

Энергомашиностроение.

6

Лекция №11

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ

- Основы теории пограничного слоя
- Вынужденная конвекция при ламинарном режиме течения

Основы теории пограничного слоя. Особенности течения вязкой жидкости при больших числах Re. Пограничный слой

При движении жидкости с большим числом Re весь поток может быть разбит на две области: область динамического пограничного слоя, где влияние вязкости существенно, и внешнюю область потенциального течения, где влияние вязкости пренебрежимо мало. Чем больше число Re потока, тем больше относительная величина сил инерции по сравнению с силами вязкости, тем тоньше пограничный слой и, наоборот, с возрастанием роли сил вязкости происходит утолщение пристенной области течения.

Дифференциальные уравнения динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев

Рассмотрим случай стационарного плоского пограничного слоя сжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил и процессов диффузии.

$$\begin{aligned} \rho(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right] \\ \rho(w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w_y}{\partial y} - \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

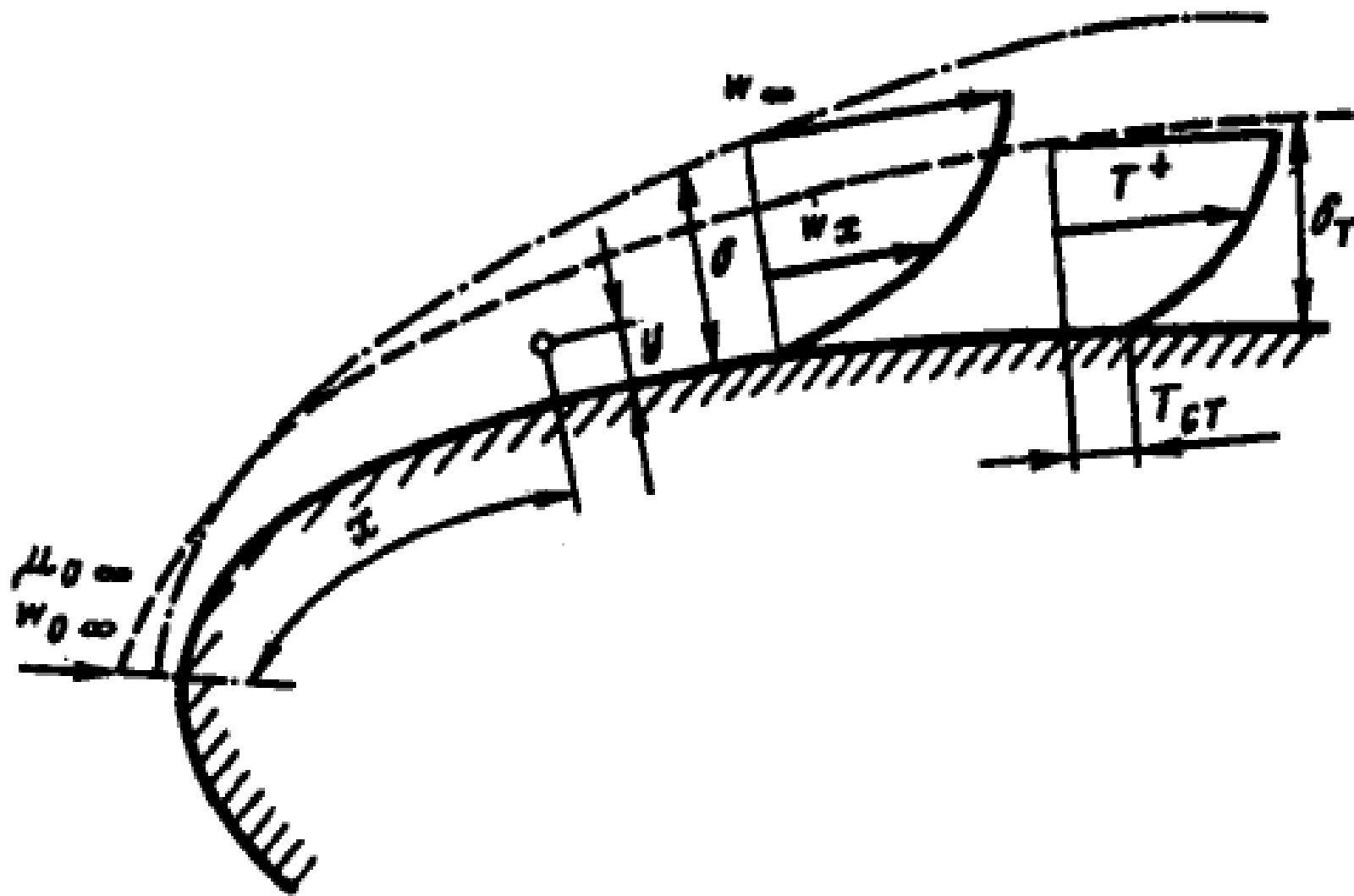


Рис. 1. Схема пограничного слоя на криволинейной поверхности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) = 0 \quad (2)$$

$$\rho(w_x \frac{\partial}{\partial x}(c_p T) + w_y \frac{\partial}{\partial y}(c_p T)) - w_x \frac{\partial p}{\partial x} - w_y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \mu \Phi \quad (3)$$

где Φ – диссипативная функция

$$\Phi = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 - 2 \left(\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^2 \right) - \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right)^2$$

Преобразуем уравнения движения (1), учитывая уже отмеченные ранее свойства пограничного слоя - малость поперечных размеров и скоростей по сравнению с продольными. Будем считать, что толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с расстоянием x (рис.1). Порядок величин w_x и x примем за единицу, тогда расстояние $y \sim \delta$. Из уравнения неразрывности (2) следует, что поперечная скорость w_y также имеет порядок δ , если порядок плотности принять равным единице. Поскольку мы считаем, что порядок w_x и x равен единице, то производные $\partial w_x / \partial x$ и $\partial^2 w_x / \partial x^2$ должны быть того же порядка, а производные $\partial w_x / \partial y$ и $\partial^2 w_x / \partial y^2$ - порядка $1/\delta$ и $1/\delta^2$ соответственно.

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_\infty w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) = 0 \quad (6)$$

С граничными условиями

$$w_x = 0, w_y = 0 \quad \text{при } y=0;$$

$$w_x = w_\infty \quad \text{при } y=\infty$$

$$\rho \left[w_x \frac{\partial}{\partial x} (c_p T) + w_y \frac{\partial}{\partial y} (c_p T) \right] = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7)$$

С граничными условиями

$$T = T_{ст} \quad \text{при } y=0;$$

$$T = T_\infty \quad \text{при } y=\infty$$

Для идеального газа $h = c_p T$, и уравнение (7) можно записать через энтальпию:

$$\rho \left[w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} \right] = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2. \quad (8)$$

$$\rho w_x \frac{\partial}{\partial x} \left(c_p T + \frac{w_x^2}{2} \right) + \rho w_y \frac{\partial}{\partial y} \left(c_p T + \frac{w_x^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + w_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$\mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + w_x \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu w_x \frac{\partial w_x}{\partial y} \right);$$

$$\begin{aligned} \rho w_x \frac{\partial}{\partial x} \left(c_p T + \frac{w_x^2}{2} \right) + \rho w_y \frac{\partial}{\partial y} \left(c_p T + \frac{w_x^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \mu w_x \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_x^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(T + \frac{\mu}{\lambda} \frac{w_x^2}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(T + \frac{w_x^2}{2} \right) + \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} - 1 \right) \frac{w_x^2}{2 c_p} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Принимая удельную теплоемкость c_p постоянной поперек пограничного слоя, что вполне допустимо для идеального газа, и вводя безразмерное число Прандтля, окончательно получаем уравнение энергии в форме Широкова:

$$\rho c_p \left(w_x \frac{\partial T^*}{\partial x} + w_y \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[T^* + (\text{Pr} - 1) \frac{w_x^2}{2c_p} \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь $T^* = T + w^2/2c_p$ - температура торможения

Система уравнений плоского сжимаемого пограничного слоя с учетом диффузии и химических реакций

Полученные уравнения пограничного слоя могут быть обобщены на случай движения смеси разнородных и реагирующих газов.

В результате происходящих реакций возникают и исчезают отдельные компоненты смеси, поэтому уравнение неразрывности для i -го компонента смеси имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_i w_{xi}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_i w_{yi}) = m_i, \quad (11)$$

где ρ_i , w_{xi} , w_{yi} - плотность и составляющие скорости i -го компонента соответственно; m_i - секундная массовая скорость образования i -го компонента, отнесенная к единице объема

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) = 0 \quad (12)$$

$$\rho w_x = \sum_i \rho_i w_{xi} \qquad \rho w_y = \sum_i \rho_i w_{yi}$$

В условиях смеси закон сохранения массы требует:

$$\sum_i m_i = 0 \qquad (13)$$

Уравнение движения, записанное для смеси, также сохранит свою прежнюю форму:

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \qquad (14)$$

Как и уравнение состояния:

$$p = \rho RT$$

$$R = R_{см} = \sum_i C_i R_i$$

Уравнение диффузии i компонента в приближении пограничного слоя можно получить, пренебрегая членами второго порядка малости. Заменяя в (11) скорость движения суммой скоростей, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho C_i (w_{xi}^* - w_x) + \frac{\partial}{\partial y} \rho C_i (w_{yi}^* - w_y) = m_i \qquad (15)$$

Согласно основному закону диффузии, скорость диффузии можно определить через градиенты массовых долей, температуры и давления:

$$w_i^* = w_i - w = -\frac{D_i}{C_i} \text{grad} C_i - \frac{D_i^T}{T} \text{grad} T - \frac{D_i^p}{p} \text{grad} p \qquad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho C_i w_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho C_i w_y = \frac{\partial}{\partial x} \rho C_i \left(\frac{D_i}{C_i} \frac{\partial D_i}{\partial x} + \frac{D_i^T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{D_i^p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \rho C_i \left(\frac{D_i}{C_i} \frac{\partial D_i}{\partial y} + \frac{D_i^T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_i^p}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + m_i.$$

Уравнение диффузии i компонента в плоском сжимаемом пограничном слое имеет вид:

$$\frac{\partial C_i}{\partial x} \rho w_x + \frac{\partial C_i}{\partial y} \rho w_y = \frac{\partial}{\partial y} \rho \left[\left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{D_i^T}{T} C_i \frac{\partial T}{\partial y} \right) + m_i \right]. \quad (17)$$

Предположим, что энтальпия реагирующего газа определяется по правилу смешения:

$$h = \sum_i C_i h_i \quad (18)$$

Процесс выделения (или поглощения) теплоты при образовании новых компонент приводит к присоединению к правой части уравнения (18) члена:

$$\sum_i h_i^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho C_i w_{xi} + \frac{\partial}{\partial y} \rho C_i w_{yi} \right) \quad (19)$$

$$\sum_i h_i^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho C_i w_{xi} + \frac{\partial}{\partial y} \rho C_i w_{yi} \right) \quad (20)$$

h^* - теплота образования i компонента

Поток теплоты за счет диффузии можно выразить в форме вектора с проекциями на оси OX и OY:

$$\rho(w_{xi} - w_x)h_i C_i \quad \rho(w_{yi} - w_y)h_i C_i \quad (21)$$

Второй доп. член в уравнении энергии, соответствующий диффузионному переносу теплоты, определится дивергенцией, взятой с обратным знаком, суммы векторов потока теплота, вызываемых отдельными компонентами:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \sum_i (w_{xi} - w_x) h_i C_i \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \sum_i (w_{yi} - w_y) h_i C_i \right] \quad (22)$$

С учетом выражения (20) и (22) уравнение энергии (7) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho w_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i C_i h_i \right) + \rho w_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_i C_i h_i \right) = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i \rho w_{xi} C_i h_i^* \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_i \rho w_{yi} C_i h_i^* \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_i \rho (w_{xi} - w_x) C_i h_i \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_i \rho (w_{yi} - w_y) C_i h_i \right] \end{aligned} \quad (23)$$

Проведя тождественное преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i \rho w_{xi} C_i h_i^* \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_i \rho w_{yi} C_i h_i^* \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_i \rho (w_{xi} - w_x) C_i h_i^* \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_i \rho (w_{yi} - w_y) C_i h_i^* \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i \rho_i w_x C_i h_i^* \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_i \rho_i w_y C_i h_i^* \right) \end{aligned}$$

$$\rho w_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i C_i (h_i - h_i^*) \right) + \rho w_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_i C_i (h_i - h_i^*) \right) = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_i \rho (w_{xi} - w_x) C_i (h_i - h_i^*) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_i \rho (w_{yi} - w_y) C_i (h_i - h_i^*) \right) \quad (24)$$

$$\rho w_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \sum_i \rho C_i (w_{yi} - w_y) (h_i - h_i^*) \right] \quad (25)$$

