Лекция №29
Истечение из сосуда неограниченного объема

- Основные уравнения
- Параметры торможения
- Адиабатное течение идеального газа в каналах
- Движение газа при наличии теплообмена с внешней средой
- Движение газа при наличии трения
- Истечение реальных газов и паров
- Процессы в эжекторах

1. Основные уравнения

$$-vdp = wdw + gdy + dl_T + dl_{TP} \qquad (1)$$

С этой целью предварительно рассмотрим уравнение состояния среды в виде функциональной зависимости $p = \varphi(\rho, s)$, дифференцирование которой приводит к

$$dp = (\partial p/\partial \rho)_S \, d\rho + (\partial p/\partial s)_\rho \, ds \qquad (2)$$

$$(\partial p/\partial s)_\rho = -(\partial p/\partial \rho)_s (\partial \rho/\partial s)_p$$

$$(\partial \rho/\partial s)_p = (\partial \rho/\partial T)_p (\partial T/\partial s)_p = (\partial \rho/\partial T)_p \, T/c_p$$

$$(\partial p/\partial s)_\rho = -(T/c_p)(\partial \rho/\partial T)_p (\partial p/\partial \rho)_s$$

Скорость перемещения фронта слабого возмущения есть скорость звука в среде.

Фронт возмущения перемещается в среде со скоростью a, в то время как скорость перемещения фронта возмущения относительно поршня определяется разностью a-dw.

Масса среды, захваченная фронтом распространения возмущения, за время dτ:

$$dG = \rho f a d\tau$$

Эта же масса, попадая в область между поршнем и фронтом возмущения, приобретает параметры возмущенной среды $(p + dp; \rho + d\rho)$ и может быть выражена

$$dG = (\rho + d\rho) f (a - dw) d\tau$$

Вследствие свойства неразрывности сплошной среды

$$a d\rho = \rho dw$$

Изменение количества движения массы dG составит $dGdw = dw\rho f a d\tau$, а импульс силы, действующей на эту массу $fdpd\tau$.

$$dp = \rho a dw$$

Формула для скорости звука: $a = \sqrt{dp/d\rho}$

Учитывая это, следует записать $a^2 = \left(\partial p/\partial \rho\right)_S$

$$dp = a^2\left[d\rho - T\left(\partial \rho/\partial T\right)_p ds/c_p\right] \qquad (3)$$

Расход газа $G = f\rho w$, при постоянстве $dG = d(\rho f w) = 0$. Если принять, что величины f, ρ, w переменны по длине канала, то, дифференцируя выражение для dG

$$d\rho = -\rho\left(df/f + dw/w\right) \qquad (4)$$

Дифференциал энтропии можно представить в виде суммы

$$ds = \left(dq_{BH} + dq_{TP}\right)/T \qquad (5)$$

dq_{BH} - теплота за счет внешнего теплообмена; dq_{TP} - теплота трения.

$$a^2\left[\rho\left(\frac{df}{f} + \frac{dw}{w}\right) + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \frac{dq_{BH} + dq_{TP}}{c_p}\right] = \rho w dw + \rho g dy + \rho dl_T + \rho dl_{TP}$$

$$\left(M^2-1\right)\frac{dw}{w}=\frac{df}{f}-g\frac{dy}{a^2}-\frac{dl_T}{a^2}-\frac{dl_{TP}}{a^2}+\frac{dq_{BH}}{\rho c_P}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_\rho+\left(\frac{dq_{TP}}{\rho c_P}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right) \quad (6)$$

Уравнение называется уравнением обращения воздействий. Левая часть уравнения определяет основные показатели потока (число Маха, изменение скорости течения). В его правой части представлены члены, отражающие различные воздействия на течение среды: изменение поперечного сечения потока, высоты, свершения технической работы, работы трения, теплообмена с внешней средой.

$$dh=-wdw \quad (7)$$

$$h_1-h_2=\left(w_2^2-w_1^2\right)/2 \quad (8)$$

$$w=\sqrt{2\left(h_1-h_2\right)+w_1^{\,2}} \quad (9)$$

$$w=\sqrt{2\left(h_1-h_2\right)} \quad (10)$$

$$wdw=-vdp \quad (11)$$

$$w_2^2/2-w_1^2/2=-\int_{p_1}^{p_2}vdp \qquad w_2=\sqrt{2\int_{p_2}^{p_1}vdp+w_1^2} \quad (12)$$

Сопоставление (7) и (11) показывает, что dh=vdp

$$h_1 - h_2 = \int_{p_1}^{p_2} v dp \tag{13}$$

Если движущая среда является является несжимаемой жидкостью, для которой dv=0, то при адиабатном течении внутренняя энергия потока не изменяется (dU=0).

$$p_1 + \rho w_1^2 / 2 = p_2 + \rho w_2^2 / 2 \tag{14}$$

где $\rho w^2 / 2$ - динамический напор, p - статическое давление, ρ - плотность несжимаемой среды.

