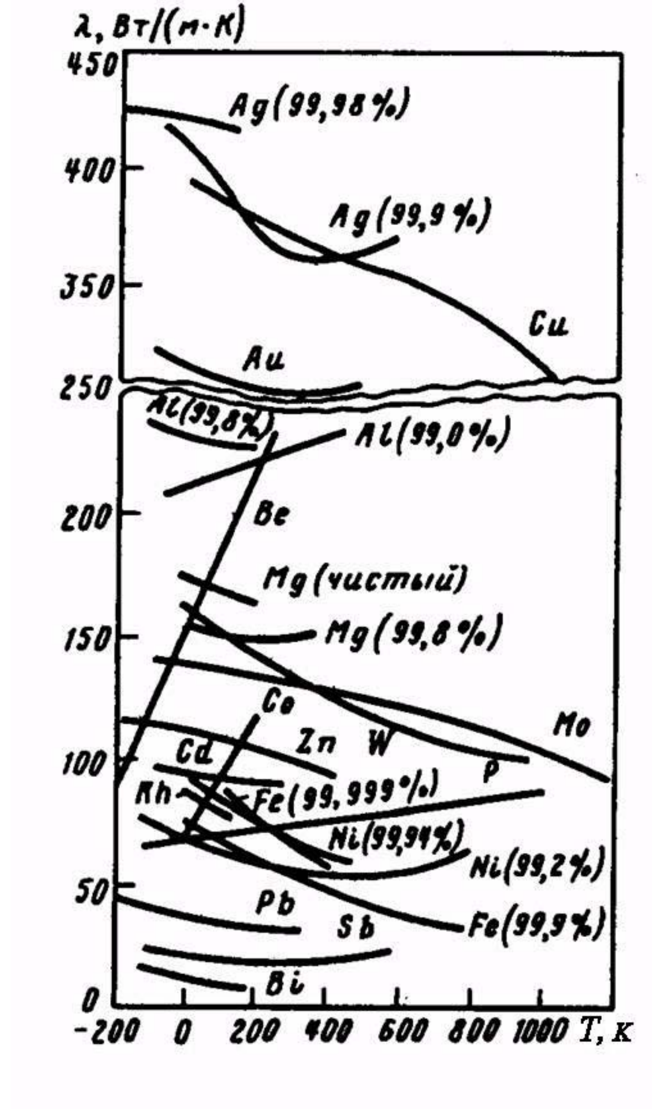


Рис. 2. Изменение теплопроводности металлов и их сплавов в зависимости от температуры

Теплопроводность металлов, так же как и электропроводность, определяется в основном диффузией свободных электронов. Зависимость теплопроводности металлических сплавов от температуры, как это видно из рис. 2, имеет довольно сложный характер. Большое влияние на значение λ оказывают примеси. Как правило, даже ничтожное добавление к чистому металлу других веществ ведет не только к резкому уменьшению его теплопроводности, но и к самому неожиданному изменению зависимости λ от температуры.

Теплопроводность жидкостей (рис. 3) изменяется в диапазоне 0,06 ...0,7 Вт/(м • К). С ростом температуры теплопроводность у всех жидкостей, за исключением воды и глицерина, уменьшается. *Теплопроводность строительных и теплоизоляционных материалов* (рис. 4) имеет значения 0,023...2,9 Вт/(м • К) и возрастает с увеличением температуры.

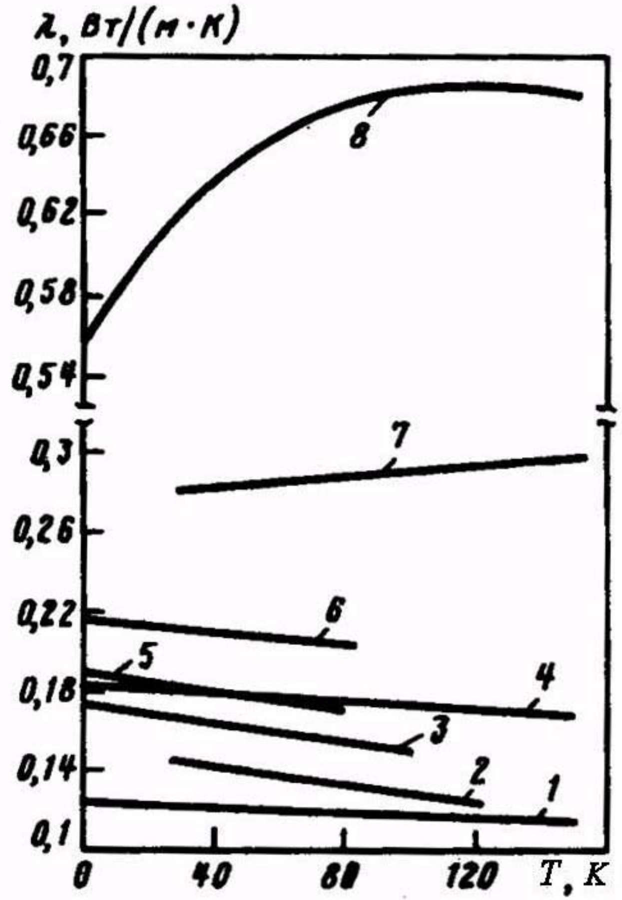
Как правило, у материалов с большой объемной плотностью теплопроводность выше; она также зависит от структуры материала, его пористости и влажности. Для влажных материалов теплопроводность значительно выше, чем для сухих и воды, взятых в отдельности.