где $\bar{h} = \sum_i C_i (h_i - h_i^*)$ - полная энтальпия смеси

$$w_i - w = -\frac{D_i}{C_i} \text{grad} C_i - \frac{D_i^T}{T} \text{grad} T$$

$$\rho w_x \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \sum_i (h_i - h_i^*) \left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{C_i D_i^T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (26)$$

$$\bar{h}_0 = \bar{h} + w_x^2 / 2$$

$$\begin{aligned} \rho w_x \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu - \frac{\lambda}{c_p} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_x^2}{2} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_i \left(\rho D_i - \frac{\lambda}{c_p} \right) (h_i - h_i^*) \frac{\partial C_i}{\partial y} + \sum_i D_i^T \frac{\rho C_i}{T} (h_i - h_i^*) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Числа Прандтля, Шмидта и Льюиса (последние аналогичны числу Прандтля и являются безразмерными физическими параметрами):

$$\text{Pr} = \mu \bar{c}_p / \lambda; \quad \text{Sc} = \mu / \rho D_i; \quad \text{Le} = \rho \bar{c}_p D_i / \lambda \quad (29)$$

$$\bar{c}_p = \sum C_i c_{pi}$$

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) = 0$$

$$\rho w_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + m_i$$

$$\rho w_x \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_x^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_i \rho D_i \left(1 - \frac{1}{Le} \right) (h_i - h_i^*) \frac{\partial C_i}{\partial y} \right]$$

(30)

Граничные условия

$$\rho = \rho_{cm}, h = h_{cm}, \bar{h}_0 = h_{ocm}, w_x = 0,$$

$$w_y = w_{cm}, C_i = C_{icm} \text{ при } y=0;$$

$$\rho = \rho_{\infty}, h = h_{\infty}, \bar{h}_0 = h_{o\infty}, w_x = w_{\infty},$$

$$w_y = 0, C_i = C_{i\infty} \text{ при } y=\infty;$$

Проведем теперь сравнительную оценку толщин динамического, теплового и диффузионного пограничного слоя. Для этого перепишем дифференциальные уравнения пограничного слоя в безразмерном виде. В качестве масштабов физических величин выберем следующие:

$$w_x \rightarrow w_\infty; \rho \rightarrow \rho_\infty; y \rightarrow \delta_T, \delta, \delta_D; p \rightarrow \rho w_\infty^2;$$

$$\mu \rightarrow \mu_\infty; C_i \rightarrow C_{i\infty}; x \rightarrow L, \lambda \rightarrow \lambda_\infty; h_0 \rightarrow h_{0\infty}$$

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \dots = \dots \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \quad (32)$$

Здесь тильдой обозначены безразмерные величины. Все члены уравнения (32) будут иметь один и тот же порядок лишь при условии

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_\infty}} \quad (33)$$

$$\rho w_x \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \tilde{x}} + \dots = \dots \left(\frac{L}{\delta_T} \right)^2 \frac{1}{\text{Pr Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\delta_T}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Pr Re}_\infty}} \quad (34)$$

$$\frac{\delta_T}{\delta} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}} \quad (35)$$

$$\rho w_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + \dots = \dots \left(\frac{L}{\delta_D} \right)^2 \frac{1}{\text{Sc Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{C_i}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\delta_D}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Sc Re}_\infty}} \quad (36)$$

$$\frac{\delta_D}{\delta} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Sc}}} \quad (37)$$

$$\text{Sc}_{C_i \rightarrow 0} = 0.145 M_i^{0.556}$$

$$\text{Sc} = \left(\nu / \nu_{C_i \rightarrow 0} \right) \text{Sc}_{C_i \rightarrow 0}$$

Тройная аналогия

Уравнения энергии и движения пограничного слоя (30) становятся тождественными при условии $Pr = Le = Sc = 1$ и $\partial p / \partial x = 0$.

$$C_i = \sum_j r_{ij} C_j$$

Если не происходит внутриядерных превращений в пограничном слое, то массовые доли отдельных химических элементов не меняются, должно быть подобие полей скоростей, полной концентрации и полной энтальпии торможения:

$$\frac{\omega_x}{\omega_\infty} = \frac{\overline{h_0} - \overline{h_{0cm}}}{h_{0\infty} - h_{0cm}} = \frac{C_j - C_{jcm}}{C_{j\infty} - C_{jcm}} \quad (38)$$

$$q_{cm} \Sigma = -\frac{\lambda}{c_p} \left(\frac{\partial \overline{h_0}}{\partial y} \right)_{cm}, \quad j_{cm} = -\rho D \left(\frac{\partial C_i}{\partial y} \right)_{cm}, \quad \tau_{cm} = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{cm} \quad (39)$$

$$St_T = St_D = C_f / 2 \quad (40)$$

Интегральные соотношения импульсов, энергии и диффузии

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + f(2 + H - M_\infty^2) = \frac{\tau_{cm}}{\rho w_\infty^2} + \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} \quad (41)$$

где δ^{**} - толщина потери импульса

При обтекании несжимаемой жидкостью ($M < 1$) уравнение (41) принимает вид

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + f(2 + H) = \frac{\tau_{cm}}{\rho_\infty w_\infty^2} + \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} \quad (42)$$

$$\rho_\infty w_\infty \delta^* = \int_0^\infty (\rho_\infty w_\infty - w_x) dy$$

При обтекании осесимметричных тел вращения из-за малой толщины пограничного слоя относительно радиуса кривизны R_x дифференциальное уравнение движения остается тем же, что и в случае плоского течения

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x R_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y R_x) = 0$$

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{w_\infty}(2 + H) + \left(\frac{1}{\rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{dx} + \frac{1}{R_x} \frac{dR_x}{dx} \right) \delta^{**} = \frac{\tau_{cm}}{\rho_\infty w_\infty^2} + \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty}$$

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty} \right) \left(1 \pm \frac{y}{R_x} \cos \beta \right) dy$$

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_\infty} \right) \left(1 \pm \frac{y}{R_x} \cos \beta \right) dy$$

$$c_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho w_x T^* - \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y T^* \right) = \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[T^* + (\text{Pr} - 1) \frac{w_x^2}{2c_p} \right] \quad (43)$$

$$h_\infty^* = c_p T + w_\infty^2 / 2 = c_p T_\infty^*$$

$$c_p \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x T_\infty^*) + c_p \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y T_\infty^*) = 0 \quad (44)$$

$$c_p \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \rho w_x (T^* - T_\infty^*) dy + c_p \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y (T^* - T_\infty^*) dy = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[T^* + (\text{Pr} - 1) \frac{w_x^2}{2c_p} \right] \right\} dy \quad (45)$$

Граничные условия:

$$y = 0, w_y = w_{cm}, T^* = T_{cm}, \rho = \rho_{cm}$$

$$\text{при } y = \infty, w_y = 0, w_x = w_\infty, T^* = T_\infty^*$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y (T^* - T_\infty^*) dy = \rho w_y (T^* - T_\infty^*) \Big|_0^\infty = -\rho_{cm} w_{cm} (T^* - T_\infty^*)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left[T^* + (\text{Pr}-1) \frac{w_x^2}{2c_p} \right] \right\} dy = \lambda \frac{\partial T^*}{\partial y} \Big|_0^\infty + \lambda \frac{\partial}{\partial y} (\text{Pr}-1) \frac{w_x^2}{2c_p} \Big|_0^\infty$$

В последнем интеграле $\lambda \frac{\partial}{\partial y} (\text{Pr}-1) \frac{w_x^2}{2c_p} = 0$, так как на стенке $w_x=0$, а на внешней границе пограничного слоя $w_x=w_\infty$

$$\delta_h^{**} = \frac{\int_0^\infty \rho w_x (T^* - T_\infty^*) dy}{\rho_\infty w_\infty (T_{cm} - T_\infty^*)} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty} \left(1 - \frac{T_{cm} - T^*}{T_{cm} - T_\infty^*} \right) dy$$

$$\int_0^\infty \rho w_x (T_\infty^* - T^*) dy = \delta_T^{**} \rho_\infty w_\infty (T_{cm} - T_\infty^*)$$

$$\frac{d}{dx} \delta_T^{**} \rho_\infty w_\infty \Delta T = \frac{q_{cm} + c_p \rho_{cm} w_{cm} \Delta T}{c_p}$$

$$z \partial e \Delta T = T_{cm} - T_\infty^*$$

$$\frac{d}{dx} \delta_T^{**} \rho_\infty w_\infty \Delta T = \rho_\infty w_\infty \Delta T \left[\frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{w_\infty} \frac{dw_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{dx} \right) \right]$$

Введем число Стантона

$$St = q_{cm} / c_{p\infty} \rho_\infty w_\infty \Delta T$$

$$St = \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{w_\infty} \frac{dw_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{dx} \right) - \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} \quad (46)$$

$$St = \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{w_\infty} \frac{dw_\infty}{dx} (1 - M_\infty^2) \right) - \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} \quad (47)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\delta_{\bar{h}}^{**} \rho_{\infty} w_{\infty} \Delta \bar{h} \right) = q_{cm} + \rho_{cm} w_{cm} \Delta \bar{h}$$

где $\Delta \bar{h} = \overline{h_{cm}} - \overline{h_{0\infty}}$

Интегральная толщина потери энтальпии

$$\delta_{\bar{h}}^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho w_x}{\rho_{\infty} w_{\infty}} \left(1 - \frac{\overline{h_{cm}} - \overline{h_0}}{\overline{h_{cm}} - \overline{h_{0\infty}}} \right) dy$$

$$q_{cm} = - \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \overline{h_0}}{\partial y} + \sum_i \rho_i D_i \left(1 - \frac{1}{Le} \right) \left(\overline{h_i} - h_i^* \right) \frac{\partial C_i}{\partial y} \right]_{cm}$$

$$St = q_{cm} / \Delta h \rho_{\infty} w_{\infty} \quad (48)$$

$$St = \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left(\frac{1}{\Delta \bar{h}} \frac{d\Delta \bar{h}}{dx} + \frac{1}{w_{\infty}} \frac{dw_{\infty}}{dx} (1 - M_{\infty}^2) \right) - \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_{\infty} w_{\infty}} \quad (49)$$

$$St = \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left(\frac{1}{w_\infty} \frac{dw_\infty}{dx} + \frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{dx} + \frac{1}{R_x} \frac{dR_x}{dx} \right) - \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} \quad (50)$$

$$\delta_T^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty} \left(1 - \frac{T_{cm} - T^*}{T_{cm} - T_\infty^*} \right) \left(1 \pm \frac{y}{R_x} \cos \beta \right) dy$$

$$\frac{d\delta_D^{**}}{dx} + \frac{\delta_D^{**}}{\rho_\infty w_\infty} \frac{1}{\Delta C_i} \frac{d}{dx} (\rho_\infty w_\infty \Delta C_i) - \frac{j_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} = St_D \quad (51)$$

Толщина потери вещества

$$\delta_D^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty} \left(1 - \frac{C_{icm} - C_i}{C_{icm} - C_{i\infty}} \right) dy$$

Диффузионное число Стантона

$$St_D = \frac{j_{cm}}{\rho_\infty w_\infty (C_{icm} - C_{i\infty})}$$

Числа Re динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев в следующем виде

$$\text{Re}^{**} = \rho_{\infty} w_{\infty} \delta^{**} / \mu_{\infty} \qquad \text{Re}_T^{**} = \rho_{\infty} w_{\infty} \delta_T^{**} / \mu_{\infty}$$

$$\text{Re}_h^{**} = \rho_{\infty} w_{\infty} \delta_h^{**} / \mu_{\infty} \qquad \text{Re}_D^{**} = \rho_{\infty} w_{\infty} \delta_D^{**} / \mu_{\infty}$$

$$\frac{d \text{Re}^{**}}{dX} + f \text{Re}_L (1 + H) = \text{Re}_L \left(\frac{C_f}{2} + \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_{\infty} w_{\infty}} \right) \qquad (52)$$

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{dX} + \frac{\text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} = \text{Re}_L \left(St + \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_{\infty} w_{\infty}} \right) \qquad (53)$$

$$\frac{d \text{Re}_D^{**}}{dX} + \frac{\text{Re}_D^{**}}{\Delta C_i} \frac{d\Delta C_i}{dX} = \text{Re}_L \left(St_D + \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_{\infty} w_{\infty}} \right) \qquad (54)$$

Где $X=x/L$ – относительное расстояние,

Re_L – число Рейнольдса, определенное по характерному размеру L обтекаемой поверхности,

