

**энергомашиностроение.**

**6**

## **Лекция № 8 НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

- Метод разделения переменных
- Метод источников
- Метод интегральных преобразований
- Численные методы решения задач теплопроводности
- Исследование процессов теплопроводности методом аналогии

## Метод разделения переменных

Метод разделения переменных, разработанный Фурье, в применении к задачам теплопроводности состоит в том, что находится совокупность частных решений уравнения (1), которые затем суммируются:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 T \quad (1)$$

Решение уравнения представляют в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, а другая только от координат, т.е.

$$T = C_1 T_1 + C_2 T_2 + \dots = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i T_i \quad (2)$$

$$T = C T(\tau) \Psi(x, y, z) \quad (3)$$

$$T'(\tau) \Psi(x, y, z) = a T(\tau) \nabla^2 \Psi(x, y, z) \quad (4)$$

$$T'(\tau) / T(\tau) = a \nabla^2 \Psi(x, y, z) / \Psi(x, y, z) \quad (5)$$

где  $C$  - произвольная постоянная.

Так как левая часть уравнения (5) не зависит от координат, а правая - от времени (причем равенство справедливо при любых значениях времени и координат), то правая и левая части представляют собой постоянную величину  $\lambda$ :

$$(1/a) T'(\tau) / T(\tau) = \lambda \quad (6)$$

$$\nabla^2 \Psi(x, y, z) / \Psi(x, y, z) = \lambda \quad (7)$$

Решением уравнения (6) является  $T(\tau) = C e^{a\lambda\tau} \quad (8)$

Вид функции  $T(\tau)$  указывает, что для процессов, стремящихся к тепловому равновесию, величина  $\lambda$  должна быть меньше нуля ( $\lambda < 0$ ), в противном случае не удовлетворялось бы условие ограниченности функции

$$T = T(\tau)\Psi(x, y, z) < M$$
$$\lambda = -k^2 \tag{9}$$

где  $k$  - любое вещественное число.

В связи с этим уравнение (7) примет вид

$$\nabla^2\Psi(x, y, z) + k^2\Psi(x, y, z) = 0 \tag{10}$$

Решение уравнения (10), называемого *уравнением Поколя*, определяется геометрической формой тела, а постоянные интегрирования - граничными условиями (температурой, тепловым потоком или условиями теплообмена на поверхности тела). В простейших случаях, когда  $\Psi$  - функция лишь одной координаты (например,  $x$ ), уравнение (10) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, решение которого можно представить как сумму двух частных решений:

$$\Psi(x) = C_1A(kx) + C_2B(kx) \tag{11}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  - постоянные

$A(kx)$  и  $B(kx)$  - линейно независимые интегралы уравнения (10), получим:

$$T = e^{-ak^2\tau} [DA(kx) + EB(kx)] \tag{12}$$

где  $D$  и  $E$  - постоянные.

Это выражение, удовлетворяя уравнению (1), тем не менее не пригодно для расчета температурного поля, так как из него нельзя определить постоянные  $D$  и  $E$ .

Поэтому для получения общего решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего начальным условиям, берется сумма частных решений, в каждом из которых постоянные  $D$  и  $E$  имеют свое определенное значение. Осуществляя соответствующий подбор значений  $D$  и  $E$ , можно как угодно близко подойти к заданному начальному распределению температуры.

Таким образом, частные решения записываются так:

$$\begin{aligned}T_1 &= D_1 A(k_1 x) e^{-ak_1^2 \tau} + E_1 B(k_1 x) e^{-ak_1^2 \tau} \\T_2 &= D_2 A(k_2 x) e^{-ak_2^2 \tau} + E_2 B(k_2 x) e^{-ak_2^2 \tau}\end{aligned}\tag{13}$$

Общее решение имеет вид

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} D_n A(k_n x) e^{-ak_n^2 \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n B(k_n x) e^{-ak_n^2 \tau}\tag{14}$$

Необходимым условием решения задачи является возможность разложения функции  $T_0(x)$ , описывающей начальное распределение температуры в ряд по собственным функциям:

$$T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n A(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n B(k_n x)$$

## Метод источников

*Физическая сущность* метода источников заключается в том, что процесс распространения теплоты в теле теплопроводностью представляется как совокупность процессов выравнивания температуры от множества элементарных источников теплоты, распределенных как в пространстве, так и во времени.

Рассмотрим задачу по определению нестационарного одно-мерного температурного поля для неограниченной области при заданных начальных условиях. В качестве физической модели такой задачи может служить стержень бесконечной длины с постоянной по длине площадью поперечного сечения  $F=1\text{ м}^2$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. В стержне задано начальное распределение температур. Метод разделения переменных позволяет получить из уравнения (1) два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения:

$$T' + ak^2T = 0 \quad \Psi'' + k^2\Psi = 0$$

Частные решения этих уравнений имеют вид

$$T = C_1 e^{-ak^2\tau} \quad \Psi = C_2 e^{\pm ikx} \quad (15)$$

частное решение уравнения (1) таково:

$$T(k) = T(\tau)\Psi(x) = C(k)e^{-ak^2\tau \pm ikx} \quad (16)$$

Функция  $T(k)$  удовлетворяет условию ограниченности. Образует функцию

$$T(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{-ak^2\tau \pm ikx} dk \quad (17)$$

которая удовлетворяет уравнению (1) как сумма частных решений этого уравнения, если производные можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла. Используя начальные условия, имеем

$$T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k)e^{ikx} dk \quad (18)$$

Коэффициенты  $C(k)$  найдем по формуле обратного преобразования интеграла Фурье, т.е.

