Энергомашиностроение.

Э6

Лекция №5
СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

- Теплопроводность тел простой формы

Теплопроводность тел простой формы

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q_V=0 \qquad (1)$$

Неограниченная плоская стенка (рис. 1, а) представляет собой тело, ограниченное с двух сторон параллельными поверхностями, протяженность которых в направлении y и z велика.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_V=0 \qquad (2)$$

Тело цилиндрической формы (рис. 1, б), протяженность которого по оси *z* велика, называется ***неограниченным цилиндром****,* который может быть сплошным *(R_1* = 0) и полым *(R_1* ≠ 0)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_V=0 \qquad (3)$$

q_V - внутренний источник теплоты (таких, как объемные химические реакции, радиоактивный распад, работа трения и т.п.) $\left[\frac{Вт}{м^3}\right]$

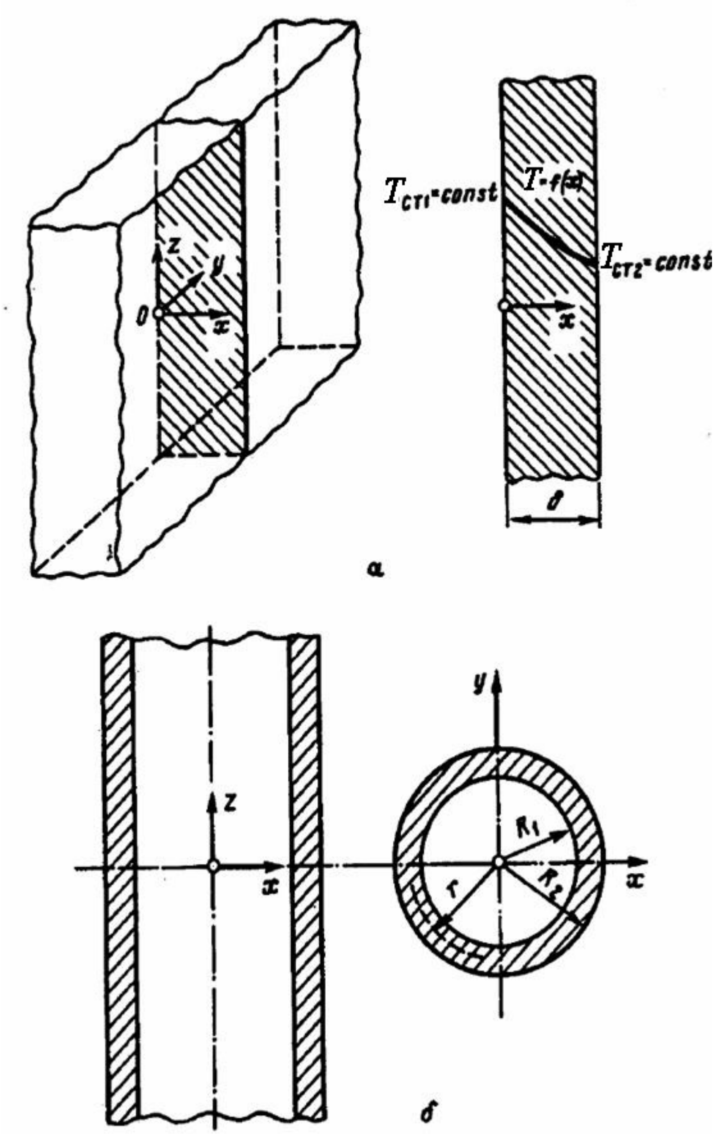


Рис. 1. Неограниченная плоская стенка (а) и неограниченный полый цилиндр (б)