2. Параметры торможения

$$h_1 + w_1^2/2 = h_2 + w_2^2/2 = const \tag{15}$$

При полностью заторможенном потоке энтальпия достигает своего максимального значения, называемого энтальпией адиабатного торможения или полной энтальпией

$$h^* = h + w^2/2 \tag{16}$$

$$T^* = T + w^2/2c_P \tag{17}$$

T^* - температура адиабатного торможения, T - термодинамическая температура (температура движущейся среды).

$$a = \sqrt{kpv} = \sqrt{kRT} \tag{18}$$

$$T^* = T\left[1 + (k-1)M^2/2\right] \tag{19}$$

Полное давление

$$p^* = p\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}, \tag{20}$$

$$\rho^* = \rho\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/(k-1)}. \tag{21}$$

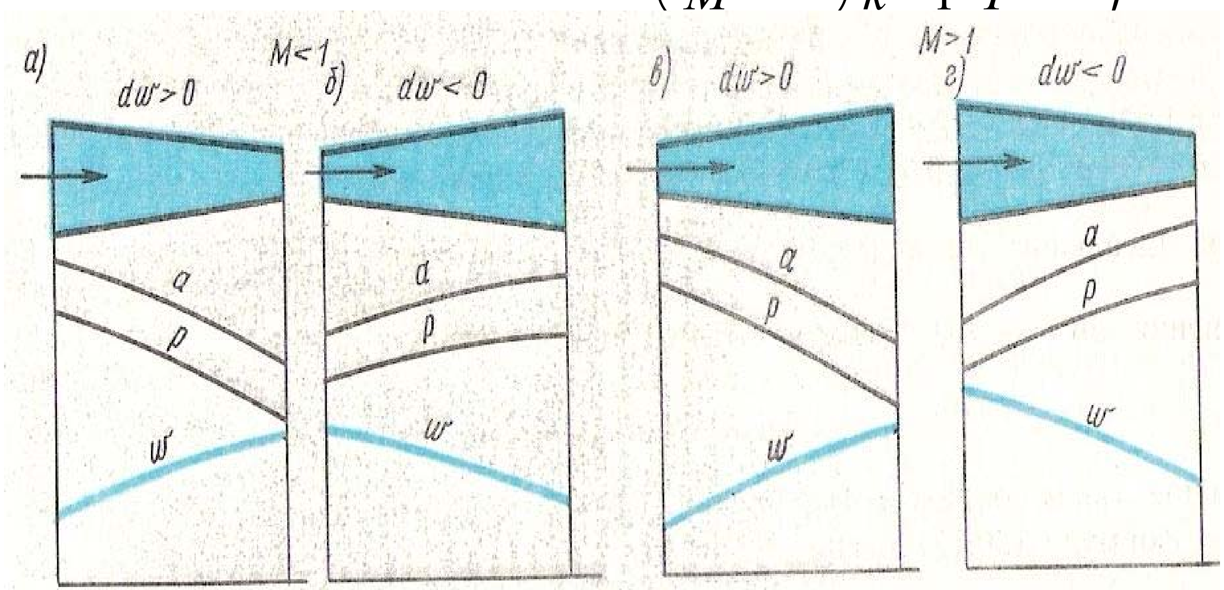
3. Адиабатное течение идеального газа в каналах

Каналы, в которых движущийся газ увеличивает скорость с одновременным уменьшением давления, называются ***соплами,*** каналы, в которых скорость газа уменьшается, а давление возрастает, называются ***диффузорами.***

$$\left(M^2-1\right)\frac{dw}{w}=\frac{df}{f} \quad (22)$$

$$\left(\frac{1}{M^2}-1\right)\frac{d\rho}{\rho}=\frac{df}{f} \quad (23)$$

$$\left(\frac{1}{M^2}-1\right)\frac{1}{k-1}\frac{dT}{T}=\frac{df}{f} \quad (24)$$



Ускоренное движение

$M < 1,\ df < 0$

$M = 1,\ df = 0$

$M > 1,\ df > 0$

Замедленное (dw < 0)