Материалы с низким значением теплопроводности [меньше 0,25 Вт/(м • К)] ***называются теплоизоляционными.***

Теплопроводность газов (рис. 5) довольно значительно увеличивается с ростом температуры. Как правило, значения теплопроводности для газов колеблются примерно от 0,006 до , 0,1 Вт/(м • К). Исключение составляют водород и гелий, теплопроводность которых в 5... 10 раз выше, чем у остальных газов.

Согласно кинетической теории, в которой газ рассматривается как совокупность молекул, находящихся в беспрерывном хаотическом движении, теплопроводность определяется соотношением

$$\lambda = \frac{\overline{w}\,\overline{l}\,c_V\,\rho}{3} \qquad (7)$$



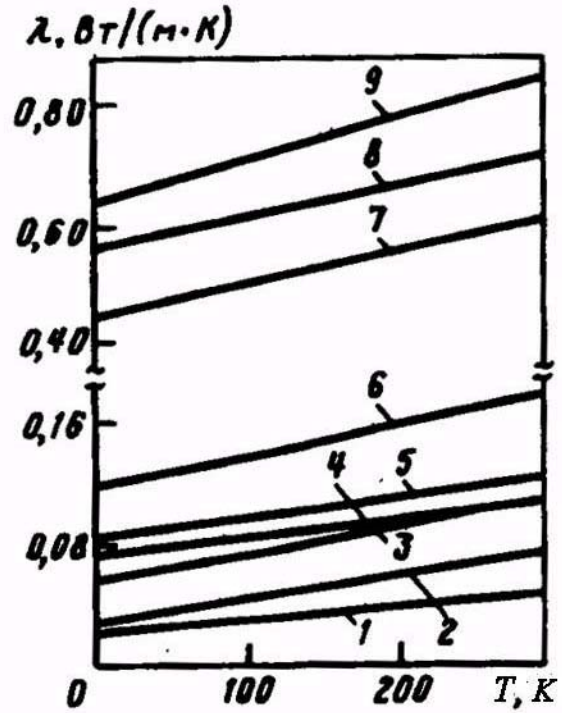


Рис. 3. Изменение теплопроводности некоторых жидкостей в зависимости от температуры:
1 - вазелиновое масло, 2 - бензол, 3 - ацетон, 4 - касторовое масло, 5 - этиловый спирт, 6 - метиловый спирт, 7 - глицерин, 8 - вода

Рис. 4. Изменение теплопроводности строительных теплоизоляционных материалов:
1 - воздух, 2 - минеральная шерсть, 3 - шлаковая вата, 4 - ньювель, 5 - совелит, 6-9 диатомовый , красный, шлакобетонный, шамотный кирпич соответственно

где w - средняя скорость перемещения молекул; l - средняя длина свободного пробега молекул; C_v - теплоемкость.

С увеличением давления произведение *1p* остается постоянным, поэтому теплопроводность газов слабо зависит от давления. Исключение составляют очень малые (меньше 0,3 МПа) и очень большие (более 200 МПа) давления.

Средняя скорость перемещения молекул зависит от температуры по формуле

$$\overline{w} = \sqrt{\frac{3R_\mu T}{\mu}}$$

следовательно, согласно элементарной кинетической теории газов, $\lambda \sim T^{0.5}$. Более точные результаты дает интерполяционная формула

$$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{T}{273}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (8)$$

где λ_o - теплопроводность при T = 273 К.

Теплопроводность водяного пара и других реальных газов, существенно отличающихся от идеальных, сильно зависит также и от давления. Теплопроводность для газовых смесей не подчиняется закону аддитивности и обычно определяется на основании опытных данных. В приложении приведены теплофизические свойства различных материалов, жидкостей и газов.