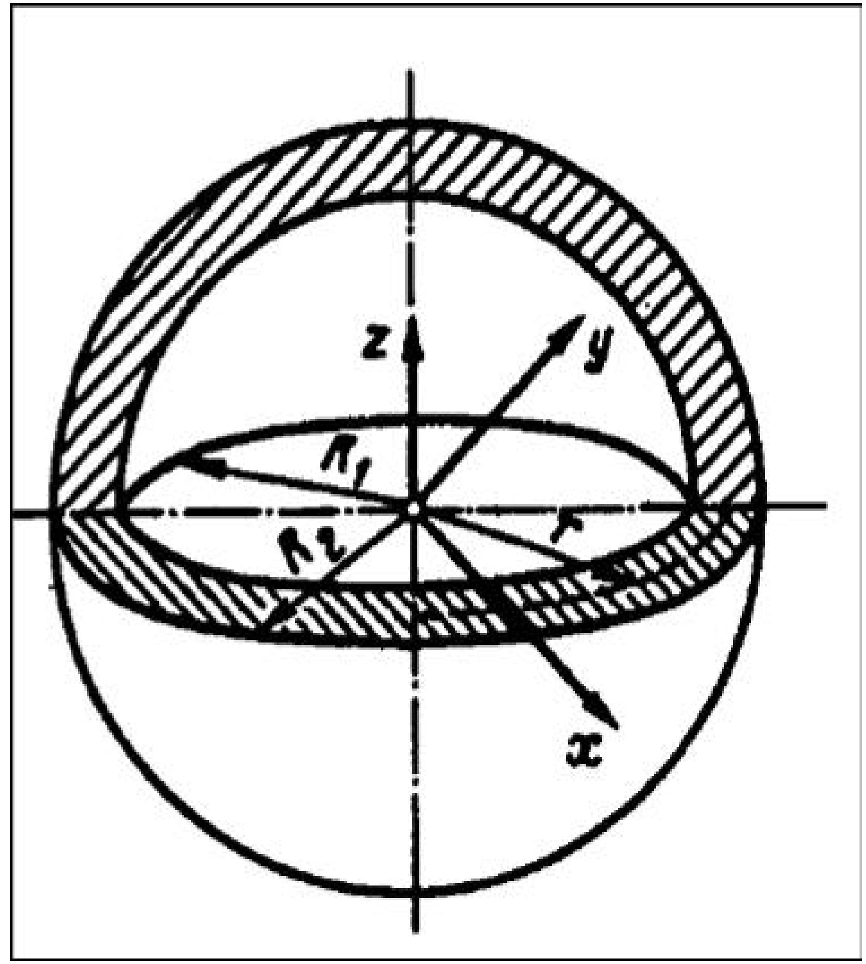


Рис. 2. Полый шар

В случае изотермичности внутренней и наружной поверхностей для ***полого и сплошного шаров*** (рис. 2)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\lambda\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_V=0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{\varsigma^n}\frac{\partial}{\partial \varsigma}\left(\varsigma^n\lambda\frac{\partial T}{\partial \varsigma}\right)+q_V=0 \tag{5}$$

где ζ – обобщенная координата.

Неограниченная плоская стенка:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \tag{6}$$

Граничные условия 1 рода

$$T=T_{cm_1} \quad \text{при} \quad x=0$$

$$T=T_{cm_2} \quad \text{при} \quad x=\delta$$

$$T=C_1x+C_2 \tag{7}$$

$$C_2=T_{cm_1};C_1=-\frac{T_{cm_1}-T_{cm_2}}{\delta} \tag{8}$$

$$\theta = \frac{T - T_{cm_2}}{T_{cm_1} - T_{cm_2}} \tag{9}$$

$$X = \frac{x}{\delta}$$

$$\theta = 1 - X$$

$$q_{cm} = \frac{\lambda}{\delta}\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right) \tag{10}$$

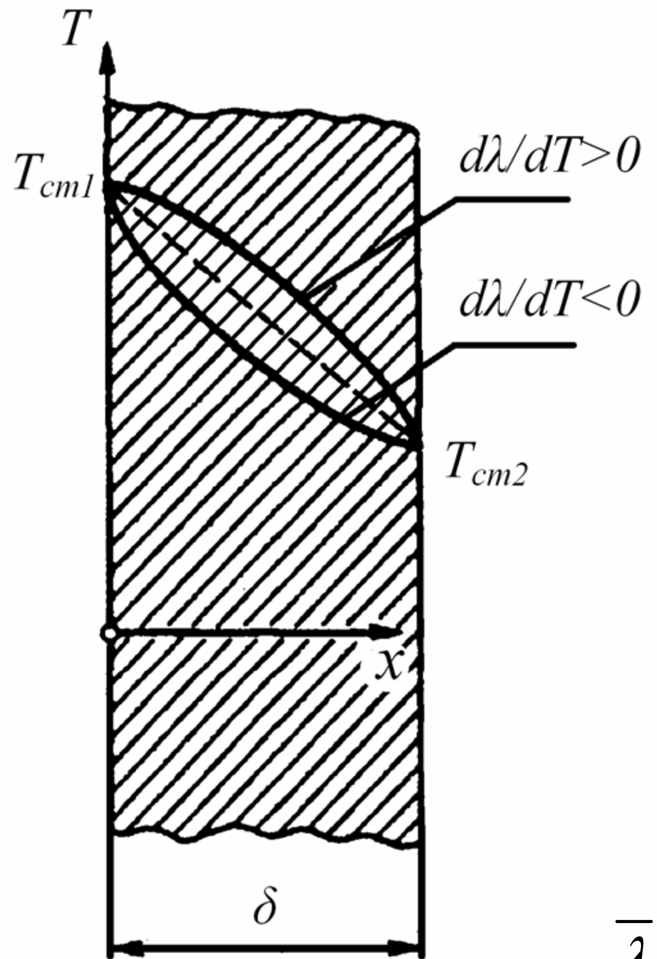
Отношение λ/δ (в ваттах на квадратный метр-кельвин) называется ***тепловой проводимостью стенки***, а обратная величина δ/λ (квадратный метр-кельвин на ватт) - ***тепловым* или *термическим сопротивлением стенки.***

$$Q_\tau = q_{cm} F\tau = \frac{\lambda}{\delta}\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right) F\tau \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(T)\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{12}$$

$$\vartheta = \int_{T_{cm1}}^{T} \lambda(T)\,dT \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0 \tag{14}$$



$$\vartheta = \int_{T_{cm_1}}^{T_{cm_2}} \lambda(T)dT = \vartheta_{cm_1} \text{ при } \quad x = \delta$$

$$\vartheta = 0 \text{ при } \quad x = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0 \qquad (15)$$

$$\int_{T_{cm_1}}^{T_{cm_2}} \lambda(T)dT = \overline{\lambda} \frac{\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right)}{1 - \dfrac{x}{\delta}} \qquad (16)$$

$$q_{cm} = \frac{\overline{\lambda}}{\delta}\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right) \qquad (17)$$