C_f - Коэффициент трения

$$\text{Re}_L = \rho_\infty w_\infty L / \mu_{0\infty} \qquad \text{Re}^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta^{**} / \mu_{0\infty}$$

$$\text{Re}_h^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_h^{**} / \mu_{0\infty} \qquad \text{Re}_D^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_D^{**} / \mu_{0\infty}$$

$$\Delta \bar{h} = \bar{h}_{cm} - \bar{h}_{0\infty}$$

$$\frac{d \text{Re}_h^{**}}{dX} + \frac{\text{Re}_h^{**}}{\Delta \bar{h}} \frac{d \Delta \bar{h}}{dX} = \text{Re}_L \left(St + \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} \right)$$

$$C_f = f_f \left(\text{Re}^{**}, f, M_\infty, T_{cm} / T_\infty, \dots \right)$$

$$St = f_s \left(\text{Re}_T^{**}, \frac{1}{\Delta T} \frac{d \Delta T}{dX}, M_\infty, T_{cm} / T_\infty, \dots \right)$$

$$St_D = f_D \left(\text{Re}_D^{**}, \frac{1}{\Delta \tilde{C}_i} \frac{d \Delta \tilde{C}_i}{dX}, M_\infty, \dots \right)$$

$$\frac{d \operatorname{Re}^{**}}{dX} + f \operatorname{Re}_L (1 + H) = \operatorname{Re}_L \frac{C_f}{2} (\psi + b) \quad (55)$$

$$\frac{d \operatorname{Re}_T^{**}}{dX} + \frac{\operatorname{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} = \operatorname{Re}_L St_0 (\psi_s + b_T) \quad (56)$$

$$\frac{d \operatorname{Re}_D^{**}}{dX} + \frac{\operatorname{Re}_D^{**}}{\Delta C_i} \frac{d\Delta C_i}{dX} = \operatorname{Re}_L St_{D_0} (\psi_D + b_D) \quad (57)$$

Где $\psi = (C_f / C_{f_0})$ относительный закон трения при $\operatorname{Re}^{**} = \operatorname{idem}$

$b = \frac{2\rho_{\tilde{n}0} w_{\tilde{n}0}}{\rho_{\infty} w_{\infty} C_{f_0}}$ параметр проницаемости стенки, отнесенный к C_{f_0}

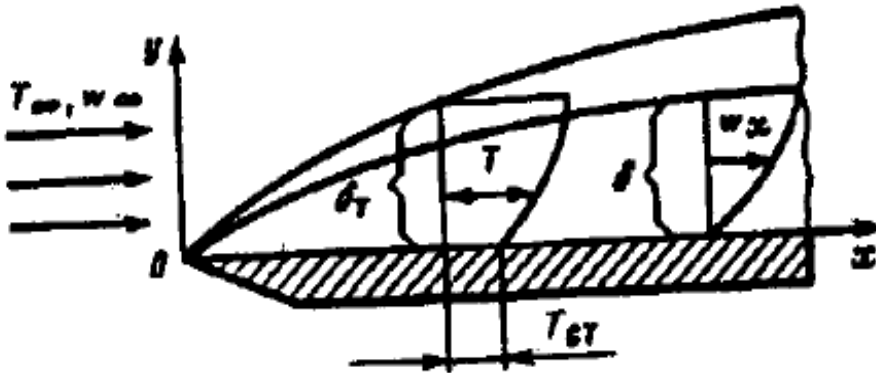
$\psi_s = (St_D / St_{D_0})_{\operatorname{Re}_D^{**}}$ относительный закон теплообмена при $\operatorname{Re}_T^{**} = \operatorname{idem}$

$b_T = \frac{\rho_{\tilde{n}0} w_{\tilde{n}0}}{\rho_{\infty} w_{\infty} St_0}$ тепловой параметр, отнесенный к S_{t_0}

$\psi_D = (St_D / St_{D_0}) \operatorname{Re}_D^{**}$ относительный закон диффузии при $\operatorname{Re}_D^{**} = \operatorname{idem}$

$b_D = \frac{\rho_{\tilde{n}0} w_{\tilde{n}0}}{\rho_{\infty} w_{\infty} St_{D_0}}$ диффузионный параметр проницаемости, отнесенный к S_{D_0}

Вынужденная конвекция при ламинарном режиме течения. Теплообмен и массообмен при обтекании пластины потокom несжимаемой жидкости



Расположим начало координат в передней точке пластины, ось Ox направим вдоль пластины. Так как пластина очень тонкая и расположена вдоль потока, то можно принять, что $dp/dx = 0$.

Рис. 2. Схема обтекания пластины

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0; \quad (58)$$

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$w_x \frac{\partial C}{\partial x} + w_y \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

Граничные условия:

$$w_x = 0, w_y = 0, T = T_{cm}, C = C_{cm} \quad \text{при} \quad y = 0;$$

$$w_x = w_\infty, T = T_\infty, C = C_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty;$$

Если $Pr=Le=Sc=1$, то:

$$w_x / w_\infty = (T_{cm} - T) / (T_{cm} - T_\infty) = (C_{cm} - C) / (C_{cm} - C_\infty)$$

Подобия профилей скорости можно записать в виде:

$$w_x / w_\infty = \varphi(\eta),$$

где $\eta = y / \delta$

$$\eta = y \sqrt{w_\infty / \nu x} \quad (59)$$

$$w_x = \partial \psi / \partial y, w_y = \partial \psi / \partial x \quad (60)$$

$$\psi = \int_0^y w_x dy$$

$$\psi = \sqrt{\nu x w_{\infty}} \int_0^{\eta} \varphi(\eta) d\eta = \sqrt{\nu x w_{\infty}} f(\eta) \quad (61)$$

где $f(\eta)$ - безразмерная функция тока

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = w_{\infty} f'(\eta) \quad (62)$$

$$w_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - f(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu x w_{\infty}} - \sqrt{\nu x w_{\infty}} f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{w_{\infty} y}{x}} [f'(\eta) \eta - f(\eta)] \quad (63)$$

$$f f'' + 2 f''' = 0 \quad (64)$$

Граничные условия:

$$f' = 0, \quad f = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0$$

$$f' = 1, \quad \text{при} \quad \eta = \infty$$

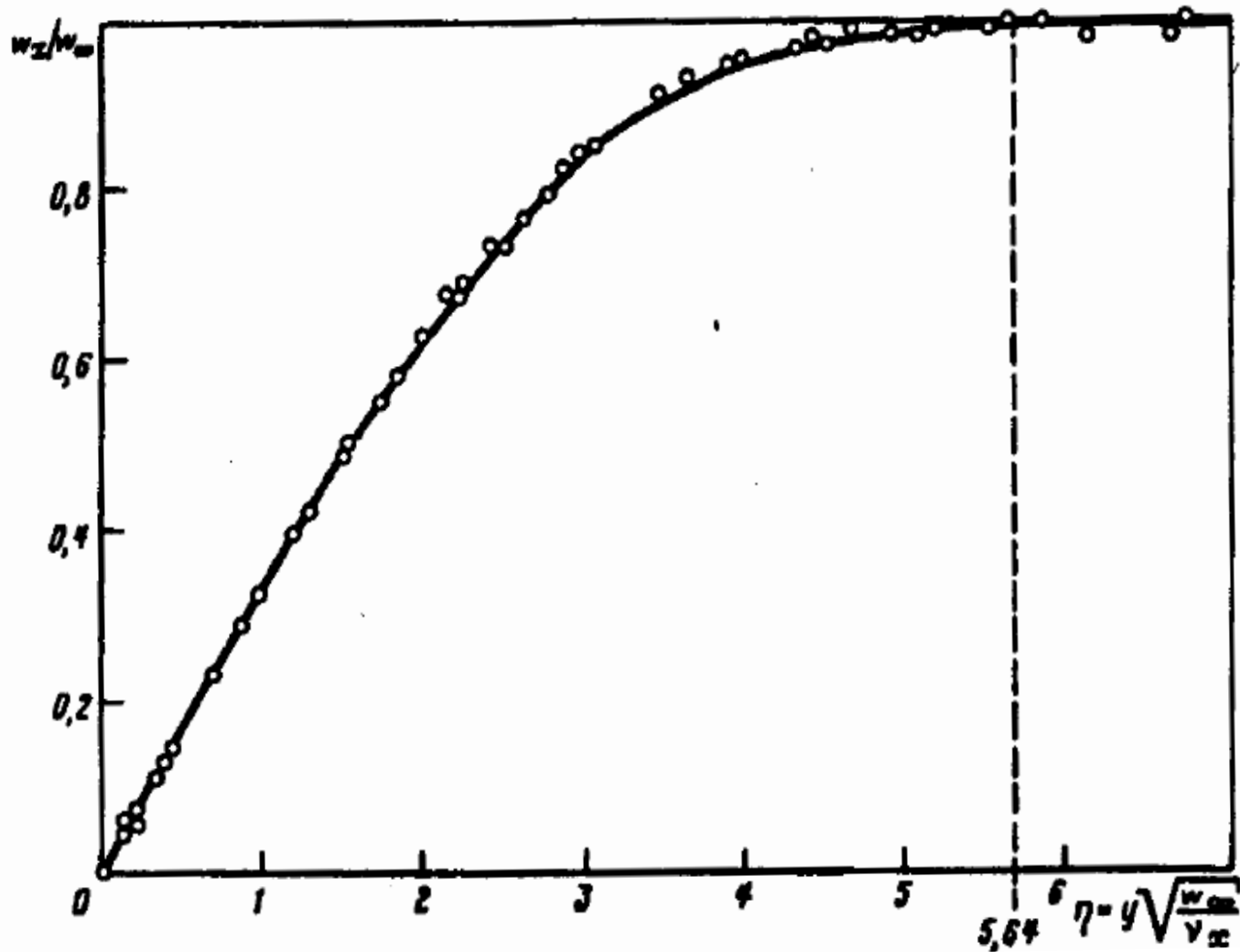


Рис. 3. Распределение скорости в ламинарном пограничном слое на пластине:
 точки - по измерениям Никурадзе; кривая - расчет по Блазиусу

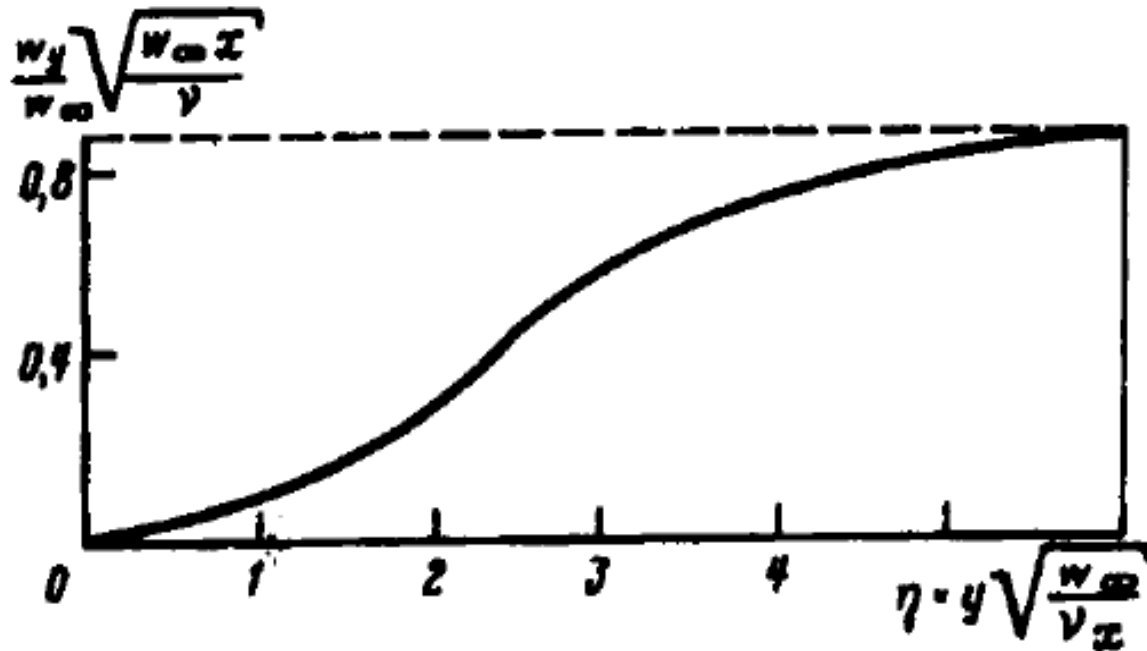


Рис. 4. Распределение поперечной скорости в ламинарном пограничном слое на плоской пластине

$$\tau_{cm} = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] = \mu w_\infty \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}} f''(\eta) \quad (65)$$

$$f''(0) = 0.332$$

$$\tau_{cm} / (\rho w_\infty^2) = 0.332 / \sqrt{\text{Re}_x} \quad (66)$$

$$C_{f_0} = 2\tau_{cm} / (\rho w_\infty^2) = 0.664 / \sqrt{\text{Re}_x} \quad (67)$$