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi)e^{-ik\xi} d\xi \quad (19)$$

Подставляя выражение (19) в (18) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (T(\xi)e^{-ik\xi} d\xi) e^{-ak^2\tau+ikx} dx = \right. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2\tau+ik(x-\xi)} dk \right) T(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2\tau+ik(x-\xi)} dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} \quad (21)$$

Это выражение называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности*. Решение называется также функцией источника на бесконечной прямой и обозначается

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a \tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} \quad (22)$$

$$G(x, \xi, \tau - \tau_0) = \frac{Q}{2c\rho\sqrt{\pi a(\tau - \tau_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau - \tau_0)}} \quad (23)$$

функция (23) удовлетворяет уравнению теплопроводности (1), так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{x - \xi}{2[a(\tau - \tau_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau - \tau_0)}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2[a(\tau - \tau_0)]^{3/2}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a(\tau - \tau_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau - \tau_0)}} \\ \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \frac{a}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2[a(\tau - \tau_0)]^{3/2}} + \frac{(x - \xi)^2}{4[a(\tau - \tau_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau - \tau_0)}} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

Количество теплоты, находящееся в стержне в момент  $\tau > \tau_0$

$$\begin{aligned}
 c\rho \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, \tau - \tau_0) dx &= (Q / \sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-\tau_0)}}}{2a(\tau-\tau_0)} dx = \\
 &= (Q / \sqrt{\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = Q = \rho c
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

$$\alpha = \frac{x - \xi}{2\sqrt{a(\tau - \tau_0)}} \quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a(\tau - \tau_0)}} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$$

Как следует из уравнения (24), количество теплоты в стержне не меняется с течением времени. Функция (23) зависит от времени только через  $\nu = a(\tau > \tau_0)$ , и ее можно записать так:

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\nu}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu}}
 \tag{25}$$

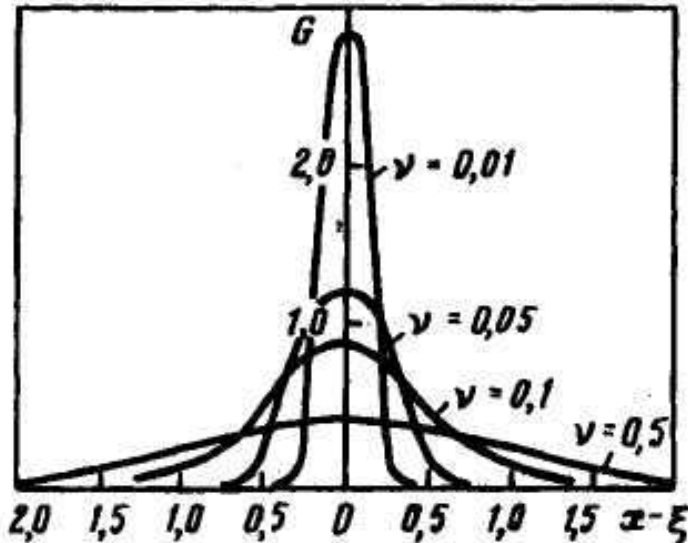


Рис. 1. Вид функции  $G$

Вид функции  $G$  представлен на рис. 1, из которого следует, что почти вся площадь под кривой находится над промежутком  $(\zeta - \varepsilon) - (\zeta + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  может быть сколь угодно малым числом, если  $\nu = a(\tau > \tau_0)$  достаточно мало. Площадь под кривой, умноженная на  $c\rho$ , равна количеству теплоты, подведенному в начальный момент. Для малых значений  $\nu$  почти вся теплота сосредотачивается в малой окрестности точки  $\zeta$ . Следовательно, в момент  $\tau = \tau_0$  все количество теплоты сосредоточено в точке  $\zeta$ , а температура в точке при малых  $\nu$  неограниченно велика.

Возвращаясь к выражению (20), запишем его в виде

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4a\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}} d\xi \quad (26)$$

Эта формула и является общим решением задачи определения температурного поля в неограниченном одномерном теле. Для начального момента времени уравнение (26) представляет собой замену начального распределения температуры суммой частных решений (рис. 2).