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{T_{cm_1} - T_{cm_2}} \int_{T_{cm_1}}^{T_{cm_2}} \lambda(T)dT$$

Среднеинтегральная теплопроводность пластины

Рис. 3. Распределение температуры в неограниченной плоской стенке при λ=f(t)

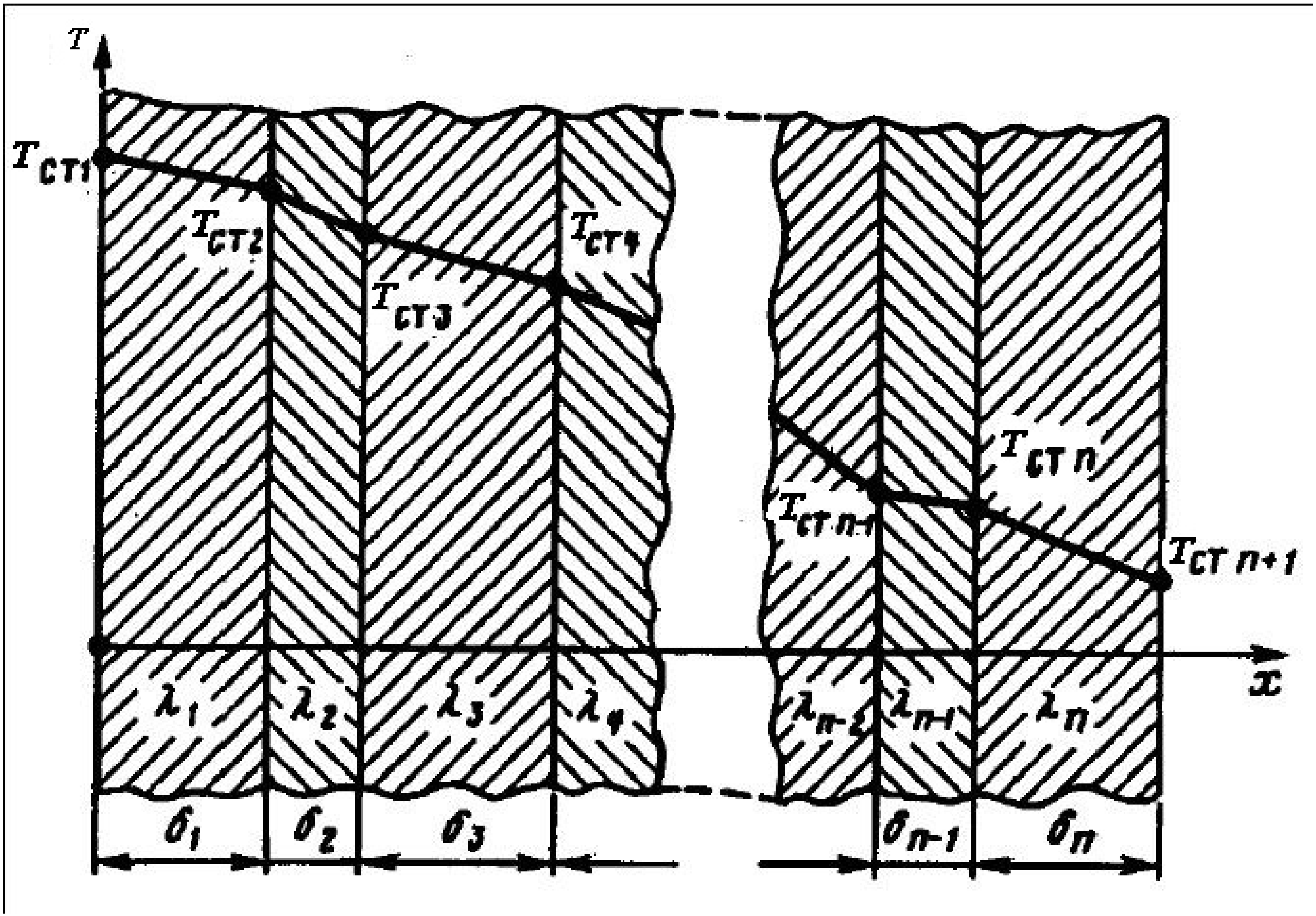


Рис. 4. Составная плоская стенка

$$\begin{cases} q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right) \\ q = \frac{\lambda_2}{\delta_2}\left(T_{cm_2} - T_{cm_3}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q = \frac{\lambda_n}{\delta_n}\left(T_{cm_n} - T_{cm_{n+1}}\right) \end{cases} \tag{18}$$

$$\left(T_{cm_1} - T_{cm_{n+1}}\right) = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right) \tag{19}$$

$$q = \frac{T_{cm_1} - T_{cm_{n+1}}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{T_{cm_1} - T_{cm_{n+1}}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \tag{20}$$

$$\begin{cases} T_{cm_2} = T_{cm_1} - q\frac{\delta_1}{\lambda_1} \\ T_{cm_3} = T_{cm_1} - q\frac{\delta_1}{\lambda_1} - q\frac{\delta_2}{\lambda_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_{cm_{(i+1)}} = T_{cm_1} - q\sum_{i=1}^{i} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \end{cases} \tag{21}$$