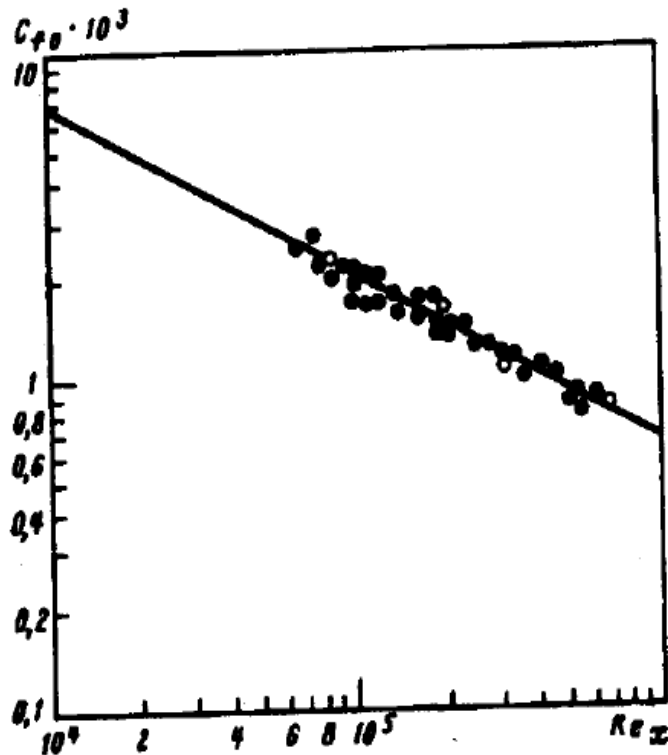


Рис. 5. Местный коэффициент трения плоской пластины, обтекаемой в продольном направлении: светлые точки - измерение касательного напряжения на стенке по профилю скоростей; темные точки - прямое измерение касательного напряжения на стенке; прямая - расчет по формуле 67

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{w_x}{w_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{v_x}{w_\infty}} \int_{\eta=0}^{\eta=\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta = \sqrt{\frac{v_x}{w_\infty}} [\eta_1 - f(\eta_1)]$$

$$\delta^* = 1.73 \sqrt{\frac{v_x}{w_\infty}} \quad (68)$$

$$\delta^{**} = 0.664 \sqrt{\frac{v_x}{w_\infty}} \quad (69)$$

$$C_{f_0} = 0.44 / \text{Re}^{**} \quad (70)$$

$$\mathcal{G} = (T_{cm} - T) / (T_{cm} - T_\infty) \quad (71)$$

$$\mathcal{G}''(\eta) + \frac{\text{Pr}}{2} f(\eta) \mathcal{G}'(\eta) = 0 \quad (72)$$

Граничные условия:

$$\mathcal{G} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad (73)$$

$$\mathcal{G} = 1 \quad \text{при} \quad \eta = \infty$$

$$\frac{d\mathcal{G}'(\eta)}{d\eta} + \frac{\text{Pr}}{2} f(\eta)\mathcal{G}'(\eta) = 0$$

$$\frac{d\mathcal{G}'(\eta)}{\mathcal{G}'\eta} + \frac{\text{Pr}}{2} f(\eta)d\eta = 0$$

$$\mathcal{G}' = C_1 e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta}$$

$$\mathcal{G} = C_1 \int_0^\eta e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta} d\eta + C_2$$

$$C_1 = 1 / \int_0^\infty e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f(\eta) d\eta} d\eta$$

$$\mathcal{G}'(\eta) = \frac{\int_0^{\eta} e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta} d\eta}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta} d\eta}$$

$$f = -2 f''' / f''$$

$$\int_0^{\eta} f(\eta) d\eta = -2 \int_0^{\eta} \frac{f'''(\eta)}{f''(\eta)} d\eta = -2 \ln \frac{f''(\eta)}{f''(0)}$$

$$\mathcal{G}(\eta) = \frac{\int_0^{\eta} [f'''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^{\infty} [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta} \quad (75)$$

При Pr=1

$$\mathcal{G}(\eta) = (T_{cm} - T) / (T_{cm} - T_\infty) = f'(\eta) / f'(\infty) = w_x / w_\infty$$

$$\alpha_x (T_{cm} - T_\infty) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{cm}$$

$$\alpha_x = -\frac{\lambda}{T_{cm} - T_\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{cm} = -\frac{\lambda}{T_{cm} - T_\infty} \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (76)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = -(T_{cm} - T_\infty) \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\eta)}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (77)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{[f''(0)]^{\text{Pr}}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta} = \frac{0.332^{\text{Pr}}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{\text{Pr}} d\eta} = \alpha_1(\text{Pr}) \quad (78)$$

$$\alpha_1 = 0.332\sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (79)$$

$$\alpha_x = 0.332\lambda\sqrt[3]{\text{Pr}}\sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}} \quad (80)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha_x dx = 0.664\lambda\sqrt[3]{\text{Pr}}\sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}} \quad (81)$$

$$Nu_x = 0.332\sqrt[3]{\text{Pr}}\sqrt{\text{Re}_x} \quad (82)$$

$$\bar{Nu} = 0.664\sqrt[3]{\text{Pr}}\sqrt{\text{Re}_L} \quad (83)$$

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{d \text{Re}_x} = St_0 \quad (84)$$

$$St_0 = 0.332 / \left(\sqrt{\text{Re}_x} \text{Pr}^{\frac{2}{3}} \right) \quad (85)$$

$$St_0 = \frac{0.22}{Re_T^{**} Pr^{\frac{2}{3}}} \quad (86)$$

$$(\bar{C})''(\eta) + \frac{Sc}{2} f(\eta)(\bar{C})'(\eta) = 0 \quad (87)$$

Граничные условия: $\bar{C} = 0$ при $\eta = 0$ (88)

$$\bar{C} = 1 \quad \text{при} \quad \eta = \infty$$

$$St_D = 0.332 / (Re_0^{**} Sc^{\frac{4}{3}}) \quad (89)$$

$$St_D = 0.22 / (\sqrt{Re_x} Sc^{\frac{2}{3}}) \quad (90)$$

$$C_{f_0} / 2 = St_0 Pr^{-\frac{2}{3}} = St_D Sc^{-\frac{2}{3}} \quad (91)$$

Автомодельные решения уравнений динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев

Автомодельные решения динамического ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости можно получить и для градиентного течения жидкости, если скорость на внешней границе пограничного слоя изменяется по степенному закону

$$w_{\infty} = Cx^m \quad (92)$$

$$m = \frac{\beta / \pi}{2 - \beta / \pi} \quad (93)$$

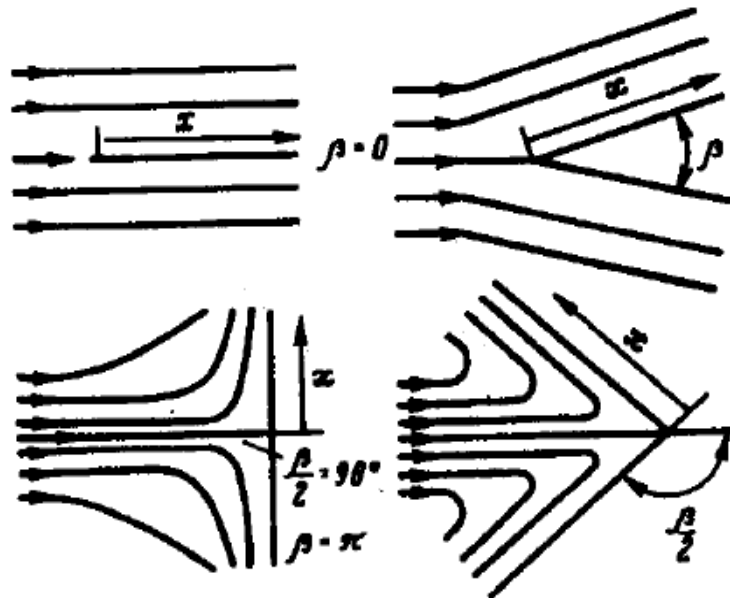


Рис. 6. Семейство течений около плоских и клиновидных тел

$$\frac{dp}{dx} = -\rho C x^m C m x^{m-1} = \frac{-\rho w_\infty^2 m}{x}$$

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{w_\infty^2 m}{x} \quad (94)$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / w_\infty}}; \psi = \sqrt{x \nu w_\infty} f(\eta) \quad (95)$$

$$w_x = c x^m f'(\eta)$$

$$w_y = -\sqrt{\frac{2\nu C}{m+1} x^{m-1}} \left[\frac{m-1}{2} \eta f'(\eta) + \frac{m+1}{2} f(\eta) \right] \quad (96)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{C x^{m-1}}{\nu}}$$

$$f''' + \left(\frac{m+1}{2} \right) f f' + m [1 - (f')^2] = 0 \quad (97)$$

Граничные условия:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, F'(\infty) = 1 \quad (98)$$

$$C_f / 2 = f''(0) / \sqrt{\text{Re}_x}$$

$$K(\text{Pr}, m) = \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^\infty \left[-\text{Pr} \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] d\eta \right\}^{-1} \quad (99)$$

$$\text{Nu}_x \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} = \text{const} \quad (100)$$

$$\alpha_x = \frac{\text{const}}{\nu^{\frac{1}{2}}} \lambda x^{\frac{m-1}{2}}$$

$$w_\infty = Cx^m; T_{cm} = T_\infty + ax^\gamma; C_{cm} = C_\infty + ax^\gamma \quad (101)$$

$$\mathcal{G}'' + \text{Pr} \left[\frac{1}{2} (m+1) f \mathcal{G}' - \gamma f' (\mathcal{G} - 1) \right] = 0$$

$$\bar{C}'' + \text{Sc} \left[\frac{1}{2} (m+1) f \bar{C}' - \gamma f' (\bar{C} - 1) \right] = 0$$

$$Nu Re_x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

(102)