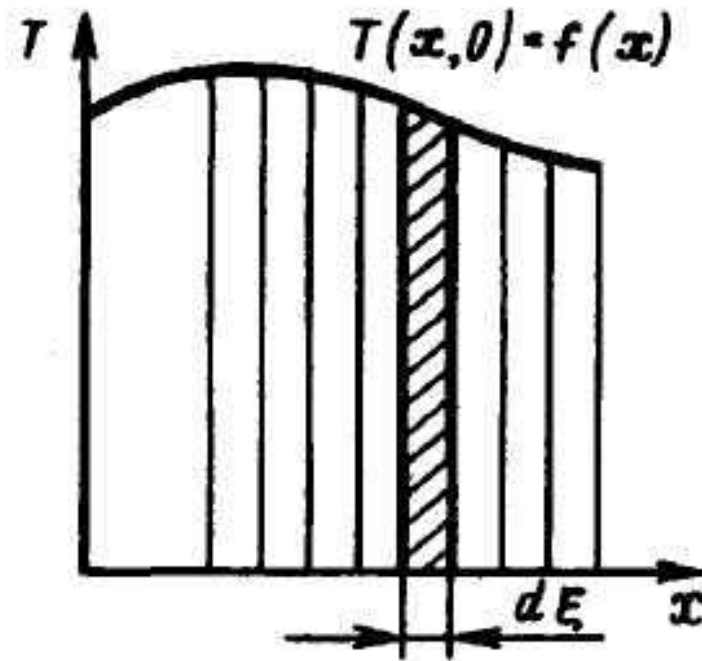


Рис. 2. Начальное распределение температуры

## Метод интегральных преобразований

*Методы интегральных преобразований.* Для решения многих задач теплопроводности классические методы оказываются недостаточными, в связи с чем в настоящее время нашли широкое применение различные методы интегральных преобразований дифференциальных уравнений и граничных условий. Сущность методов интегральных преобразований состоит в том, что изучаются не сами функции, определяемые постановкой задачи, а их видоизменение - так называемое изображение; сама же функция называется оригиналом. Если преобразование берется по пространственной координате  $x$ , то интегральное преобразование функции оригинала  $f(x)$  может быть представлено в виде

$$f(p) = \int_0^{+\infty} k(p, x) f(x) dx \quad (27)$$

где  $f(p)$  - изображение функции  $f(x)$ ;  $k(p, x)$  - ядро преобразования;  $p$  - некоторый параметр.

Пределы интегрирования могут быть как бесконечными, так и конечными. В последнем случае интегральное преобразование называется конечным и имеет вид

$$f(p) = \int_a^b k(p, x) f(x) dx$$

При задании на поверхности тела граничных условий I рода (задано значение функции) следует использовать синус-преобразование Фурье, а при граничных условиях II рода - косинус-преобразование Фурье. При этом ядра преобразований соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} k(p, x) &= \sqrt{2/\pi} \sin(px) \\ k(p, x) &= \sqrt{2/\pi} \cos(px) \end{aligned} \quad (28)$$

Для тел с осевой симметрией (например, для цилиндра) ядром преобразования должна быть функция Бесселя:

$$k(p, x) = \tau J(p\tau) \quad (29)$$

При решении задач нестационарной теплопроводности наибольшее распространение получили метод интегрального преобразования Лапласа и операционный метод Хевисайда. В первом из них интегральное преобразование зависящей от времени функции  $f(\tau)$  определяется формулой

$$f(p) = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (30)$$

Применение метода интегральных преобразований к дифференциальным уравнениям в частных производных позволяет получить для одномерного случая обыкновенное дифференциальное уравнение относительно изображения. Применение же интегрального преобразования к обыкновенным дифференциальным уравнениям переводит их в алгебраические относительно изображений. Отыскивая затем значение функции, являющейся изображением, необходимо (для решения задачи) перейти к оригиналу. Этот переход осуществляется по так называемым формулам обращения:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-ipx} dp \quad (31)$$

- для комплексного преобразования Фурье.

Для синус - преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} f(p) \sin(px) dp \quad (32)$$

Для косинус - преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} f(p) \cos(px) dp \quad (33)$$

Для преобразования Ханкеля:

$$f(\tau) = \int_0^{+\infty} \tau f(p) J(\tau p) dp \quad (34)$$

Для преобразования Лапласа:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p) e^{p\tau} dp \quad (35)$$

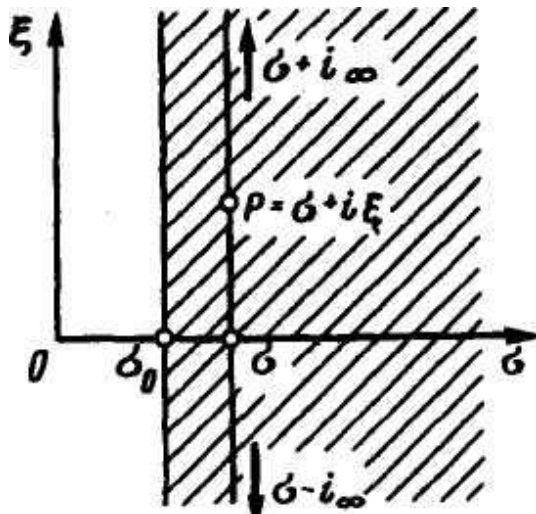


Рис. 3. Область существования изображения  $f(p)$  функции  $f(\tau)$

Преобразование Лапласа осуществляется в соответствии с формулой (30), где параметр  $p = \sigma + i\zeta$  - некоторая комплексная величина, которая при постоянной  $\sigma$ , а  $\zeta$ , изменяющейся от  $-\infty$  до  $+\infty$ , меняется от  $\sigma - i\infty$  до  $\sigma + i\infty$  рис (III.3).