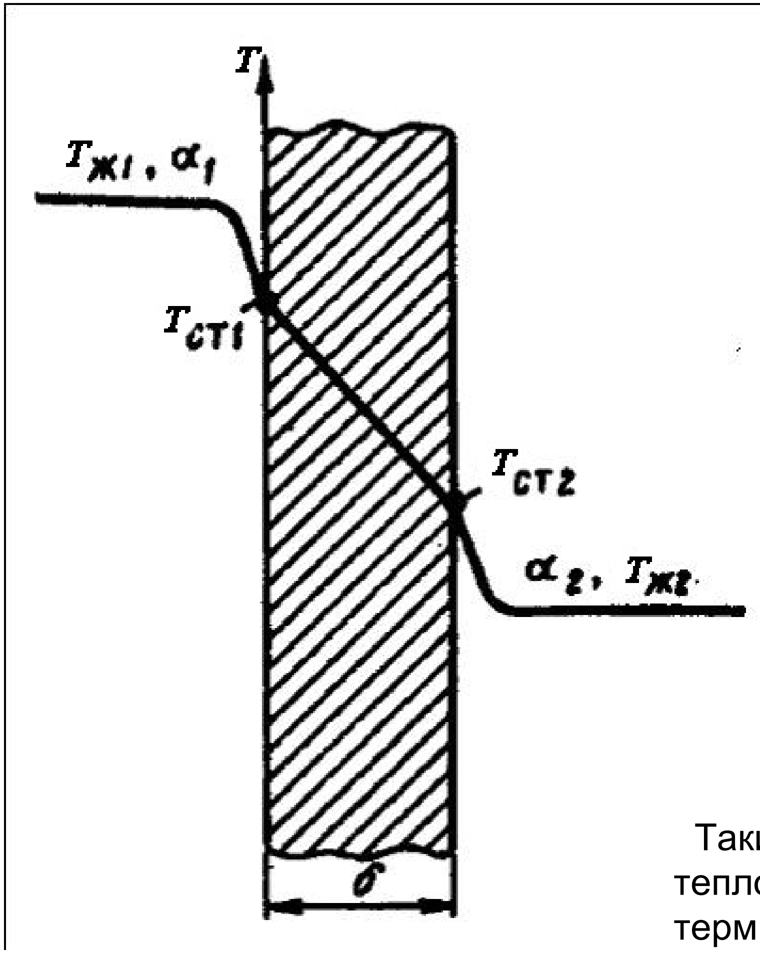


Рис. 5. Передача теплоты через плоскую стенку

$$\begin{cases} q = \alpha_1 \left(T_{ж_1} - T_{ст_1} \right) \\ q = \dfrac{\lambda}{\delta} \left(T_{ст_1} - T_{ст_2} \right) \\ q = \alpha_2 \left(T_{ст_2} - T_{ж_2} \right) \end{cases} \qquad (22)$$

$$q = k \left(T_{ж_1} - T_{ж_2} \right)$$

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2} \qquad (23)$$

k – коэффициент теплопередачи

Таким образом, полное термическое сопротивление теплопередачи складывается из следующих термических сопротивлений:

- термического сопротивления теплоотдачи от горячей жидкости к стенке $R_1 = 1/\alpha_1$
- термического сопротивления теплопроводности стенки $R_{ст} = \delta/\lambda$
- термического сопротивления теплоотдачи от поверхности стенки и холодной жидкости $R_2 = 1/\alpha_2$

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется ***полным термическим сопротивлением теплопередачи***

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \tag{24}$$

$$T_{cm_1} = T_{жс_1} - q\frac{1}{\alpha_1}; T_{cm_2} = T_{жс_2} + q\frac{1}{\alpha_2} \tag{25}$$

$$R_{cm} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} \tag{26}$$

- для многослойной стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \tag{27}$$

$$q = k\left(T_{жс_1} - T_{жс_2}\right) \tag{28}$$

$$Q = qF = k\Delta TF \tag{29}$$

$$T_{cm_{(i+1)}} = T_{жс_1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}\right) \tag{30}$$