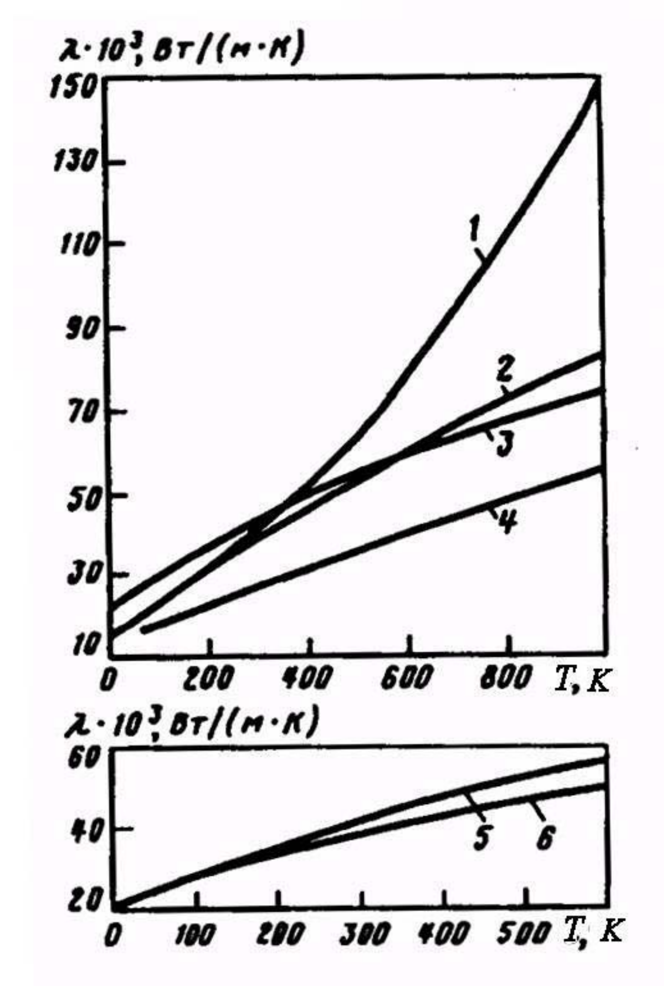


Рис. 5. Зависимость теплопроводности от температуры некоторых газообразный веществ:
1- водяной пар, 2- углекислый газ, 3- воздух, 4- аргон, 5- кислород, 6- азот

Дифференциальное уравнение теплопроводности

Для составления дифференциального уравнения теплопроводности рассмотрим неравномерно нагретое тело, изображенное на рис. 6. Пусть поверхность этого тела *S,* а объем *V.*

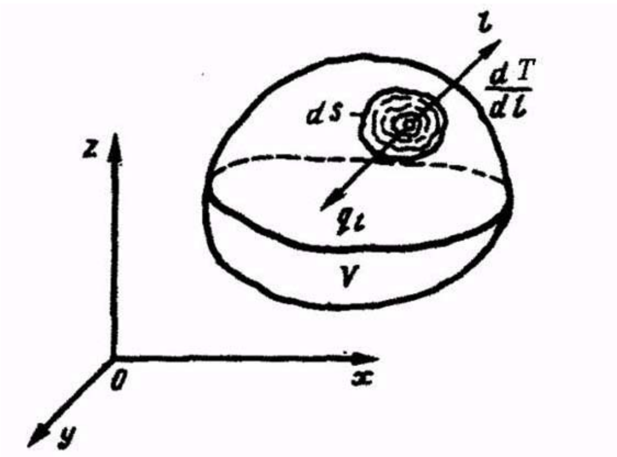


Рис. 6. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Если температура тела вследствие каких-либо причин изменится и станет отличной от температуры окружающей среды, между телом и средой начнется процесс теплообмена. Первый закон термодинамики для этого случая запишется в виде

$$Q_{cm} + Q_V = \Delta U + L \qquad (9)$$

где Q_{cm} - количество теплоты, полученное (или отданное) телом через поверхность; Q_V - количество теплоты, выделяющееся (или поглощающееся) в теле вследствие действия внутренних источников (или стоков) теплоты; ΔU - изменение внутренней энергии и *L* - работа, совершенная телом над окружающей средой или наоборот. Примем, что механическая работа равна нулю, т.е. *L* = 0.

Количество теплоты Qст может быть вычислено по формуле

$$Q_{cm} = \int_S \int_0^{\tau} dQ d\tau \qquad (10)$$

а Q_V определено по соотношению

$$Q_V = \int_V \int_0^\tau q_V dV d\tau \tag{11}$$

где q_V - удельная мощность внутренних источников (стоков) теплоты.