Преобразованию Лапласа могут быть подвергнуты функции со следующими свойствами:

1. При отрицательных значениях аргумента функция равна нулю;
2. При положительных значениях аргумента порядок роста абсолютных значений функции при возрастании аргумента не превосходит порядка роста некоторой показательной функции:

$$|f(\tau)| < M \cdot e^{\sigma_0 \tau}$$

$$\tau < 0$$

3. Функция  $f(\tau)$  должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. интервал, на котором определена функция  $f(\tau)$ , может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых  $f(\tau)$  непрерывна и монотонна, и во всякой точке разрыва значения функций  $f(\tau+0)$  и  $f(\tau-0)$  существуют.

Для частных случаев функции  $f(\tau)$  функция  $f(p)$  имеет следующий вид:

$$f(\tau) = C = \text{const} \quad (\tau > 0)$$

$$f(p) = \int_0^{\infty} C e^{-p\tau} d\tau = (C - p) e^{-p\tau} \Big|_0^{\infty} = C / p \quad p > 0 \quad (36)$$

$$f(\tau) = C\tau$$

$$f(p) = \int_0^{\infty} C\tau e^{-p\tau} d\tau = C / p^2 \quad (37)$$

$$f(\tau) = e^{k\tau} \quad (\tau > 0)$$

$$f(p) \approx \int_0^{\infty} e^{-(p-k)\tau} d\tau = \frac{1}{p-k} \quad p > k \quad (38)$$

$$f(\tau) = e^{-k\tau}$$

$$f(p) \approx \frac{1}{p+k} \quad (39)$$

## Основные свойства преобразования Лапласа:

**1. Линейность.** Если  $C = \text{const}$  и оригиналу  $f(\tau)$  соответствует изображение  $f(p)$ , то функции  $C f(\tau)$  соответствует изображение  $C f(p)$ . Далее, если функции  $f_1(\tau)$  и  $f_2(\tau)$  имеют соответственно изображения  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$ , то справедливо равенство

$$f_1(\tau) + f_2(\tau) = f_1(p) + f_2(p) \quad (40)$$

т.е. изображение суммы оригиналов равно сумме изображений этих оригиналов.

**2. Изображение производной.** Используя правило интегрирования по частям, получаем

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-p\tau} f(\tau) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (41)$$

Если  $f(\tau)$  принадлежит к функциям со свойствами 1 — 3, то  $f(\tau) e^{-p\tau} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$

и  $e^{-p\tau} f(\tau) \rightarrow f(0)$  при  $\tau \rightarrow 0$

В этом случае выражение (41) приводится к виду

$$\varphi(p) = f'(p) = pf(p) - f(0) \quad (42)$$

т.е. дифференцирование оригинала функции соответствует умножению изображения на  $p$  с последующим вычитанием постоянной  $f(0)$ .

## Численные методы решения задач теплопроводности

Для решения дифференциальных уравнений теплопроводности наибольшее распространение получил *метод конечных разностей* или сеток.

При численном решении задачи разностным методом нельзя получить решение во всех точках некоторой области пространства. Приближенное решение может быть получено лишь в некотором конечном множестве точек, называемых *сеткой*.

### **Явные конечно-разностные уравнения.**

При разностном решении одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (217)$$

входящие в него производные приближенно представляются (аппроксимируются) производными в конечных разностях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &\approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau} & \frac{\partial T}{\partial x} &\approx \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x} & \frac{\partial T}{\partial x} &\approx \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x} - \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} \right) = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

При этом разностный аналог дифференциального уравнения теплопроводности примет вид

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta \tau} = a \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (218)$$

При решении этого уравнения температуры определяются лишь в отдельных точках  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , лежащих на оси  $x$ . При этом предполагают, что в каждый момент времени  $\tau$  распределение температур в промежутке между соседними точками является линейным. При решении многомерных задач эти точки обычно называют *узлами пространственной сетки*. Интервалы между ними в простейшем случае одинаковы и равны  $\Delta x$ .

Разностный аналог уравнения (217) может быть получен и более строгим методом, с заранее выбранной погрешностью аппроксимации, если значения температур в узлах четырехточечной разностной сетки предварительно представить в виде следующего конечно-разностного уравнения с неопределенными коэффициентами:

$$AT_{i+1}^k + BT_i^k + CT_{i-1}^k + DT_i^{k+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
 T_{i+1}^k &= T_i^k + \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^k + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^k + \\
 &+ \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_i^k + \frac{1}{24} (\Delta x)^4 \left( \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right)_i^k \\
 T_{i-1}^k &= T_i^k - \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_i^k + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_i^k - \\
 &- \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_i^k + \frac{1}{24} (\Delta x)^4 \left( \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right)_i^k \\
 T_i^{k+1} &= T_i^k + \Delta \tau \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_i^k + \frac{1}{2} (\Delta \tau)^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right)_i^k
 \end{aligned}$$