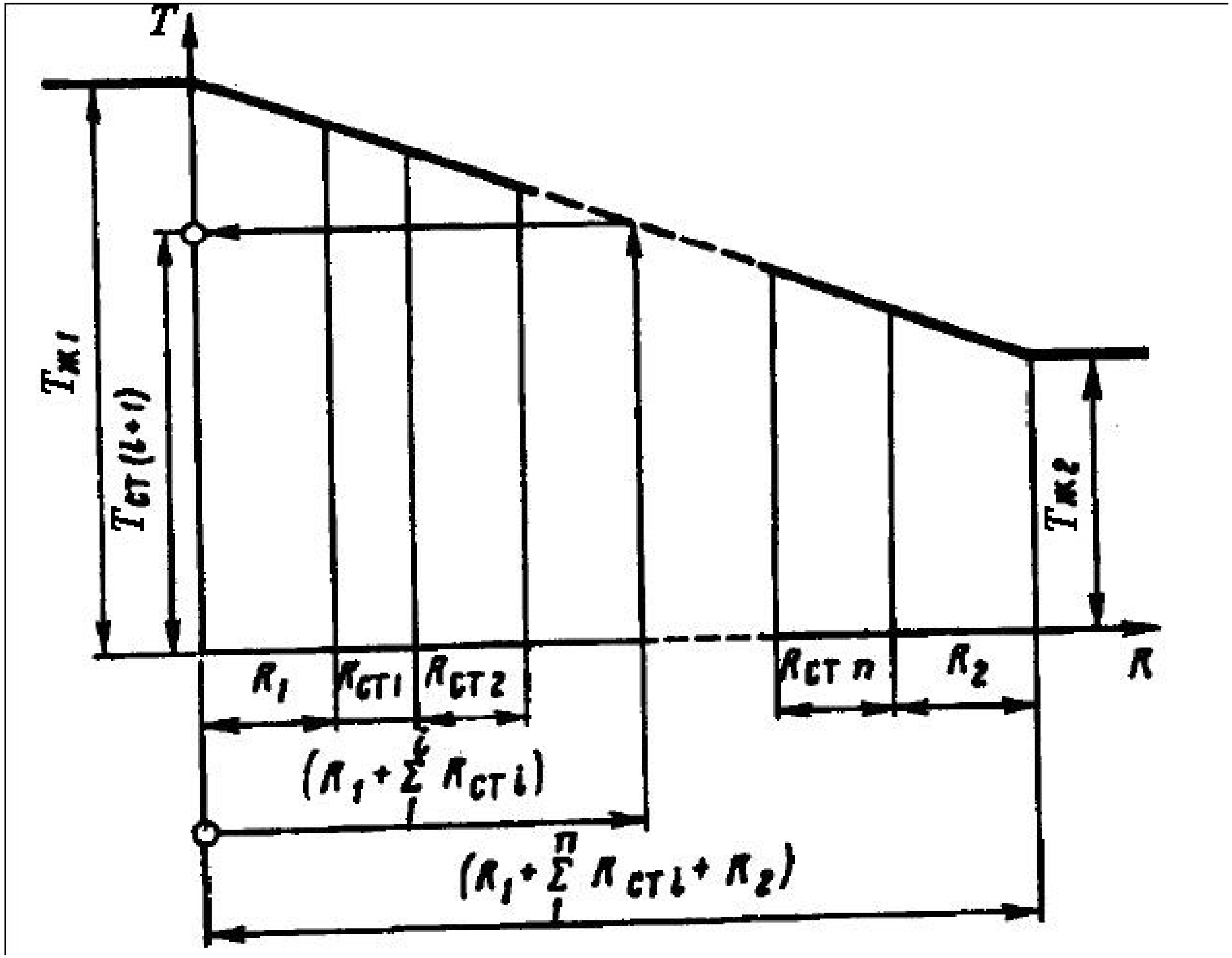


Рис. 6. Графическое определение температуры в составной стенке

Неограниченный цилиндр

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \tag{31}$$

Граничные условия 1 рода

$$T=T_{cm_1} \quad \text{при} \quad r=r_1$$
$$T=T_{cm_2} \quad \text{при} \quad r=r_2 \tag{32}$$

$$T=T_{cm_1}-\left(T_{cm_1}-T_{cm_2}\right)\frac{\ln\left(\dfrac{d}{d_1}\right)}{\ln\dfrac{d_2}{d_1}} \tag{33}$$

$$Q=-\lambda\frac{dT}{dr}F \tag{34}$$

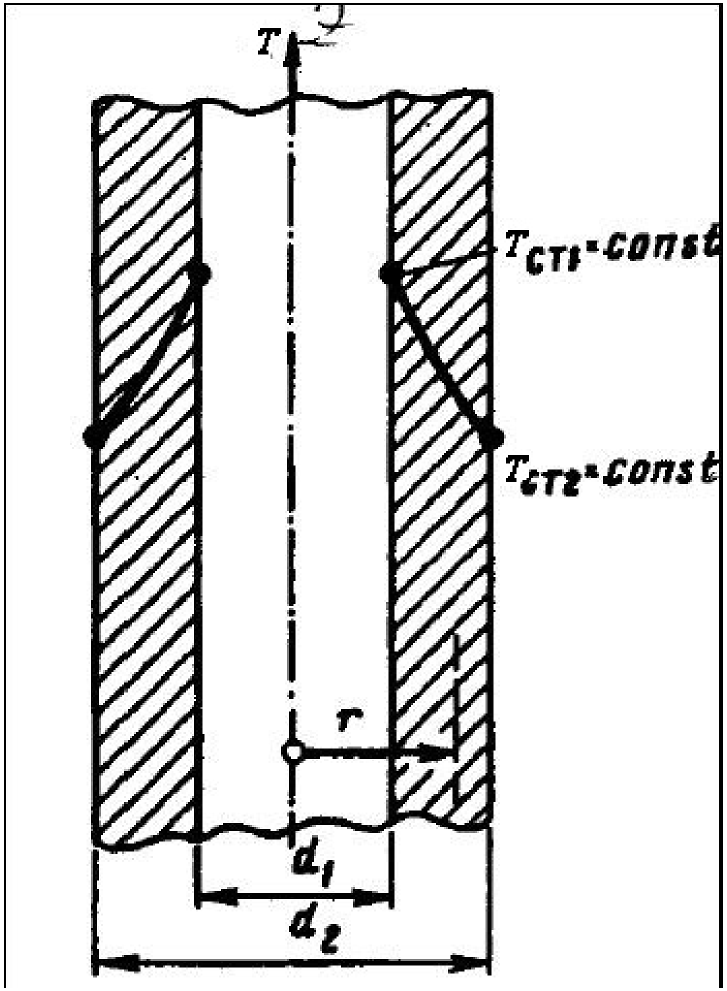


Рис. 7. Распределение температуры в неограниченной цилиндрической стенке

$$Q = \frac{2\pi\lambda l\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right)}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \tag{35}$$