$M < 1,\ df > 0$

$M = 1,\ df = 0$

$M > 1,\ df < 0$

Рис. 1. Изменение параметров потока в суживающихся и расширяющихся каналах

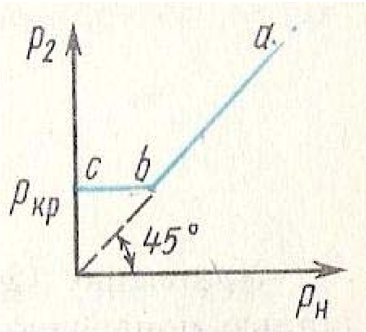


Рис. 2. Зависимость давления в выходном сечении суживающегося сопла от внешнего давления

$$w_2 = \sqrt{\left[2kp_1 v_1 / (k-1)\right]\left[1 - (p_2/p_1)^{(k-1)/k}\right] + w_1^2} \tag{25}$$

$$w = \sqrt{\left[2kp_1 v_1 / (k-1)\right]\left[1 - (p_2/p_1)^{(k-1)/k}\right]} \tag{26}$$

$$w_{кр} = a = \sqrt{2kRT} = \sqrt{2kRT_1/(k+1)} \tag{27}$$

$$w_{кр} = \sqrt{2kp_1 v_1/(k+1)} \tag{28}$$

$$\beta_{KP} = \left[2/(k+1)\right]^{k/(k-1)}$$ - перепад давления (29)

$$G = f_C w/v \tag{30}$$

$$G = f_C \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{v_1}\right)\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(k+1)k}\right]} \tag{31}$$

$$G_{KP} = f_{KP} \sqrt{\frac{2k}{k+1}\frac{p_1}{v_1}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{2/(k-1)}} \tag{32}$$

- при истечении идеального газа через суживающееся сопло из емкости неограниченных объемов расчет скорости истечения и расхода следует вести по формулам (26) и (31) при условии $\beta > \beta_{KP}$ и по формулам (28) и (32) при $\beta \leq \beta_{KP}$.

$$\mathrm{f}_{\text{ВЫХ}} = \mathrm{G}_{\text{КР}} \mathrm{v}_{\text{ВЫХ}} / \mathrm{w}_{\text{ВЫХ}}$$

4. Движение газа при наличии теплообмена с внешней средой

$$\left(M^2-1\right)\frac{dw}{w}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\frac{dq_{ВН}}{\rho c_p} \qquad (33)$$

Подвод теплоты к потоку газа позволяет создать так называемое тепловое сопло, в котором принципиально возможен непрерывный переход от дозвукового движения газа к сверхзвуковому за счет изменения знака теплового воздействия (подвод заменяется отводом теплоты при М=1).

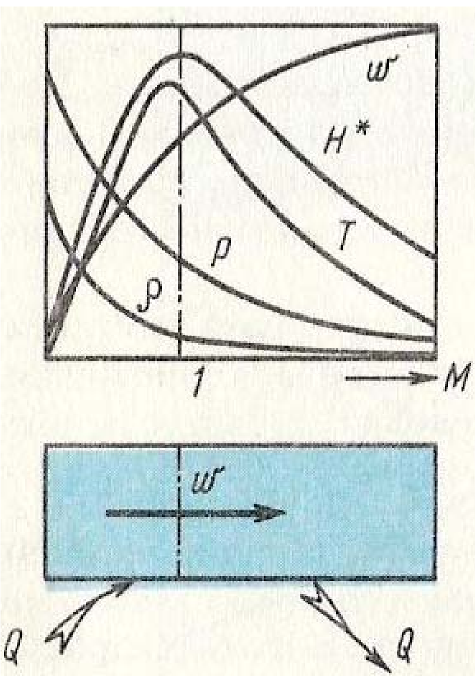


Рис. 3. Схема теплового сопла

$$\left.\begin{aligned}
\left(M^2-1\right)\frac{dp}{p}&=-\frac{w^2}{pc_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p dq_{ВН}\\
\left(M^2-1\right)\frac{d\rho}{\rho}&=-\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\frac{dq_{ВН}}{pc_p}\\
\left(M^2-1\right)\frac{dT}{T}&=M^2\left(1-\frac{c_v}{M^2c_p}\right)\frac{dq_{ВН}}{c_vT}
\end{aligned}\right] \qquad (34)$$