С учетом этих данных разность между конечно-разностным уравнением, содержащим коэффициенты  $A, B, C, D$ , и исходным дифференциальным уравнением (217) составит

$$e(\bar{T}) = (A + B + C + D)\bar{T}_i^k + (A - C)\Delta x \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right)_i^k + \frac{1}{2}(A + C)(\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right)_i^k + \\ + \frac{1}{6}(A - C)(\Delta x)^3 \left( \frac{\partial^3 \bar{T}}{\partial x^3} \right)_i^k + \frac{1}{24}(A - C)(\Delta x)^4 \left( \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4} \right)_i^k + D\Delta\tau \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} \right)_i^k + \\ + \frac{1}{2}D(\Delta\tau)^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \tau^2} \right)_i^k - \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right)$$

При этом 
$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0$$

Положим 
$$A + B + C + D = 0 \quad A - C = 0$$
  

$$A + C = -2a/(\Delta x)^2 \quad D\Delta\tau = 1$$

Следовательно 
$$A = C = -a/(\Delta x)^2 \quad B = -\frac{1}{\Delta\tau} \left[ 1 - \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \right] \quad D = \frac{1}{\Delta\tau}$$

Подставив  $A, B, C$  и  $D$  в выражение для  $e(T)$ , вычислим погрешность, возникающую в результате замены дифференциального уравнения (217) его конечно-разностным аналогом:

$$e(\bar{T}) = \frac{1}{2}\Delta\tau \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \tau^2} - \frac{a}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4}$$

Указанный метод удобно применять при использовании треугольных, пятиугольных и более сложных разностных сеток.

Уравнение (218) построено по явной классической конечно-разностной схеме и легко разрешается в явном виде относительно неизвестной функции.

Для вычисления неизвестных температур  $T_i^{k+1}$  система, состоящая из  $n$  алгебраических уравнений типа (218), последовательно решается для каждого шага по времени. При этом уравнения необходимо решать столько раз, сколько шагов (слоев) содержится в расчетном промежутке времени.

Устойчивость системы явных конечно-разностных уравнений  $\theta = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2}$  характеризует рис. 4

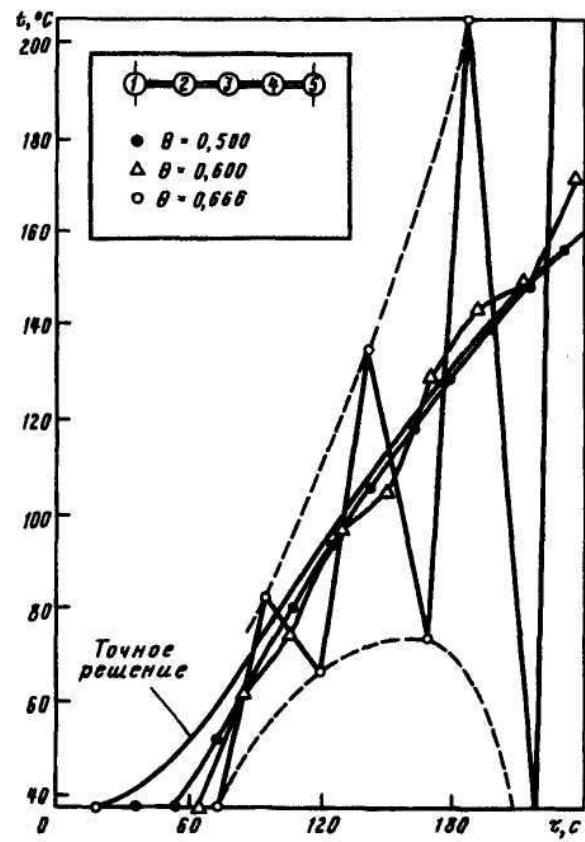


Рис. 4. Результаты точного и численного решения задачи нестационарной теплопроводности для стенки, разбитой на четыре интервала

Сравнение показывает, что вычисления при  $\frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$

приводят к вполне удовлетворительным результатам, в то

время как при  $\frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} > \frac{1}{2}$  возникает явление,

называемое неустойчивостью.

Оно не связано с ошибками округления и является свойством самой системы конечно-разностных уравнений.

Из приведенного примера следует, что при проведении расчетов надо прежде всего позаботиться о том, чтобы значение  $\Delta\tau$  удовлетворяло условиям устойчивости системы конечно-разностных уравнений.

Разрешая уравнение (218) в явном виде относительно неизвестной функции  $T_i^{k+1}$ , получаем

$$T_i^{k+1} = AT_{i+1}^k + BT_i^k + CT_{i-1}^k \quad (219)$$

$$A = C = a\Delta\tau / (\Delta x)^2$$

$$B = 1 - 2a\Delta\tau / (\Delta x)^2$$

$$A + B + C = 1$$

В теории конечно-разностных уравнений показано, что при соблюдении условий устойчивости решение системы (218) приближается к точному решению соответствующего дифференциального уравнения по мере уменьшения  $\Delta x$  и  $\Delta \tau$ .