$$Nu_{Dx} Re_x = \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

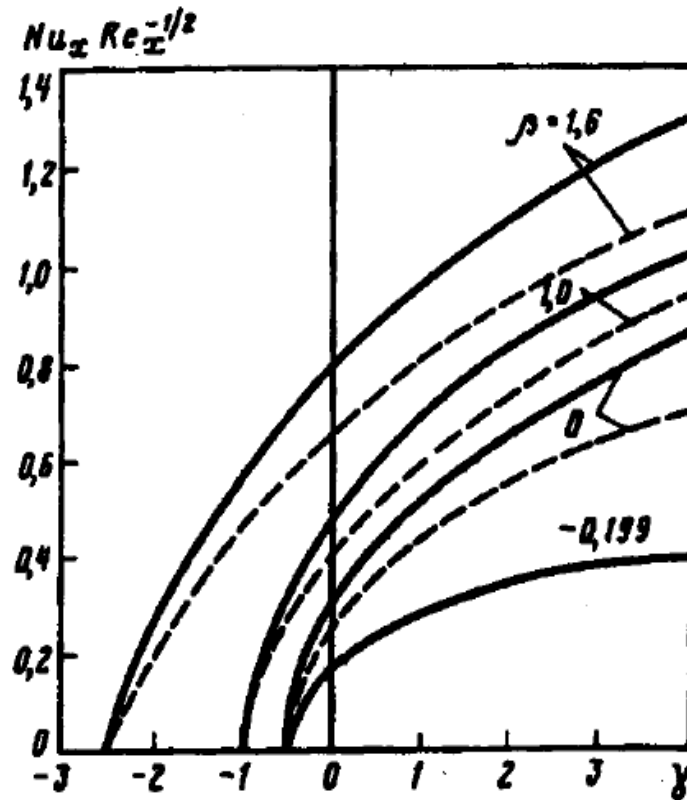


Рис. 7. Зависимость теплоотдачи от параметров β и γ при $Pr=0,7$

Теплообмен на криволинейной поверхности

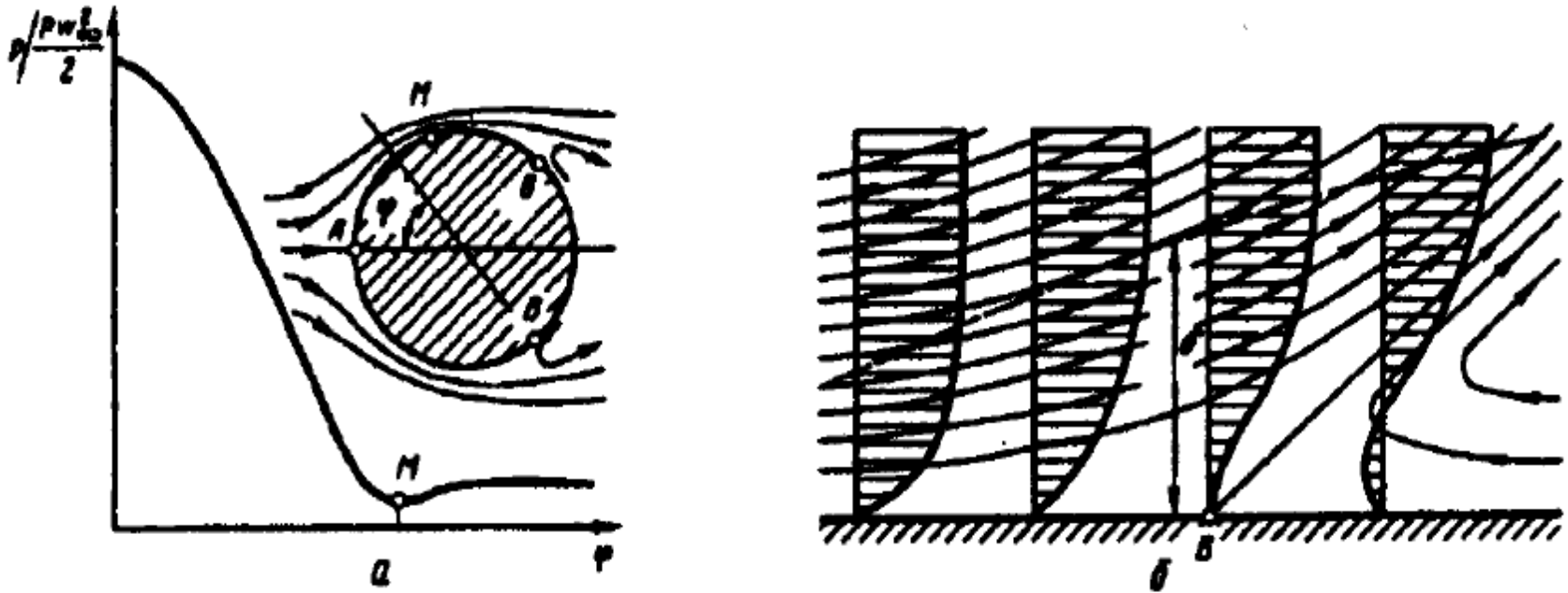


Рис. 8. Схема обтекания кругового цилиндра (а) и схематическое изображение течения в пограничном слое вблизи точки отрыва (б)

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (103)$$

$$f = f_{кр} = -0.089 / \text{Re}_x \quad (104)$$

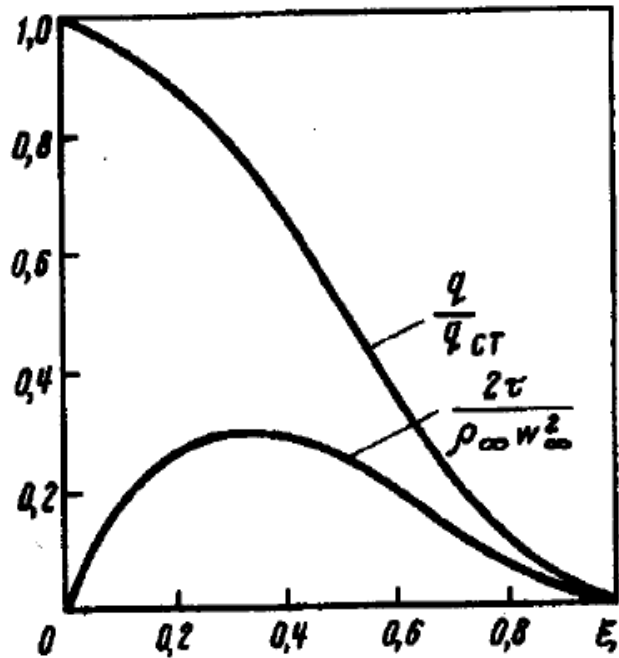


Рис 9. Распределение касательных напряжений и тепловых потоков в точке отрыва пограничного слоя

$$\psi_s = \left(\frac{St}{St_0} \right)_{Re_T^{**}} \approx 1 \quad (105)$$

$$\frac{d Re_T^{**}}{dX} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} = \psi_s St_0 Re_L$$

$$\frac{d Re_T^{**}}{dX} + Re_T^{**} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} + \frac{1}{R_x} \frac{dR_x}{dX} \right) = \psi_s St_0 Re_L$$

$$St_0 = \frac{0.22}{Re_T^{**} Pr^{\frac{4}{3}}} \quad (106)$$

$$\frac{d Re_T^{**}}{dX} + Re_T^{**} \left(\frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} \right) = \frac{0.22}{Re_T^{**} Pr^{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{d Re_T^{**}}{dX} + \frac{Re_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} + \frac{Re_T^{**}}{R_x} \frac{dR_x}{dX} = \frac{0.22}{Re_T^{**} Pr^{\frac{4}{3}}}$$

$$\text{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{0.44}{\text{Pr}^{\frac{4}{3}}} \text{Re} \int_0^x \tilde{w} (\Delta T R_x)^2 dX \right]^{\frac{1}{2}} \quad (107)$$

$$\frac{d(\Delta T \text{Re}_T^{**})}{dx} = \frac{q_{cm}(x)}{c_p \mu_\infty}$$

$$\Delta T \text{Re}_T^{**} = \frac{1}{c_p \mu_\infty} \int_0^x q_{cm}(x) dx$$

$$\Delta T = \left(\right) \frac{q_{cm}(x)L}{0.22 \text{Re}_L \text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \int_0^x \frac{q_{cm}(x)}{\lambda_\infty^2} dx \quad (108)$$

Граничные условия:

$$w_{\infty} = C x^m; T_{cm} = T_{\infty} + a x^{\gamma}$$
$$\text{Re}_T^{**} = \left[\frac{0.44 C}{\text{Pr}^{\frac{4}{3}} \nu (m + 2\gamma + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m+1}{2}} \quad (109)$$

$$\text{St} = \frac{0.22}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}} \left[\frac{0.44 C}{\nu (m + 2\gamma + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m+1}{2}}} \quad (110)$$

$$\text{Nu}_x \text{Re}_x^{-\frac{1}{2}} = 0.332 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} [m + 2\gamma + 1]^{\frac{1}{2}} \quad (111)$$

$$\gamma = \frac{m + 1}{2} \frac{1}{\beta' - 2} \quad (112)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = [m + 2\gamma + 1]^{\frac{1}{2}} \quad (113)$$

$$\alpha_0 = \left(\frac{\lambda}{x} \right) 0.332 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \text{Re}_x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\beta}{\beta_0} = [m + 2\gamma + 1]^{\frac{1}{2}}; \beta_0 = \frac{D}{x} 0.332 Sc^{\frac{1}{2}} Re^{\frac{1}{2}} \quad (114)$$

$$Re_T^{**} = \left[\frac{0.44C}{Pr^{\frac{4}{3}} \nu (m + 2\gamma + 2n + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m+1}{2}}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = (m + 2\gamma + 2n + 1)^{\frac{1}{2}}$$

**Теплообмен при сверхзвуковых скоростях
течения газа**

$$w_{\infty} \geq \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

$$h_0 = h + \frac{w_{\infty}^2}{2}$$

$$T^* = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (115)$$

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)$$

$$\rho C_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho w_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho w_y = 0$$

Граничные условия:

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad T = T_{cm} \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$w_x = w_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty$$

$$\xi = \int_0^x \frac{\rho}{\rho^*} dy; \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho^*} dy$$

$$\xi = \int_0^x \frac{\rho}{\rho_\infty} dy; \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty} dy$$

(116)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (117)$$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial \xi} + \left(w_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho_\infty} w_y \right) \frac{\partial w_x}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial w_x}{\partial \eta} \right) \quad (118)$$

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial(\nu w_y)}{\partial y} = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial w_x}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial w_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho w_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho w_y) = 0$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial \xi} + \frac{\partial W_y}{\partial \eta} = 0$$

где $W_y = \left(w_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho_\infty} w_y \right)$

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial \xi} + W_y \frac{\partial w_x}{\partial \eta} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \left(\frac{\mu \rho}{\mu_\infty \rho_\infty} \frac{\partial w_x}{\partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial \xi} + \frac{\partial W_y}{\partial \eta} = 0 \quad (119)$$

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}; W_y = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \rho}{\mu_\infty \rho_\infty} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (120)$$

Граничные условия:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = w_\infty \quad \text{при} \quad \eta = \infty$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu_\infty w_\infty \xi}{\rho_\infty}} \cdot f(z); \quad z = \eta \sqrt{\frac{\rho_\infty w_\infty}{\mu_\infty \xi}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{\mu_{\infty} w_{\infty} \xi}{\rho_{\infty}}} \cdot f'(z) \sqrt{\frac{w_{\infty} \rho_{\infty}}{\mu_{\infty} \xi}} = \mu_{\infty} f'(z)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_{\infty} w_{\infty}}{\rho_{\infty} \xi}} [f(z) - z f'(z)]$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = w_{\infty} \sqrt{\frac{\rho_{\infty} w_{\infty}}{\mu_{\infty} \xi}} \cdot f''(z)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = -\frac{1}{2} w_{\infty} f''(z) \eta \sqrt{\frac{\rho_{\infty} w_{\infty}}{\mu_{\infty} \xi}}$$

$$\frac{1}{2} f f'' + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w \rho}{\mu_{\infty} \rho_{\infty}} f'' \right) = 0 \quad (121)$$

Граничные условия:

$$f = 0, f' = 0 \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$f' = 1 \quad \text{при} \quad z = \infty$$

$$\begin{aligned}
w_x \frac{\partial T}{\partial \xi} + W_y \frac{\partial T}{\partial \eta} &= \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial w_x}{\partial \eta} \right)^2 \\
\frac{1}{2} f \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\mu \rho}{\mu_\infty \rho_\infty} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\mu \rho}{\mu_\infty \rho_\infty} \frac{w_\infty^2}{c_p} f''^2 &= 0 \\
\frac{\text{Pr}}{2} f \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu \rho}{\mu_\infty \rho_\infty} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \text{Pr}(k-1) M_\infty^2 \frac{\mu \rho}{\mu_\infty \rho_\infty} f''^2 &= 0 \tag{122}
\end{aligned}$$

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^n$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T}$$

$$\mu \rho = \mu_\infty \rho_\infty$$

$$0.5 f f'' + f''' = 0$$

$$\theta'' + 0.5 \text{Pr} f \theta' + 2 \text{Pr} f''^2 = 0$$

(123)

Точные решения уравнения энергии для пограничного слоя сжимаемого газа при $\partial p / \partial x = 0$

Случай теплоизолированной стенки. При обтекании поверхности потоком газа с высокой скоростью вблизи поверхности выделяется значительное количество теплоты за счет действия сил трения. Если поверхность тела адиабатно изолирована, то выделяющаяся теплота может быть отведена от нее только за счет теплопроводности газа. В стационарном состоянии наступает равновесие между выделением и отводом теплоты. Температуру, которую принимает поверхность в этих условиях, называют адиабатной температурой стенки $T_{ст}^*$.