Изменение внутренней энергии тела

$$\Delta U = \int_V \int_0^\tau c_V \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau \tag{12}$$

С учетом уравнений (10)…(12) уравнение (9) принимает вид

$$\int_S \int_0^\tau dQ d\tau + \int_V \int_0^\tau q_V dV d\tau = \int_V \int_0^\tau c_V \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau \tag{13}$$

Первый член уравнения (13) в соответствии с формулой (4) можно расшифровать так:

$$\int_S \int_0^\tau dQ d\tau = -\int_S \int_0^\tau \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cos(x,l) + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \cos(y,l) + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \cos(z,l) \right] dS d\tau \tag{14}$$

Применив к формуле (14) преобразование Гаусса-Остроградского, находим

$$\int\limits_S \int\limits_0^\tau dQ d\tau = \int\limits_V \int\limits_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dV d\tau \tag{15}$$

Подставив далее выражение (15) в (13), имеем

$$\int\limits_V \int\limits_0^\tau \left[c_V \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - q_V \right] dV d\tau = 0 \tag{16}$$

Если все характеристики в уравнении (16) – непрерывные функции координат и времени, а объем V – произвольный, то интеграл равен нулю при равенстве нулю подынтегрального выражения. Следовательно,

$$c_V \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_V \tag{17}$$

Дифференциальное уравнение (17) называется дифференциальным *уравнением Фурье-Кирхгофа* и устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке тела. При постоянной теплопроводности уравнение (17) упрощается:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q_V}{c_V \rho} \tag{18}$$

где $a = \lambda / c_V \rho$ - изохорическая температуропроводность, м^2/с. Изохорическая температуропроводность, входящая в уравнение (18), является теплофизическим параметром. Она характеризует способность вещества выравнивать температуру. Последнее означает, что тела, имеющие большую температуропроводность, нагреваются (охлаждаются) быстрее по сравнению с телами, имеющими меньшую температуропроводность. Температуропроводность изменяется от 1,4 • 10^{-7}м^2/с для масел до 0,2 • 10^{-3} м^2/с для серебра. Уравнение (18) есть линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка параболического типа. Для анизотропных тел, у которых теплопроводность зависит от направления, уравнение Фурье-Кирхгофа принимает вид

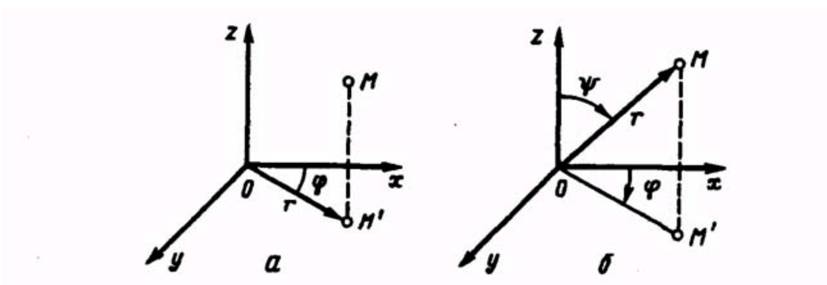


Рис. 6. Цилиндрические (a) и сферические (b) координаты

Если значения λ_i,- и c_v в анизотропном теле не зависят от температуры, то уравнение (19) путем преобразования можно $x_i = x_i' \sqrt{a}$ привести к виду (18).

$$c_V \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + q_V \tag{19}$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности (17) имеет следующий вид:

а) в цилиндрической системе координат (рис. 7, а)

$$c_V\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V \qquad (20)$$

и при λ=const

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{q_V}{c_V\rho} \qquad (21)$$

б) в сферической системе координат (рис. 7, б)

$$c_V\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{2\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\lambda\sin\psi\frac{\partial T}{\partial\psi}\right)+q_V \qquad (22)$$

и при λ=const

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\sin\psi\frac{\partial T}{\partial\psi}\right)\right)+\frac{q_V}{c_V\rho} \qquad (23)$$

Условия однозначности

Полученное в (3) дифференциальное уравнение (17) описывает множество явлений теплопроводности. Чтобы из бесчисленного количества этих явлений выделить одно и дать его полное математическое описание, к дифференциальному уравнению теплопроводности необходимо добавить условия однозначности, которые содержат геометрические, физические и граничные условия.