Выше было показано, что погрешность аппроксимации конечно-разностной схемы (218) с точностью до членов, содержащих  $(\Delta \tau)^2$  и  $(\Delta x)^4$ , равна

$$e(\bar{T}) = \frac{1}{2} \Delta \tau \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \tau^2} \right) - \frac{a}{12} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4} \right) + O[(\Delta \tau)^2] + O[(\Delta x)^4]$$

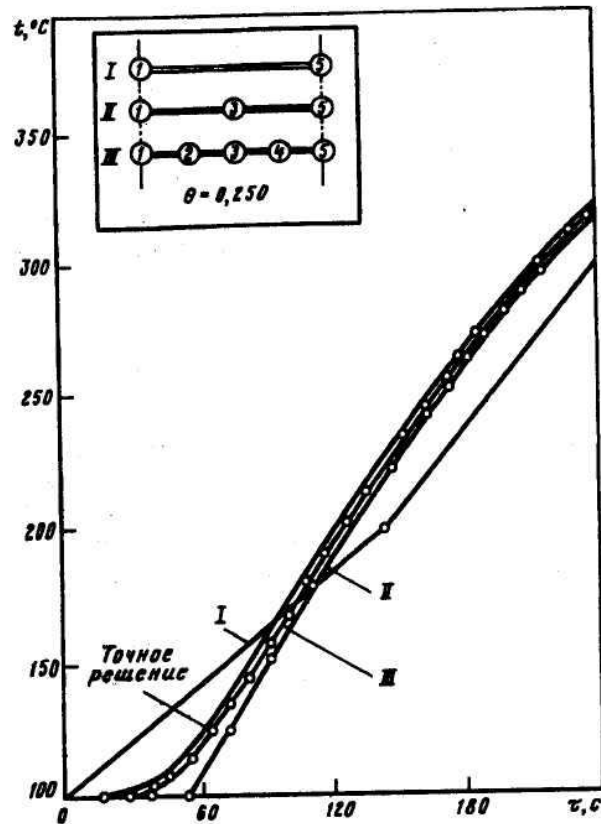


Рис. 5. Сходимость численных решений в зависимости от величины шага  $\Delta x$  по координате

Поскольку точное решение дифференциального уравнения теплопроводности  $T(x, \tau)$  удовлетворяет также и уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \tau^2} = a^2 \left( \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4} \right)$$

то главный член погрешности аппроксимации может быть представлен в форме

$$a \left[ \frac{a \Delta \tau}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \right] \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4}$$

О влиянии  $\Delta x$  на результаты решения можно судить по данным, представленным на рис. 5. Кривые I, II, и III соответствуют решениям, полученным с двумя, тремя и пятью узлами.

## ***Неявные конечно-разностные уравнения.***

В интересах повышения точности решения  $\Delta x$  следует выбирать достаточно малым. Однако в явных схемах наибольшее допустимое значение  $\Delta t$  пропорционально  $(\Delta x)^2$ . Это следует из условий устойчивости. При этих обстоятельствах может оказаться, что для завершения процесса решения потребуется огромное количество шагов по времени и решение окажется практически невыполнимым. В этих случаях для решения уравнения теплопроводности используются неявные конечно-разностные уравнения вида

$$\frac{(T_i^{k+1} - T_i^k)}{\Delta \tau} = a \frac{(T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2} \quad (221)$$

Явную и неявную конечно-разностные схемы можно объединить:

$$\frac{(T_i^{k+1} - T_i^k)}{\Delta \tau} = a \left[ \frac{(T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2} \sigma + \frac{(T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k)}{(\Delta x)^2} (1 - \sigma) \right] \quad (222)$$

тогда при  $\sigma = 0$  получится схема явных, а при  $\sigma = 1$  - неявных конечно-разностных уравнений.

Погрешность аппроксимации разностной схемы (222) определяется формулой

$$e(\bar{T}) = \frac{(\bar{T}_i^{k+1} - \bar{T}_i^k)}{\Delta \tau} = a \left[ \frac{(\bar{T}_{i+1}^{k+1} - 2\bar{T}_i^{k+1} + \bar{T}_{i-1}^{k+1})}{(\Delta x)^2} \sigma + \frac{(\bar{T}_{i+1}^k - 2\bar{T}_i^k + \bar{T}_{i-1}^k)}{(\Delta x)^2} (1 - \sigma) \right]$$

является достаточно гладкой, то погрешность аппроксимации схемы (222) можно представить в следующей форме:

$$e(\bar{T}) = a \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \left[ a \Delta \tau (1/2 - \sigma) - 1/12 (\Delta x)^2 \right] + O \left[ (\Delta \tau)^2 \right] + O \left[ (\Delta x)^4 \right]$$

Наибольшая степень точности имеет место не при центрировании разностей по времени  $\sigma = 1/2$ , а при  $\sigma = 1/2 - (\Delta x)^2 / 12 a \Delta \tau$  (при этом значении  $a$  условия устойчивости выполнены).

Этот метод получения повышенной точности может быть обобщен для решения задач с переменными физическими свойствами материала конструкции.

Применение неявных схем во многих практически важных случаях оказалось весьма эффективным. Система (222) абсолютно устойчива, но процедура решения неявных конечно-разностных уравнений осложняется тем, что каждое из них (за исключением уравнений для границ) содержит три неизвестные температуры. Все  $n$  уравнений должны решаться совместно. При большом числе уравнений решение такой системы классическими методами оказалось бы слишком громоздким и трудоемким.