Отношение разности температур $T_{ст}^* - T_\infty$ к разности температур полностью изоэнтропийно заторможенного потока $T_\infty^* - T_\infty$ называется **коэффициентом восстановления**

$$r = (T_{cm}^* - T_\infty) / (T_\infty^* - T_\infty) \quad (124)$$

$$\theta_{ad} = \int_0^z \left\{ \frac{\int_0^z e^{\frac{Pr}{2} \int_0^z f dz} 2 Pr (f'')^2 dz}{\int_0^z e^{\frac{Pr}{2} \int_0^z f dz} f dz} \right\} dz \quad (125)$$

$$\theta_{ad} = r = (T_{cm}^* - T_\infty) / (T_\infty^* - T_\infty)$$

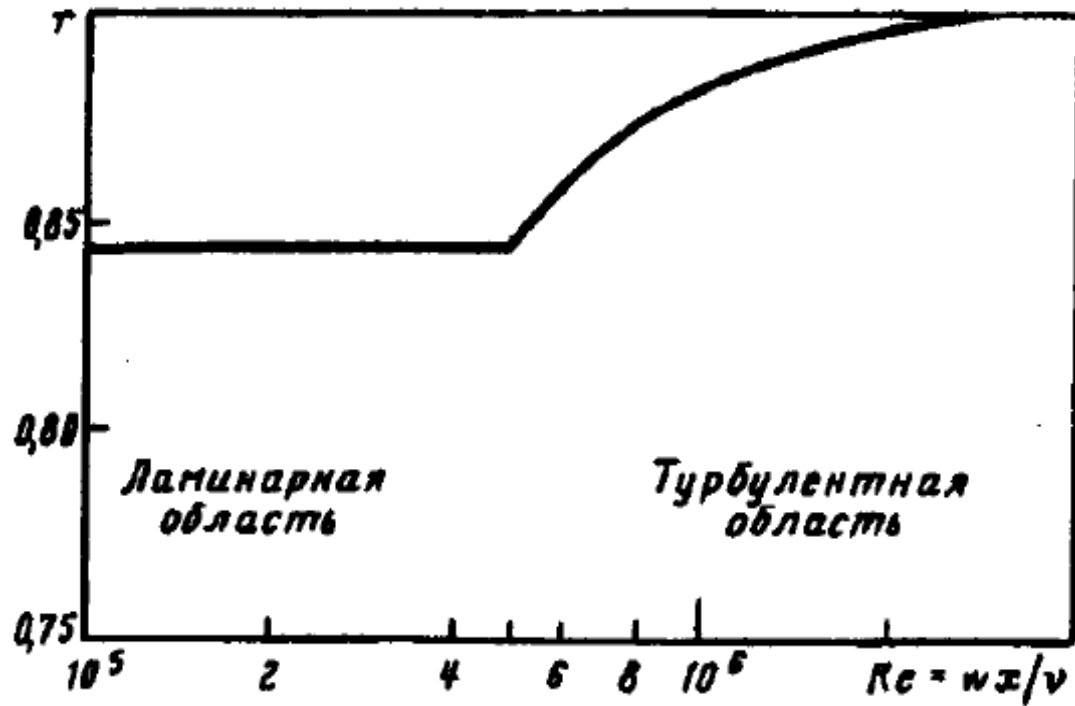


Рис. 10. Коэффициент восстановления γ продольно обтекаемой пластины при $M < 1$ (по Эккерт и Вейзе)

Теплообмен при умеренной скоростях

$$\mathcal{G}'' + \frac{Pr}{2} f \mathcal{G}' = 0$$

$$q_{cm} = - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{cm} = \lambda (T_{cm} - T_{\infty}) \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right|_{cm}$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{cm} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{\rho_\infty w_\infty}{\mu_\infty x}} \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{cm}$$

$$q_{cm} = (T_{cm} - T_\infty) \lambda_{cm} 0.332 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \frac{\rho_{cm}}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{\rho_\infty w_\infty}{\mu_\infty x}}$$

$$Nu_{x_\infty} = \frac{qx}{(T_{cm} - T_\infty) \lambda_\infty} = 0.332 \frac{\rho_{cm} \lambda_{cm}}{\rho_\infty \lambda_\infty} \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_{x_\infty}}$$

$$Nu_{x_\infty} = 0.332 \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_{x_\infty}}$$

Теплообмен при больших скоростях

$$\theta = \theta_{a\partial} + C_1 \vartheta + C_2 \quad (126)$$

Граничные условия:

$$\theta = \theta_{a\partial} \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$\theta = 0 \quad \text{при} \quad z = \infty$$

$$(T_{cm} - T_{\infty}) / \frac{w_{\infty}^2}{2c_p} = \theta_{ad} + C_2 \quad (127)$$

$$T - T_{\infty} = r \left(\frac{k-1}{2} \right) M_{\infty}^2 + (T_{cm} - T_{cm}^*) (1 - \mathcal{G})$$

$$q_{cm} = -\lambda_{cm} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{cm} = \lambda_{cm} (T_{cm} - T_{cm}^*) \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right|_{cm}$$

$$Nu_{x\infty} = \frac{T_{cm} - T_{cm}^*}{T_{cm} - T_{\infty}} 0.332 \sqrt[3]{\text{Pr}} \sqrt{\text{Re}_{x\infty}}$$

$$q_{cm} = \alpha_c (T_{cm} - T_{cm}^*) \quad (128)$$

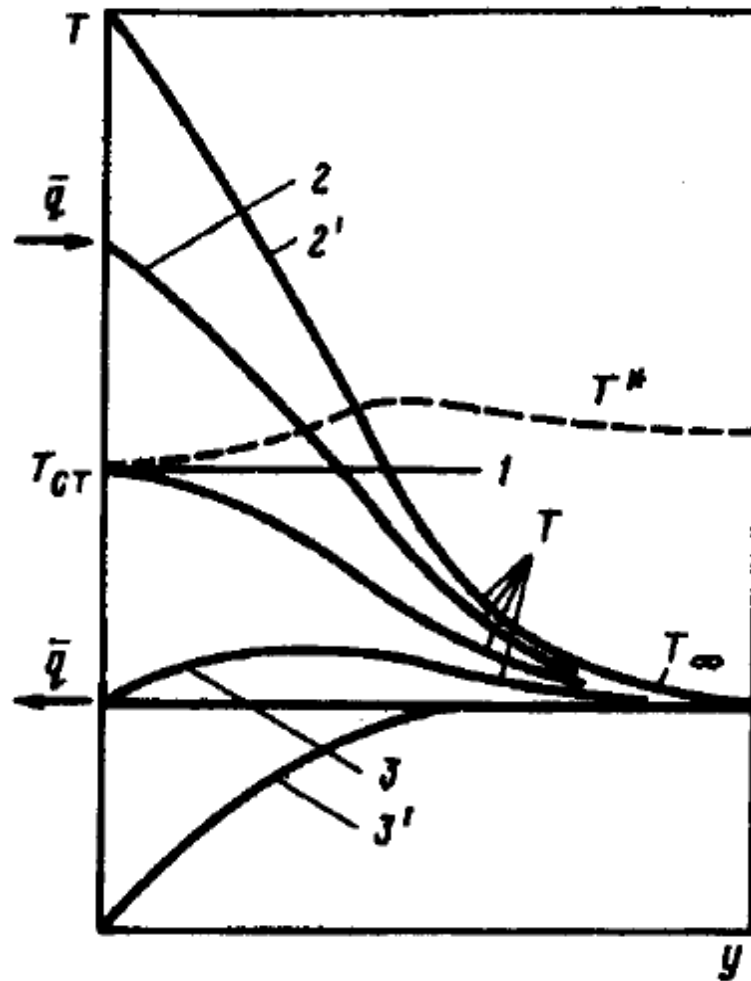
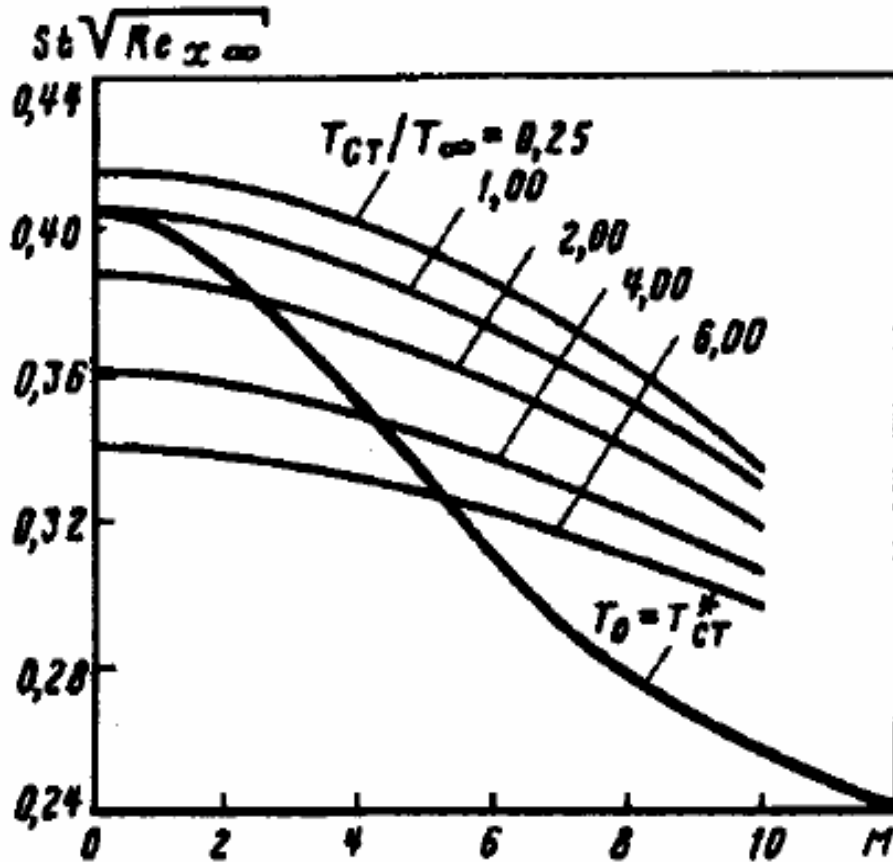


Рис. 11. Кривые распределения температуры в ламинарном пограничном слое на пластине при высоких скоростях потока

Приближенный метод решения с помощью интегрального соотношения энергии



$$\psi_S = (St / St_0)_{Re_x} = \psi^n$$

$$\psi = T_{cm} / T_{\infty} > 1$$

$$n = -0.01 \quad \psi > 1$$

$$n = 0 \quad \psi < 1$$

Рис. 12. Теплообмен при ламинарном высокоскоростном пограничном слое воздуха (по Ван Дриесту)

$$\psi_S = \left(\frac{St}{St_0}\right)_{\text{Re}_x} = \psi^{-0.08} \psi^{*-0.04} \quad (129)$$

$$\psi_S = \left(\frac{St}{St_0}\right)_{\text{Re}_T^{**}} = \psi^{-0.16} \psi^{*-0.08} \quad (130)$$

$$St_0 = \frac{0.22}{\text{Pr}^{\frac{4}{3}} \text{Re}_T^{**} \frac{\mu_{0\infty}}{\mu_\infty}}$$

$$\text{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{0.44}{\text{Pr}^{\frac{4}{3}}} \int_0^X \psi_S \frac{\Delta T^2 \rho_\infty \mu_\infty w_\infty L}{\mu_{0\infty}^2} dX \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\rho_\infty w_\infty L}{\mu_{0\infty}} \frac{\mu_\infty}{\mu_{0\infty}} = \text{Re}_{0\infty} u \frac{\rho_\infty}{\rho_{0\infty}} \frac{\mu_\infty}{\mu_{0\infty}}$$

$$\text{Re}_x^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{0.44}{\text{Pr}^{\frac{4}{3}}} \text{Re}_{0\infty} \int_0^X \psi_S \frac{\mu_\infty}{\mu_{0\infty}} u(1-u^2)^{\frac{1}{k-1}} \Delta T^2 dX \right]^{\frac{1}{2}} \quad (131)$$

$$\Delta T = \left[\frac{q_{cm} L}{0.22 \psi_S \text{Re}_L \text{Pr}_{0\infty}^{\frac{2}{3}} \int_0^X \frac{q_{cm}}{\lambda_{0\infty}^2} dX} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (132)$$

Трение и теплообмен на проницаемой поверхности

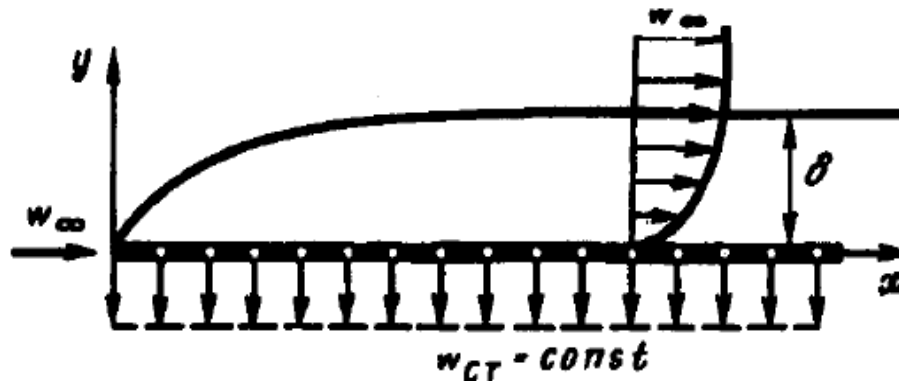


Рис. 13. Продольное обтекание пластины с равномерно распределенным отсасыванием

$$w_{cm} \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$$

$$w_x = w_\infty \left(1 - e^{-\frac{w_{cm} y}{\nu}} \right); w_y = w_{cm} < 0 \quad (133)$$

$$\delta^* = -\frac{\nu}{w_{cm}}; \delta^{**} = -0.5 \frac{\nu}{w_{cm}} \quad (134)$$

$$\tau_{cm} = \mu \left. \frac{\partial w_x}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho(-w_{cm}) w_\infty \quad (135)$$