$$\left(M^2-1\right)\frac{dw}{w}=-c_{П}\frac{dT}{Tc_p}$$

5. Движение газа при наличии трения

В случае движения идеального газа уравнения обращения воздействия (6) и (34) примут вид

$$\left(M^2-1\right)dw/w=-k\,dl_{TP}/a^2 \qquad (35)$$

$$\left(M^2-1\right)dp/p=k\left[M^2(k-1)+1\right]dl_{TP}/a^2 \qquad (36)$$

$$\left(M^2-1\right)d\rho/\rho=k\,dl_{TP}/a^2 \qquad (37)$$

$$\left(M^2-1\right)dT/T=kM(k-1)\,dl_{TP}/a^2 \qquad (38)$$

Направления изменений иллюстрируются неравенствами

если $M<1$, то $dw>0,\ dp<0,\ d\rho<0$

если $M>1$, то $dw<0,\ dp>0,\ d\rho>0$

Так как $dq_{BH}=0$, то $T_1^*=T_2^*$

$$\frac{T_2}{T_1}=\left(1+\frac{(k-1)}{2}M_1^2\right)\Big/\left(1+\frac{(k-1)}{2}M_2^2\right) \qquad (39)$$

Отношение скорости w движения потока к критической скорости w_{KP} называется коэффициентом скорости $\lambda=w/w_{KP}$

$$\lambda=\frac{k+1}{2}M^2\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)$$

Отношение скоростей в двух сечениях канала

$$\frac{w_2}{w_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{M_2}{M_1}\sqrt{\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)} \qquad (40)$$

Из условия постоянства плотности потока $j=\rho_1 w_1=\rho_2 w_2$ можно получить ***отношение плотностей*** рабочего тела в виде

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{M_1}{M_2}\sqrt{\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)} \qquad (41)$$

Так как при j=const отношение $M_2/M_1=w_2p_1/(w_1p_2)$, то ***отношение давлений*** в двух выбранных сечениях определится выражением

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{M_1}{M_2}\sqrt{\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)} \qquad (42)$$

А для параметров торможения

$$\frac{p_2^*}{p_1^*}=\frac{p_2}{p_1}\left[\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)\right]^{k/(k-1)} \qquad (43)$$

При T^*=const

$$p_2^*/p_1^*=\rho_2^*/\rho_1^* \qquad (44)$$

$$\frac{p_2^*}{p_1^*}=\frac{M_1}{M_2}\left[\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)\Big/\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)\right]^{(k+1)/[2(k-1)]} \qquad (45)$$

Для оценки длины трубы

$$dl_{TP} = \left(\xi w^2/2\right)\left(dx/D\right) \tag{46}$$

ξ - коэффициент гидравлического сопротивления, D - диаметр трубы.

$$\left(M^2 - 1\right)dw/w = -k\xi w^2 dx/\left(2a^2 D\right) \tag{47}$$

Так как

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\lambda}{\lambda}; \qquad M^2 = \frac{2}{k+1}\lambda^2 \Bigg/ \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)$$

То

$$\left(\lambda^{-2} - 1\right)d\lambda/\lambda = \left[k/(k+1)\right]\xi\, dx/D \tag{48}$$

$$\lambda_{BX}^{-2} - \lambda^{-2} + \ln\left(\lambda_{BX}^2/\lambda^2\right) = \left[2k/(k+1)\right]\xi_{cp}x/D \tag{49}$$

$$\left(\lambda_{BX}^{-2} + \ln\lambda_{BX}^2\right) - \left(\lambda^{-2} + \ln\lambda^2\right) = x \tag{50}$$

При $\lambda = 1$

$$\chi_{\max} = \lambda_{BX}^{-2} + \ln\lambda_{BX}^2 - 1 \tag{51}$$

$$\left(M^2 - 1\right)dw/w = -dl_T/a^2 \tag{52}$$

- совершение технической работы $dl_T > 0$ дозвуковым потоком (M<1) приводит к ускорению потока. Для сверхзвукового потока результат противоположный.