Геометрические условия определяют форму и размеры тела, в котором протекает изучаемый процесс. *Физические условия* задаются теплофизическими параметрами тела λ, c_v и распределением внутренних источников теплоты. *Временные (начальные) условия* содержат распределение температуры в теле в начальный момент времени. *Граничные условия* определяют особенности протекания процесса на поверхности тела. Граничные условия могут быть заданы несколькими способами. *Граничные условия I рода.* В этом случае задается распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$T_{cm} = f\left(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}, \tau\right) \qquad (24)$$

где T_{CT} - температура на поверхности тела; $x_{ст}$ $y_{ст}$ z_{ct} - координаты точки на поверхности тела.
В частном случае, когда температура на поверхности тела не изменяется по времени,

$T_{cm} = f\left(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}\right)$, а если она постоянна по поверхности, то T_{CT} = const. Граничные *условия II рода.*
В этом случае заданной является плотность теплового потока для каждой точки поверхности тела в любой момент времени, т.е.

$$q_{cm} = f\left(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}, \tau\right) \qquad (25)$$

В частном случае, например при нагревании металлических изделий в высокотемпературных печах, $q_{ст}$ = const. Граничное условие II рода записывается в виде

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{cm} = q_{cm} \qquad (26)$$

Граничные *условия III рода.* В этом случае задаются температура среды $T_ж$ и условия теплообмена этой среды с поверхностью тела. Процессы теплообмена между средой и телом являются исключительно сложными и зависят от многих факторов.
Для описания интенсивности теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой используется гипотеза Ньютона-Рихмана, согласно которой

$$q_{ст} = \alpha\left(T_{ст} - T_{Ж}\right) \qquad (27)$$

где α - коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м^{2}К).
Как следует из формулы (27), коэффициент теплоотдачи численно равен количеству теплоты, отдаваемого (или воспринимаемого) единицей поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью тела и окружающей средой, равной 1 К.

С учетом уравнений (3) и (27) граничное условие III рода записывается в виде

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{ст_1} = \alpha\left(T_{ст} - T_{Ж}\right) \qquad (28)$$

Когда коэффициент теплоотдачи имеет большие значения (например, при кипении жидкости на поверхности тела), граничные условия III рода переходят в граничные условия I рода, так как в этом случае температура поверхности тела становится практически равной температуре жидкости.
Граничные *условия IV рода* формулируются на основании равенства тепловых потоков, проходящих через поверхность соприкосновения тел, т.е.

$$-\lambda_1 \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{ст_1} = -\lambda_2 \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{ст_2} \qquad (29)$$

При совершенном тепловом контакте оба тела на поверхности соприкосновения имеют одинаковую температуру, т.е. изотермы непрерывно переходят из одного тела в другое, а градиенты температур в этих точках удовлетворяют условию (29).

В реальных конструкциях тепловой контакт между соприкасающимися деталями обычно нельзя считать идеальным, так как действительная поверхность контакта составляет только малую часть всей поверхности, даже если эти поверхности гладкие, и сжимающая сила велика.

Если коэффициенты теплопроводности находящихся в контакте тел существенно выше, чем теплопроводность среды, заполняющей полости, то основная часть теплоты будет передаваться через точки контакта. Различие температур соприкасающихся поверхностей пропорционально контактному термическому сопротивлению или обратно пропорционально контактной тепловой проводимости, которая количественно характеризуется коэффициентом α_k

В этом случае условие (29) принимает вид

$$-\lambda_1 \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{cm_1} = -\lambda_2 \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{cm_2} = \alpha_k \left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right)$$

Коэффициент контактного теплообмена зависит от множества факторов и его определение является сложной задачей.

Из сопоставления формул (26), (28) и (29) следует, что они различаются правыми частями уравнений. Исключение составляет граничное условие I рода, которое задается температурой поверхности тела. Однако можно показать, что граничное условие III рода преобразуется в граничное условие I рода при $\alpha \to \infty$, т.е. при очень интенсивной теплоотдаче. Тогда из уравнения (27) следует, что $T_{cm} = T_{ж}$.

Граничные условия могут существенно усложниться процессами радиационного теплообмена, процессами массообмена с фазовыми переходами и т.п.

Дифференциальное уравнение (17) совместно с условиями однозначности дает полную математическую формулировку конкретной задачи теплопроводности. Решение этой задачи может быть выполнено аналитически, численным или экспериментальным методом. В последнем случае используются методы физического подобия и аналогий.

Контрольные вопросы

- Температурное поле
- Градиент температуры
- Закон Фурье
- Теплопроводность веществ
- Дифференциальное уравнение теплопроводности
- Изохорическая температуропроводность
- Условие однозначности
- Геометрические условия
- Граничные условия I рода
- Граничные условия II рода
- Граничные условия III рода
- Граничные условия IV рода