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right)}{d_1 \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}$$

$$q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right)}{d_2 \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \tag{36}$$

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi\left(T_{cm_1} - T_{cm_2}\right)}{\frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)} \tag{37}$$

$$q_l = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2 \tag{38}$$

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{T_{cm_1} - T_{cm_2}} \int_{T_{cm_2}}^{T_{cm_1}} \lambda(T)\,dT \tag{39}$$

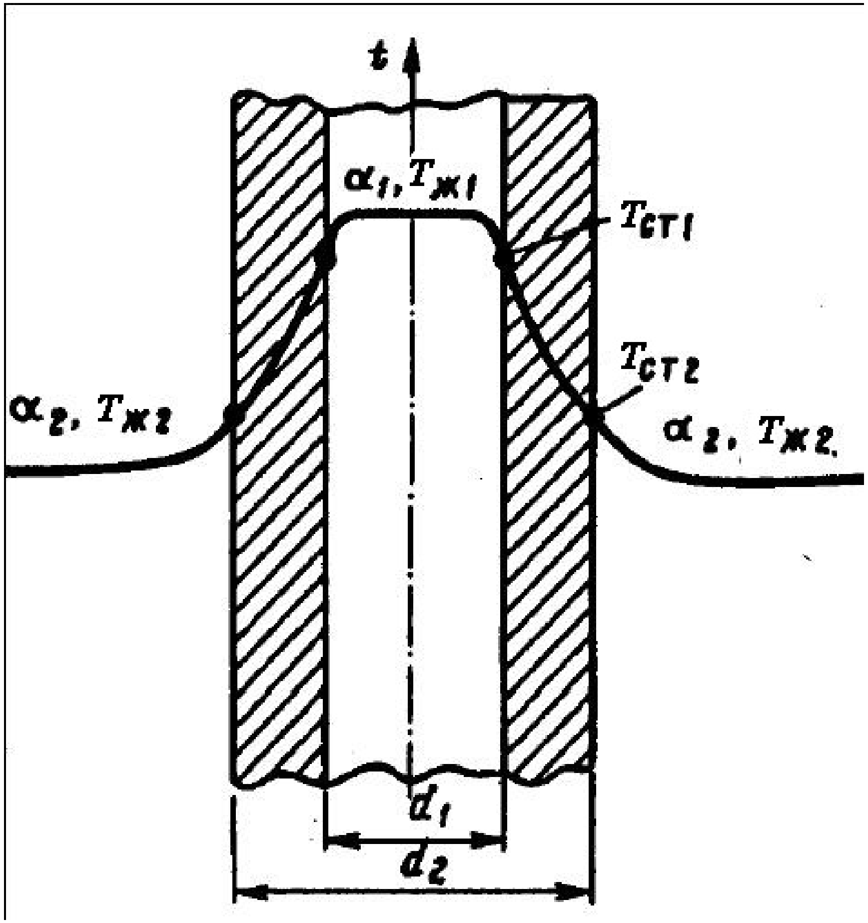


Рис. 8. Передача теплоты через цилиндрическую стенку

$$q_l = \frac{\pi\left(T_{ст_1} - T_{ст_2}\right)}{\dfrac{1}{2\lambda}\ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)} \qquad (40)$$

$$q_l = k_l \pi\left(T_{ж_1} - T_{ж_2}\right)$$

$$k_l = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda}\ln\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}} \qquad (41)$$

Величина k_l ***называется линейным коэффициентом теплопередачи*** и измеряется в ваттах на метр-кельвин

$$T_{ст_1} = T_{ж_1} - \frac{q_l}{\alpha_1 \pi d_1} \qquad (42)$$

$$T_{ст_2} = T_{ж_2} + \frac{q_l}{\alpha_2 \pi d_2} \qquad (43)$$

Величина R_l называется ***полным линейным термическим сопротивлением***

$$\ln\frac{d_2}{d_1}=\left(\frac{d_2}{d_1}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{d_2}{d_1}-1\right)^2+\ldots$$

$$\ln\frac{d_2}{d_1}=\frac{d_2}{d_1}-1=\frac{2\delta}{d_1}$$

$$k=\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{\alpha_2}} \qquad (44)$$