## Исследование процессов теплопроводности методом аналогии

При различных условиях процесс теплопроводности в твердых телах может описываться уравнением теплопроводности Фурье, уравнением Лапласа или уравнением Пуассона. Различные по своему физическому содержанию явления, математическое описание которых совпадает, принято называть аналогичными. Такая аналогия существует, например, между явлениями теплопроводности и электропроводности, теплопроводности и диффузии.

### *Методы электротепловой аналогии.*

Различают два основных направления в реализации электрических моделей: составление эквивалентных схем (схем замещения или аналогий) и создание аналоговых вычислительных машин (АВМ).

Сравнивая уравнения, относящиеся к математическому описанию процессов теплопроводности и электропроводности (в двухмерном приближении), легко установить аналогию между этими явлениями:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dF; \quad dI = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n_{\ominus}} dF_{\ominus}; \quad (233)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial \tau_{\ominus}} = \frac{1}{R_{\ominus} C_{\ominus}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\ominus}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_{\ominus}^2} \right); \quad (234)$$

$$\frac{\Delta T}{\lambda / \alpha} = -grad T; \quad \frac{\Delta u}{l_{\ominus}} = -grad u; \quad (235)$$

$$dQ = c \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau; \quad dT = c_{\ominus} \frac{\partial u}{\partial \tau_{\ominus}} d\tau_{\ominus}; \quad (236)$$

Уравнения (235) выражают граничные условия к дифференциальным уравнениям (234). Уравнения (236) выражают изменение потоков  $Q$  и  $I$  во времени.

Аналогия устанавливается при

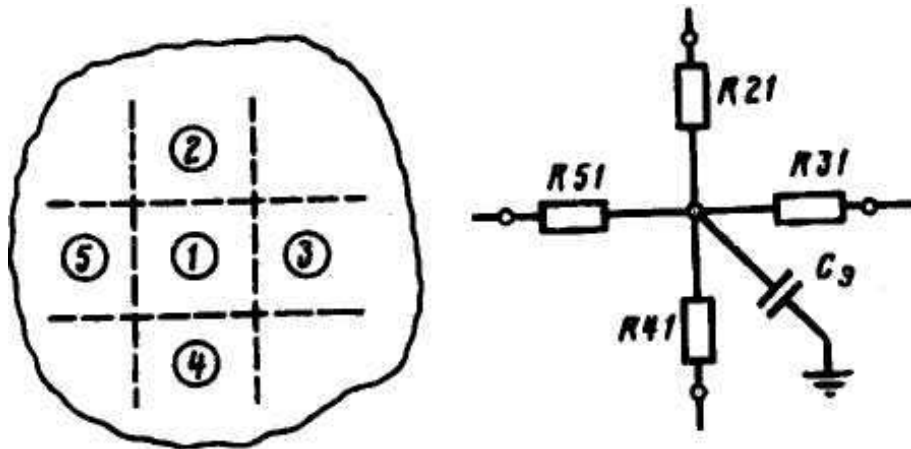
$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{1}{R_3 C_3} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{\alpha} = l_3$$

что может быть обеспечено соответствующим выбором электрических величин и масштабов. При этом аналогом температуры  $T$  является электрический потенциал  $u$ , аналогом теплового потока  $Q$  - сила тока  $I$ , аналогом теплоемкости  $c$  - электрическая емкость  $c_3$ , и аналогом термического сопротивления - электрическое сопротивление.

Моделироваться могут как стационарные, так и нестационарные процессы теплопроводности.

При практическом использовании этой аналогии тело, теплопроводность которого предстоит исследовать, разбивается на ряд элементарных объемов.

В эквивалентной электрической схеме емкость конденсатора в некотором масштабе воспроизводит теплоемкость элементарного объема, связанного с данной узловой точкой тела, в то время как электрические сопротивления, также с соблюдением определенного масштаба, воспроизводят фактические термические сопротивления между соседними узлами. Участок такой электрической цепи, относящийся к одной узловой



точке и составленный для случая решения двумерной задачи нестационарной теплопроводности, представлен на рис.6. Соответствующий участок цепи для решения трехмерной задачи в каждой узловой точке содержал бы шесть сопротивлений и один конденсатор. При этом следует иметь в виду, что аналоги в форме электрических цепей должны также воспроизводить граничные условия.

Рис. 6. Двумерные моделирующие цепи

Решение задач теплопроводности на АВМ может быть практически сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая имеет следующий общий вид:

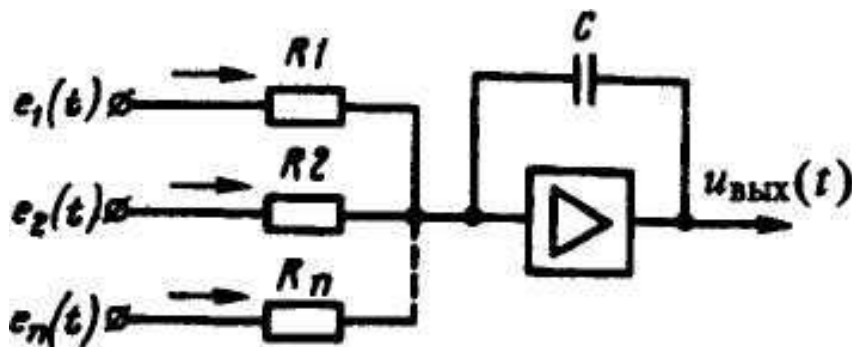
$$\frac{dT_j}{d\tau} = \sum_{i=1}^m A_{i,j} T_i \quad (237)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, k$$