$$C_f = \frac{2\tau_{cm}}{\rho w_\infty^2} = -\frac{2w_{cm}}{w_\infty}$$

$$\left(-\frac{w_{cm}}{w_\infty} \right)^2 \frac{w_\infty x}{\nu} = 4$$

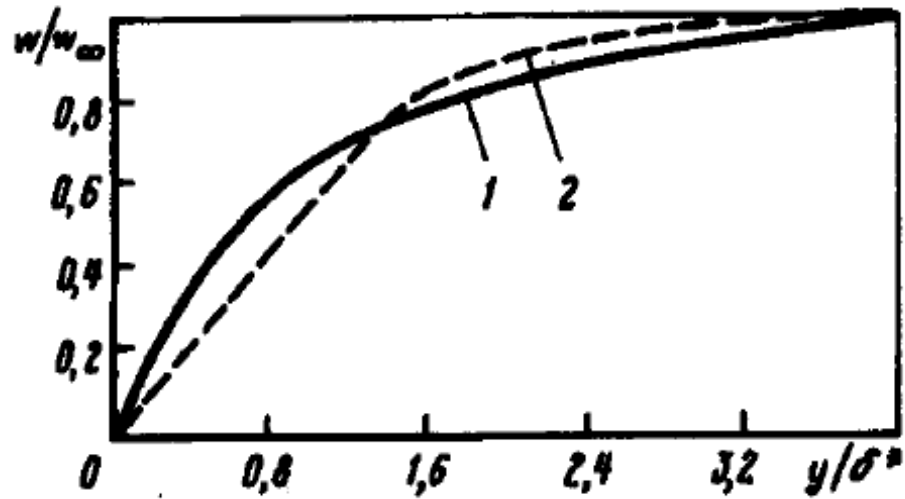


Рис. 14. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине

$$\psi = \left(\frac{C_f}{C_{f0}} \right)_{\text{Re}^{**}} = 2.28 \quad (136)$$

$$\psi_x = \left(\frac{C_f}{C_{f0}} \right)_{\text{Re}_x} = -\frac{w_{cm} \sqrt{\text{Re}_x}}{w_\infty 0.332} = -b_x \quad (137)$$

$$w_{cm} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (138)$$

$$\frac{T - T_{cm}}{T - T_{cm}} = 1 - e^{-\frac{\text{Pr } w_{cm} y}{\nu}} \quad (139)$$

$$St = -\frac{w_{cm}}{w_{\infty}}; \psi_S = \psi = 2.28 \quad (140)$$

$$\psi_S = 1 - 1.28b_1$$

$$w_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \psi = \sqrt{\nu x w_{\infty}} f(\eta); w_{\infty} = Cx^m \quad (141)$$

$$w_y = -f(\eta) \left(\frac{m+1}{2} \right) x^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{C\nu} - Cy \left(\frac{1}{2} \right) f'(\eta) x^{m-1} \quad (142)$$

$$w_{cm} = -f(0) \left(\frac{m+1}{2} \right) x^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{C\nu} \quad (143)$$

$$w_{cm} = - \left(\frac{m+1}{2} \right) f(0) \frac{w_{\infty}}{\sqrt{\frac{w_{\infty} x}{\nu}}} \quad (144)$$

$$f(0) = - \left(\frac{2}{m+1} \right) \frac{w_{cm}}{w_{\infty}} \text{Re}_x^{\frac{1}{2}} \quad (145)$$

$$w_{cm} = x^{\frac{m-1}{2}} \quad (146)$$

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) = 0$$

$$\rho w_x \frac{\partial C_1}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D_{1-2} \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) \quad (147)$$

$$\rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho D_{1-2} (c_{p1} - c_{p2}) \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

Граничные условия:

$$w_x = 0, \quad w_y = w_{cm}, \quad T = T_{cm} \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$w_x = w_\infty, \quad T = T_\infty, \quad C_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = \infty$$

$$\rho_{cm} w_{cm} = C_1 \rho_{cm} w_{cm} - D_{1-2} \rho_{cm} \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} \right)_{cm} \quad (148)$$

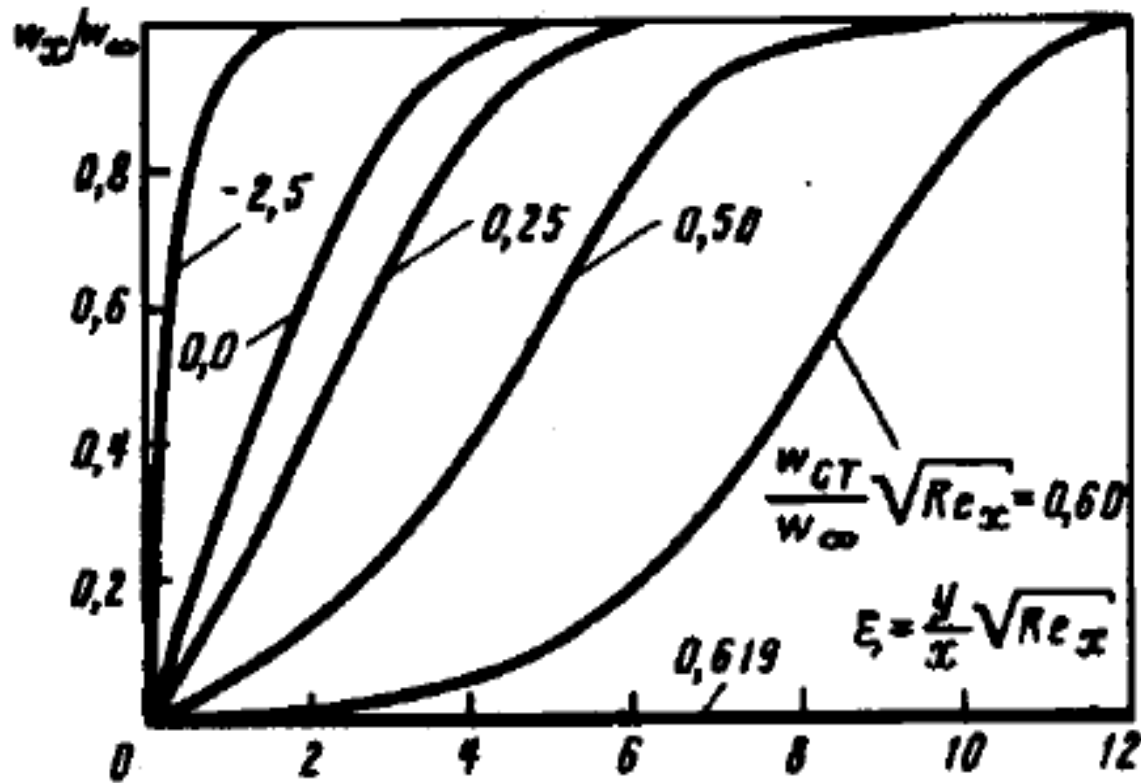


Рис. 15. Развитие безразмерного профиля скорости в ламинарном пограничном слое в зависимости от параметра вдува

$$b_x = \frac{2\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty C_{f0x}} \cong 3 \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty} \sqrt{\text{Re}_x} \quad (149)$$

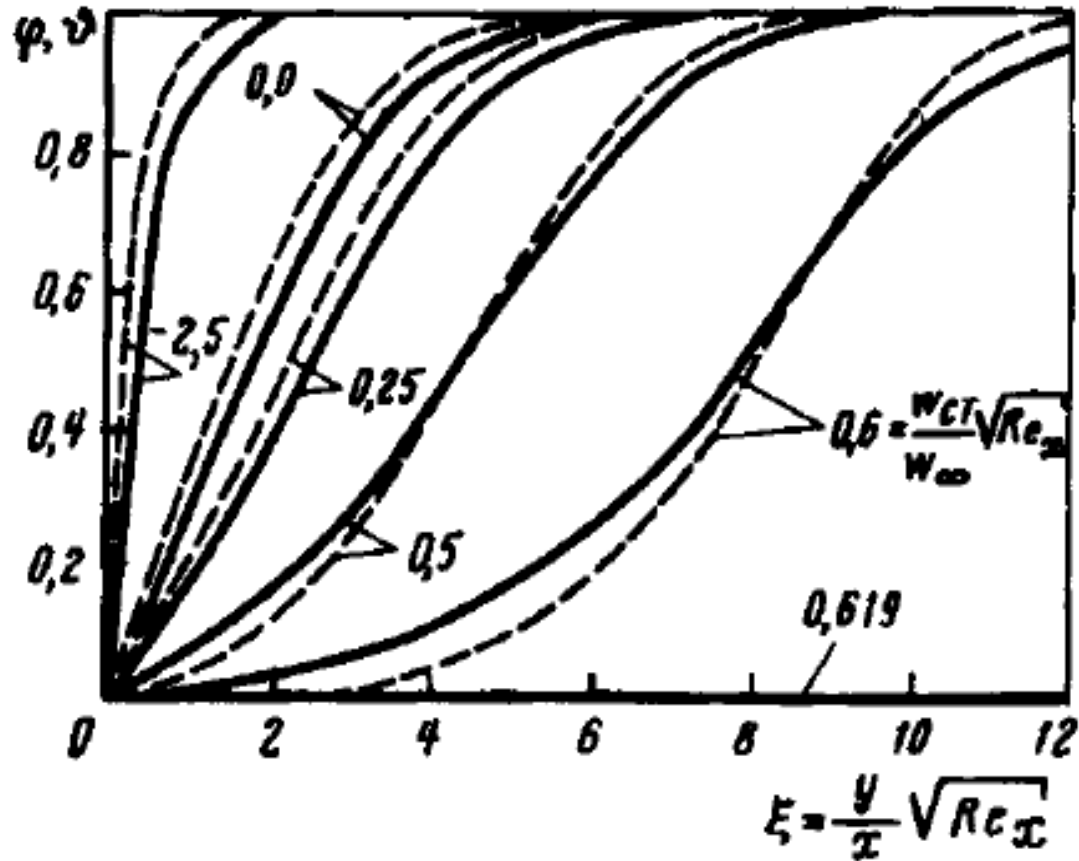


Рис. 16. Безразмерные профили температуры и концентрации в ламинарном пограничном слое для различных параметров вдува и чисел Прандтля и Шмидта

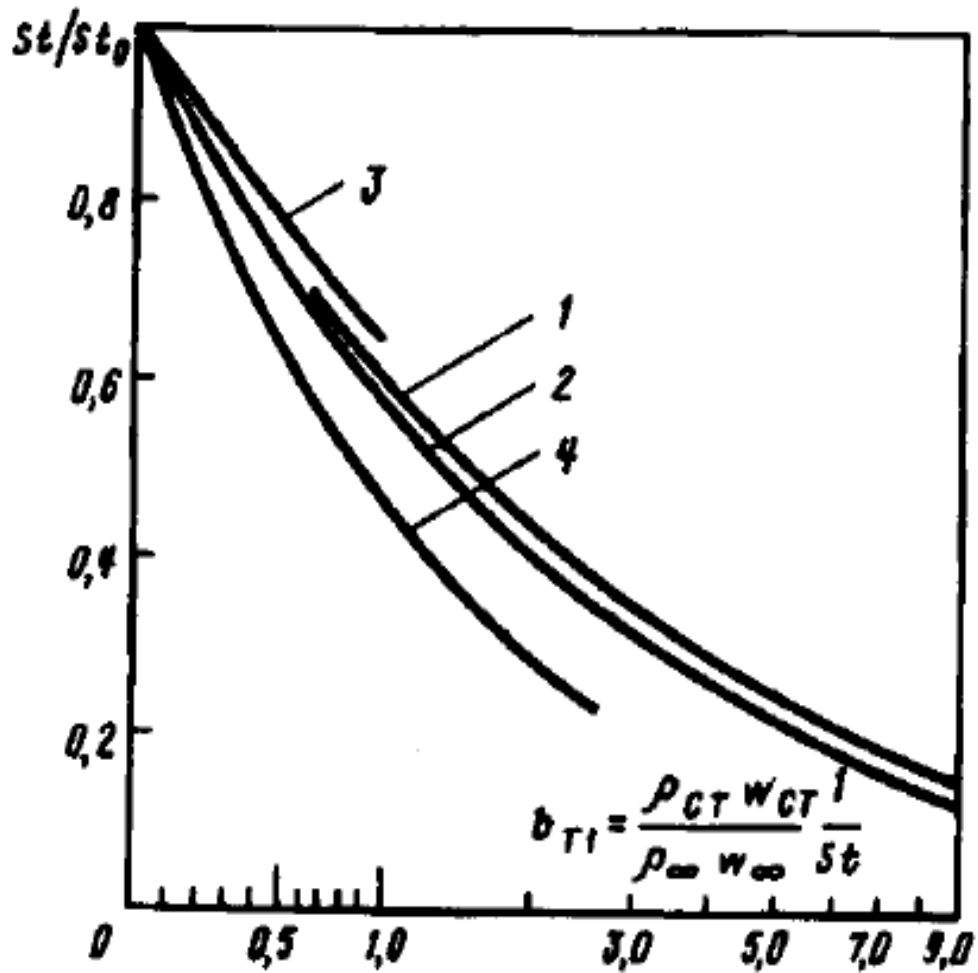


Рис. 17. Теплообмен при ламинарном пограничном слое со вдувом и постоянной скоростью внешнего течения