(45)

$$Q=k\pi d_x l\left(T_{ж_1}-T_{ж_2}\right)$$

$$d_x=d_2 \qquad \alpha_1 >> \alpha_2$$

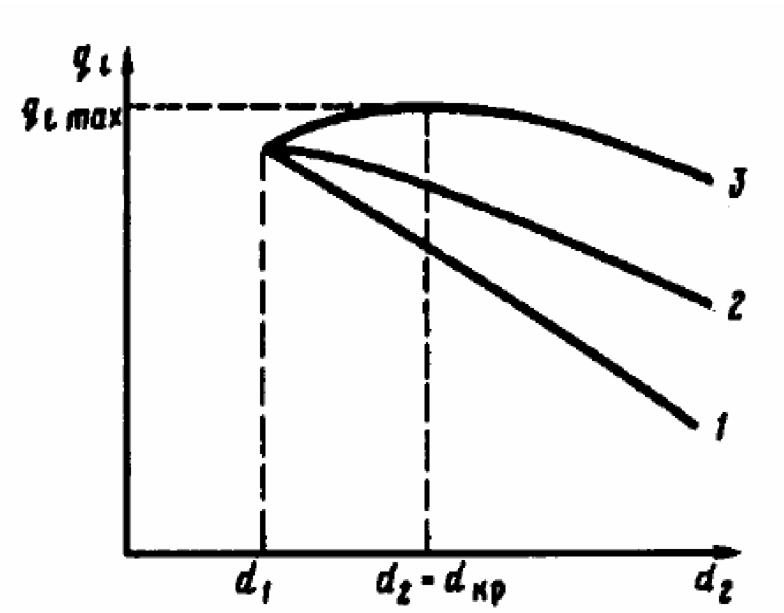
$$d_x=d_1 \qquad \alpha_2 >> \alpha_1$$

$$d_x=\frac{d_1+d_2}{2}, \qquad \alpha_1\approx\alpha_2$$

$$R_l=\frac{1}{\alpha_1 d_1}+\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}+\frac{1}{\alpha_2 d_2} \qquad (46)$$

$$\frac{d\left(R_l\right)}{d\left(d_2\right)}=\frac{1}{2\lambda d_2}-\frac{1}{\alpha_2 d_2^2}=0$$

Таким образом, при критическом значении диаметра $d_{2_{кр}} = 2\lambda / \alpha_2$ термическое сопротивление будет минимальным, а плотность теплового потока $q_l = k_l \pi (t_{ж_1} - t_{ж_2})$ максимальной.



$$q_l = \frac{\pi\left(T_{ж_1} - T_{ж_2}\right)}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{i+1}}} \qquad (47)$$

Рис. 9. К понятию критического диаметра цилиндрической стенки

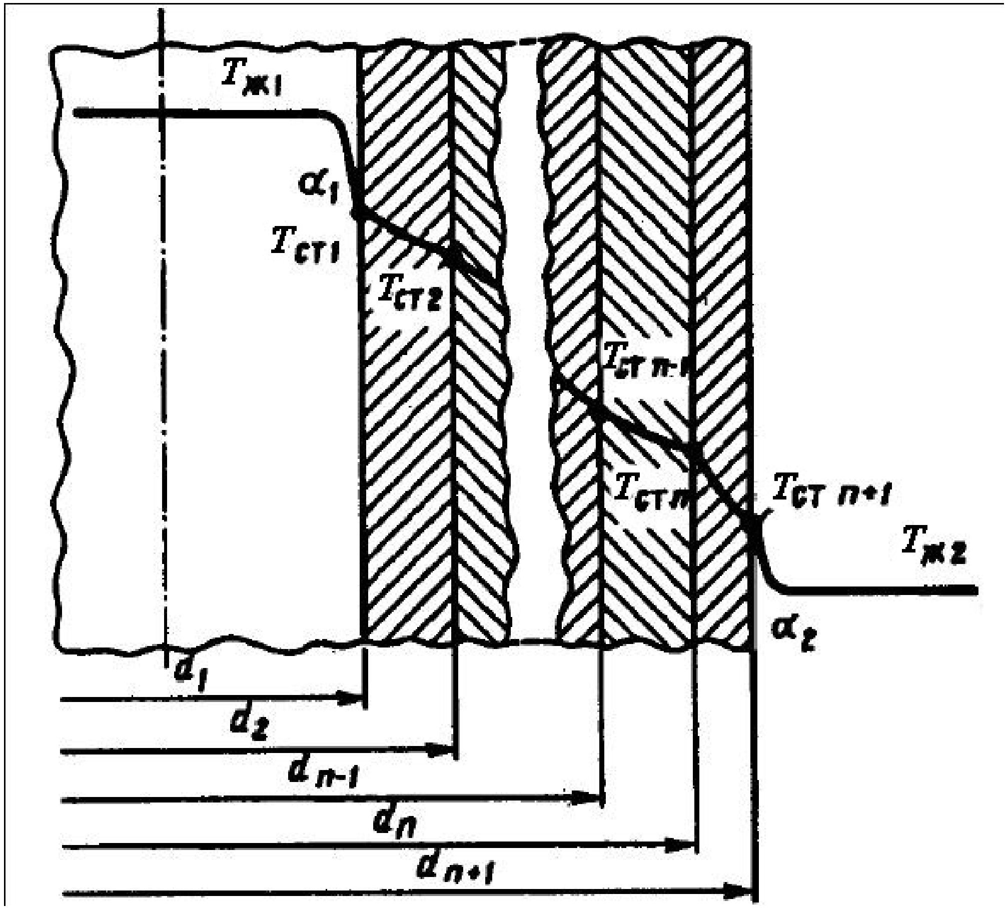


Рис. 10. Передача теплоты через многослойную цилиндрическую стенку

$$q_l = k_l \pi \left(T_{ж_1} - T_{ж_2} \right) \qquad (48)$$

$$k_l = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum\limits_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{2\lambda_i} \ln \dfrac{d_{i+1}}{d_i} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_{i+1}}}$$

$$\begin{cases} T_{ст_1} = T_{ж_1} - \dfrac{q_l}{\pi}\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} \\ T_{ст_2} = T_{ж_1} - \dfrac{q_l}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda_1}\ln\dfrac{d_2}{d_1}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_{ст_{(i+1)}} = T_{ж_1} - \dfrac{q_l}{\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum\limits_{i=1}^{i=n}\dfrac{1}{2\lambda_i}\ln\dfrac{d_{i+1}}{d_i}\right) \end{cases} \tag{49}$$