При использовании АВМ каждое из обыкновенных дифференциальных уравнений системы решается с помощью своего интегросуммирующего операционного усилителя постоянного тока (интегрирующего блока). Условная электрическая схема интегрирующего блока показана на рис. 7. Каждый из таких блоков выполняет математическую операцию, которая моделируется уравнением

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t \left( \sum_{i=1}^m \frac{e_i(t)}{R_i} \right) dt + u_{\text{ВЫХ}} \quad (238)$$

что соответствует решению линейного дифференциального уравнения вида



$$\frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{CR_i} e_i(t) \quad (239)$$

Рис. 7. Схема интегросуммирующего операционного усилителя постоянного тока

Последовательно сравнивая уравнения (239) с каждым из уравнений системы (237), можно вычислить так называемые передаточные коэффициенты, устанавливающие связь между коэффициентами этих уравнений. При этом должны быть учтены масштабы, позволяющие перейти от переменных системы (237)  $T_j, T_i$  и  $\tau$  к соответствующим машинным переменным  $u_{\text{вых}}, e_i(t)$  и  $t$ .

Предварительно вычисленные значения передаточных коэффициентов устанавливаются на АВМ путем подбора сопротивлений  $R_i$ . Для определения постоянной  $u_{\text{вых}0}$  используются начальные условия к задаче. Необходимое начальное значение напряжения на выходе из блока  $u_{\text{вых}0}$  создается путем предварительной зарядки конденсатора с емкостью  $C$ .

Результаты решения в виде напряжений  $u_{\text{вых}0}$  на выходе из каждого интегрирующего блока записываются осциллографом или другим регистрирующим прибором.

### ***Гидротепловая аналогия.***

Для исследования как стационарных, так и нестационарных процессов теплопроводности может быть также использована гидротепловая аналогия. В простейшем случае необходимую информацию об этой аналогии можно получить, сравнивая известные уравнения теплопроводности и ламинарного движения жидкости:

$$q = \frac{T}{R} \qquad G = \frac{h}{R_{\bar{A}}}$$

$$dQ = c_{\bar{A}} \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \qquad dV = F_{\bar{A}} \frac{\partial h}{\partial \tau_{\bar{A}}} d\tau_{\bar{A}}$$

Из этих уравнений следует, что аналогом разности температур  $\Delta T$  является гидравлический напор  $\Delta h$ ; аналогом теплоемкости  $c_T$  - гидравлическая емкость сосудов, или "каналов", зависящая от площади поперечного сечения каналов  $F_T$ ; аналогом термического сопротивления  $R$  - гидравлическое сопротивление  $R_T$ .

Гидравлическая модель при этом может быть построена в виде системы моделирующих гидравлических цепей. Например, в случае моделирования распределения температур в неограниченной плоской стенке при нестационарном режиме стенка разбивается на конечное число слоев. В модели каждый слой имитируется вертикальным сосудом с сечением, пропорциональным теплоемкости слоя. Термические сопротивления слоев соответствуют гидравлическим сопротивлениям капилляров, которые соединяют сосуды. При включении расхода изменение уровней жидкости в сосудах во времени будет характеризовать изменение температуры в слоях стенки. Точность полученных результатов будет зависеть от числа слоев. При построении и действии модели должны быть учтены начальные и граничные условия к задаче, а также масштабы для перехода от переменных, характеризующих изучаемое явление, к переменным, которые используются в модели. При моделировании стационарных процессов картину линий теплового потока можно сделать видимой. В двумерном стационарном потенциальном (безвихревом) потоке невязкой жидкости функция тока  $\psi(x, y)$  удовлетворяет **уравнению Лапласа**:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (240)$$

Линии тока  $\psi(x, y) = \text{const}$  в прозрачной гидравлической модели можно сделать видимыми путем окраски потока. Так как функция теплового тока в стационарных условиях (при отсутствии внутреннего тепловыделения) также удовлетворяет уравнению (240), видимые линии тока в модели будут аналогичны линиям теплового тока и ортогональны к изотермам.

**Уравнение Фурье:**

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_v \rho}$$

**Уравнение Пуассона:**

$u(x, y, z)$  потенциал объемных масс, распределенных с плотностью  $f(x, y, z)/4\pi$  (в областях, где  $f=0$  потенциал  $u$  удовлетворяет уравнению Лапласа).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f$$

$$\Delta T = \frac{f}{a^2}$$

## Контрольные вопросы

- Метод разделения переменных
- Метод источников
- Вид функции G
- Метод интегральных преобразований
- Численные методы решения задач теплопроводности
- Методы электротепловой аналогии.
- Гидротепловая аналогия
- Метод интегрального преобразования Лапласа
- Операционный метод Хевисайда
- Явные конечно-разностные уравнения
- Неявные конечно-разностные уравнения
- Электротепловая аналогия