$$\frac{q_{cm}}{q_{cm0}} = 1 - 1,82\varepsilon^{\frac{1}{3}} \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_{\infty} w_{\infty}} \sqrt{\text{Re}_x}$$

$$T_{onp} = T_{\infty} + 0,5(T_{cm} - T_{\infty}) + 0,22(T_{cm}^* - T_{\infty})$$

$$\psi = \left(\frac{St}{St_0} \right)_{\text{Re}_T^{**}} = (1 - \bar{b}_T)^{\frac{4}{3}} \quad (150)$$

$$\frac{d \text{Re}_T^{**}}{dX} + \frac{d \text{Re}_T^{**}}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dX} = \text{Re}_L St_0 (\psi_S + b_T)$$

$$\text{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{0,44}{\text{Pr}^{\frac{4}{3}}} \text{Re}_{0\infty} \int_0^X w_{\infty} \left[\psi_T (1 - b_T)^{\frac{4}{3}} + b_T \right] \Delta T dX \right] \quad (152)$$

$$j_{cm} = \rho_{cm} w_{cm} = \rho_{\infty} w_{\infty} b_T St_0$$

$$St = \psi_T \left(1 - \overline{b_T}\right) St_0$$

$$T' = T_{cm} - \frac{q_{cm}}{c_p j_{cm}}$$

$$q_{cm} = r j_{cm} \tag{153}$$

$$b_T = \frac{\psi_S}{K}$$

$$q_{cm} = j_{cm} c_{p_{cm}} \Delta T' \tag{154}$$

$$b_T = \frac{\psi_S \Delta T}{\Delta T'}$$

Теплообмен при наличии химических реакций

$$-q = \left[\frac{\lambda}{\bar{c}_p} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} + \sum_i \left(\rho D_i - \frac{\lambda}{\bar{c}_p} \right) \bar{h}_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right] \quad (155)$$

$$-q = \frac{\lambda}{\bar{c}_p} \left[\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} - \sum_i \bar{h}_i \frac{\partial C_i}{\partial y} + \rho \frac{D_i \bar{c}_p}{\lambda} \sum_i \bar{h}_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right]$$

$$Le = \rho \frac{D_i \bar{c}_p}{\lambda}$$

Взаимодействие между потоком и материалом поверхности. При взаимодействии потока газа с выгорающим материалом происходит одновременное протекание химических реакций в газовой фазе и реакций между твердой поверхностью и реагирующим пограничным слоем. Однако, как уже было отмечено, даже в случае тройной аналогии, когда $Le = Pr = Sc = 1$, отсутствует подобие между распределениями концентрации компонентов реагирующей смеси.

$$C_i = \sum_k r_{i,k} C_k \quad (156)$$

$$C_i = 0 = \sum_k r_{i,k} dC \quad (157)$$

Тепловой поток при наличии химических реакций в ламинарном пограничном слое при $Le = 1$. Составим уравнение теплового баланса на реагирующей поверхности (рис. VI.18). Как было показано ранее, к поверхности теплота переносится путем теплопроводности и диффузии:

$$-q_{cm} = \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial \bar{h}_o}{\partial y} + \sum_i \left(\rho D_{1-2} - \frac{\lambda}{c_p} \right) h_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right]_{cm}$$

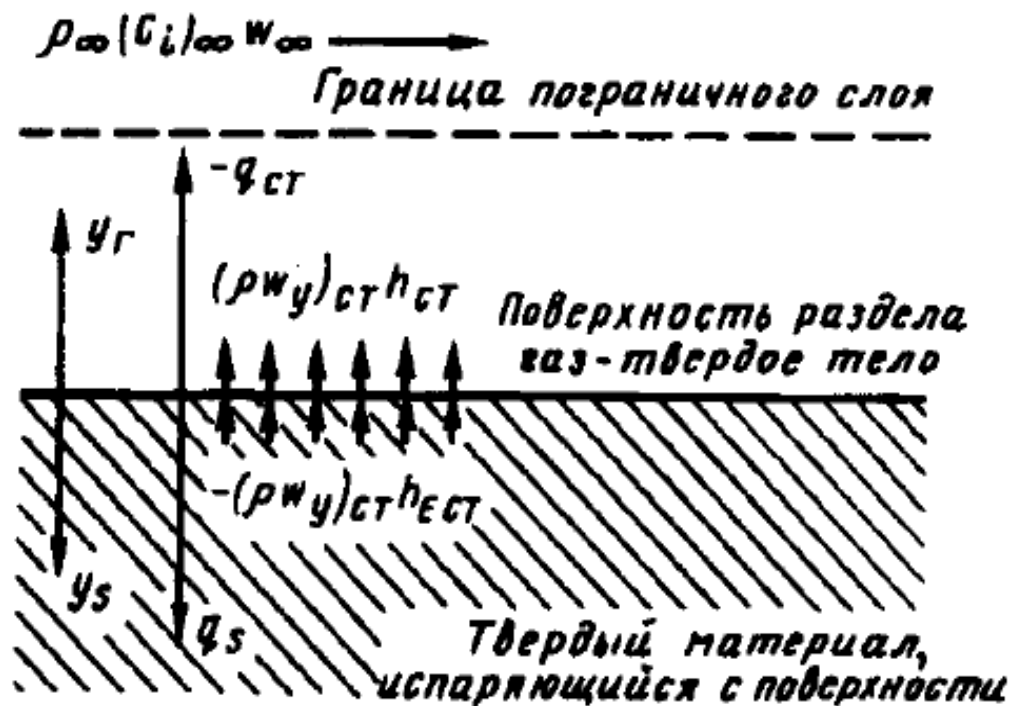


Рис. 18. Схема тепловых потоков на реагирующей поверхности

$$q_S = -q_{cm} - (\rho w_y)_{cm} h_{cm} + (\rho w_y)_{cm} h_{Ecm}$$

$$q_S = \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial \bar{h}_o}{\partial y} + \sum_i \left(\rho D_{1-2} - \frac{\lambda}{c_p} \right) h_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \right]_{cm} - (\rho w_y)_{cm} h_{cm} + (\rho w_y)_{cm} h_{Ecm} \quad (158)$$

$$-q_{cm} = \frac{\lambda}{c_p} \left(\frac{\partial h_o}{\partial y} \right)_{cm} = St \rho_\infty w_\infty \left[(h_{0\infty} - h_{cm}) + \frac{w_\infty^2}{2} \right]$$

$$b_{T_1} = \frac{\rho_{cm} w_{cm}}{\rho_\infty w_\infty St}$$

$$h_{EmB} + h_g = h_{E2aB}$$

$$q_{cm} = \rho_\infty w_\infty St \left[(h_{0\infty} - h_{cm}) + \frac{w_\infty^2}{2} - b_{T_1} h_{cm} + b_{T_1} (h_{E2aB} - h_g) \right] \quad (159)$$

$$(h_{0\infty} - h_{cm}) = \sum_i (C_{i\infty} h_{0\infty} - C_{icm} h_{cm}) = \sum_i C_{i\infty} (h_{0i\infty} - h_{icm}) + \sum_i h_{icm} (C_{i\infty} - C_{icm}) \quad (160)$$

$$q_S = \rho_\infty w_\infty St \left\{ \sum_i C_{i\infty} (h_{0i\infty} - h_{icm}) + \frac{w_\infty^2}{2} + \sum_{i \neq E} h_{icm} \left(C_{i\infty} - (1 + b_{T_1}) C_{icm} + \right) \right. \\ \left. + h_{Tcm} \left[b_{T_1} - (1 + b_{T_1}) C_{icm} \right] - b_{T_1} h_g \right\} \quad (161)$$

$$\frac{C_O - C_{Ocm}}{C_{O\infty} - C_{Ocm}} = \frac{\bar{h}_O - \bar{h}_{cm}}{\bar{h}_{O\infty} - \bar{h}_{cm}} \quad (162)$$

$$\rho_{cm} w_{cm} C_{icm} - \left(\rho D_{1-2} \frac{\partial C_i}{\partial y} \right)_{cm} = 0, i \neq E \quad (163)$$

$$\rho_{cm} w_{cm} = \rho_{cm} w_{cm} C_{Ecm} - \left(\rho D_{1-2} \frac{\partial C_E}{\partial y} \right)_{cm} \quad (164)$$

$$\rho_{cm} w_{cm} C_{icm} = \rho D_{1-2} \frac{(C_O - C_{Ocm})}{(C_{O\infty} - C_{Ocm})} \left(\frac{\partial \bar{h}_O}{\partial y} \right)_{cm}$$

$$\frac{C_{i\infty}}{C_{icm}} = b_{T_1} + 1, i \neq E, \quad (171)$$

$$(C_j + C_{j_2})_{\infty} - (b_{T_1} + 1)(C_j + C_{j_2})_{cm} = (b_{T_1} + 1)(r_{j,E_j} C_j + r_{j,E_{j_2}} C_{j_2})_{cm} \quad (172)$$

$$C_{Ecm} = \frac{b_{T_1}}{b_{T_1} + 1} \quad (173)$$

$$q_S = \rho_{\infty} w_{\infty} St \left\{ \sum_i C_{i\infty} (h_{i\infty} - h_{icm}) + \frac{w_{\infty}^2}{2} + \sum_{j=O,N} \left[C_{j\infty} (b_{T_1} + 1) (r_{j,E_j} C_j + r_{j,E_{j_2}} C_{j_2})_{cm} \right] \Delta Q_{E_j} - \right. \\ \left. - \sum_{j_2=O_2,N_2} \left[C_{j_2\infty} - (b_{T_1} + 1) C_{j_2cm} \right] \Delta Q_{j_2cm} - b_{T_1} h_g \right\} \quad (174)$$

Расчет конвективного теплообмена на химически реагирующей поверхности. При числе $Le = 1$ и независимости переносных свойств от состава смеси тепловой поток мало зависит от того, где расположена зона химических реакций.

$$\frac{dRe_h^{**}}{dX} + Re_h^{**} \left[\frac{1}{\Delta \bar{h}_0} \frac{d\bar{h}_0}{dX} \right] = Re_L St_0 (\psi_S + b_T) \quad (175)$$

$$St = \frac{0.22}{Re_h^{**} Pr^{\frac{3}{4}}} \psi_S \quad (176)$$

$$Re_h^{**} = \frac{1}{\bar{h}_0} \left\{ \frac{0.44}{Pr^{\frac{3}{4}}} Re_{0\infty} \int_0^X u(1-u^2)^{\frac{k-1}{k}} \left[\psi_S (1-\bar{b}_T)^{\frac{4}{3}} + b_T \right] \Delta \bar{h}_0 dX \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (177)$$

$$j_{cm} = (\rho w_y)_{cm} = \rho_\infty w_\infty b_{T_1} St \quad (178)$$

$$q_S = \rho_{cm} w_{cm} \int_{T_H}^{T_{cm}} c_E dT = \rho_{cm} w_{cm} c_E (T_{cm} - T_H) \quad (179)$$

$$b_{T_1} c_E (T_{cm} - T_H) = \Delta h_{\partial\phi} - b_{T_1} h_g \quad (180)$$

$$\Delta h_{\partial\phi} = \sum_i C_{i\infty} (h_{i\infty} - h_{icm}) + \frac{w_\infty^2}{2} + \dots \quad (181)$$

$$T_{cm} = T_H + \frac{\Delta h_{\partial\phi}}{b_{T_1} c_E} - \frac{h_g}{c_E} \quad (182)$$

$$b_{T_1} \left[c_E (T_{cm} - T_H) + h_g \right] = \Delta h_{\partial\phi} \quad (183)$$

Контрольные вопросы

- Особенности течения вязкой жидкости при больших числах Re .
- Дифференциальные уравнения динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев
- Схема пограничного слоя на криволинейной поверхности
- Система уравнений плоского сжимаемого пограничного слоя с учетом диффузии и химических реакций
- Тройная аналогия
- Интегральные соотношения импульсов, энергии и диффузии
- Вынужденная конвекция при ламинарном режиме течения. Теплообмен и массообмен при обтекании пластины потоком несжимаемой жидкости
- Автомодельные решения уравнений динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев
- Теплообмен на криволинейной поверхности
- Теплообмен при сверхзвуковых скоростях течения газа
- Трение и теплообмен на проницаемой поверхности
- Теплообмен при наличии химических реакций