Граничные условия I рода можно рассматривать как граничные условия III рода, когда α_1 и α_2 стремятся к бесконечности, $t_{ст1} = t_{ж1}$ и $t_{ст(i+1)} = t_{ж2}$

$$q_l = \frac{\pi\left(T_{ж_1} - T_{ж_2}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\dfrac{1}{2\lambda_i}\ln\dfrac{d_{i+1}}{d_i}} \tag{50}$$

$$T_{ст_{(i+1)}} = T_{ж_1} - \frac{q_l}{\pi}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i} \tag{51}$$

Теплопроводность шаровой стенки

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dT}{dr}=0 \qquad (52)$$

Граничные условия

$$T=T_{cm_1} \quad \text{при} \quad r=r_1 \qquad (53)$$

$$T=T_{cm_2} \quad \text{при} \quad r=r_2$$

$$T=T_{cm_1}-\frac{T_{cm_1}-T_{cm_2}}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) \qquad (54)$$

$$Q=-\lambda\frac{dT}{dr}F=-\lambda 4\pi r^2\frac{dT}{dr} \qquad (55)$$

$$Q=\frac{4\pi\lambda\left(T_{cm_1}-T_{cm_2}\right)}{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}}=\pi\lambda\frac{d_1d_2}{\delta}\left(T_{cm_1}-T_{cm_2}\right) \qquad (56)$$

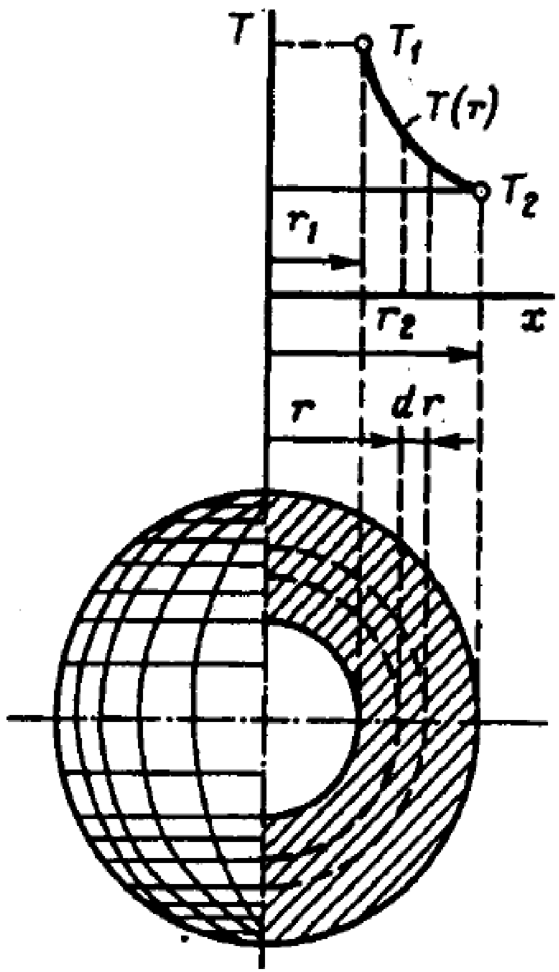


Рис. 11. Распределение температуры в шаровой стенке

$$\begin{cases} Q = \pi d_1^2 \alpha_1 \left(T_{ж_1} - T_{ст_1} \right) \\ Q = \dfrac{2\pi\lambda}{\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}} \left(T_{ст_1} - T_{ст_2} \right) \\ Q = \pi d_2^2 \alpha_2 \left(T_{ст_2} - T_{ж_1} \right) \end{cases} \qquad (57)$$

$$Q = k_ш \pi \left(T_{ж_1} - T_{ж_2} \right) \qquad (58)$$

$$k_ш = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \dfrac{1}{2\lambda_1}\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2} \right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2^2}}$$

$$R_ш = \frac{1}{k_ш} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$$

$$T_{ст_1} = T_{ж_1} - \frac{Q}{\alpha_1 \pi d_1^2}; T_{ст_2} = T_{ж_2} + \frac{Q}{\alpha_2 \pi d_2^2} \qquad (59)$$

$$k_ш = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{2\lambda_i}\left(\dfrac{1}{d_i} - \dfrac{1}{d_{i+1}} \right) + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2^2}} \qquad (60)$$

Контрольные вопросы

- Неограниченная плоская стенка
- Неограниченный цилиндр
- Термическое сопротивление стенки
- Распределение температуры в неограниченной плоской стенке при $\lambda=f(t)$
- Составная плоская стенка
- Передача теплоты через плоскую стенку
- Распределение температуры в неограниченной цилиндрической стенке
- Теплопроводность шаровой стенки
- Среднеинтегральная теплопроводность пластины
- Критическое значение диаметра