6. Истечение реальных газов и паров

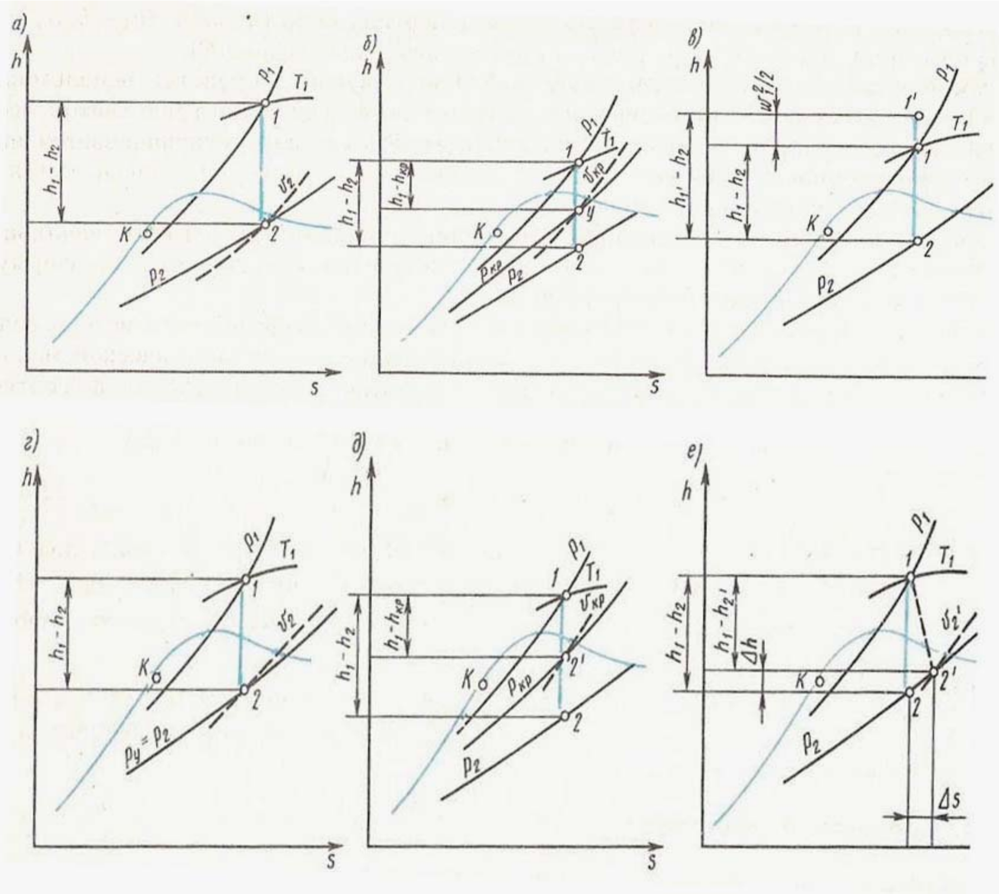


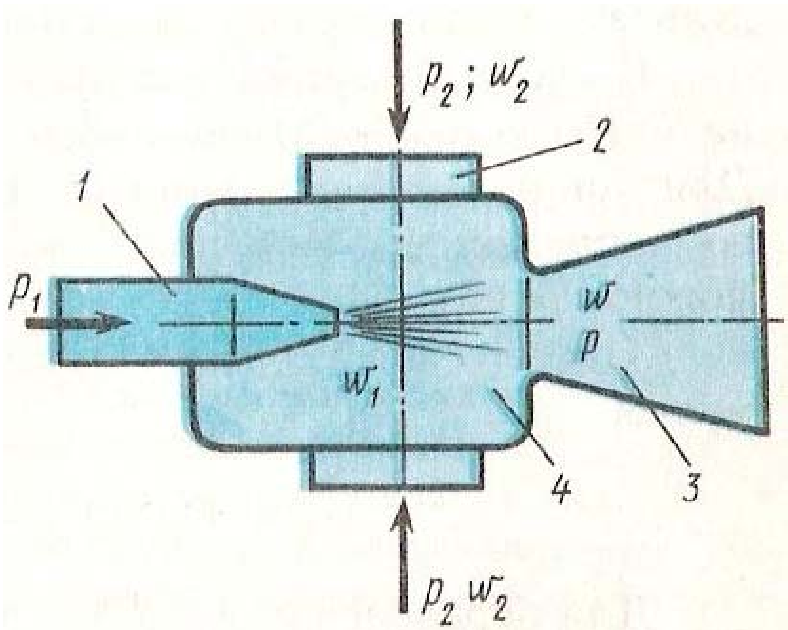
Рис. 4. Адиабатическое истечение пара

$$\Delta h_{TP} = h_{2'} - h_2 = w^2 \left(1 - \varphi_c^2\right) / 2 \qquad (53)$$

Потеря энтальпии за счет трения - учитывается с помощью коэффициента потерь сопла. 1-2’ – необратимая адиабата. 2’ - состояние пара на срезе сопла при наличии трения.

7. Процессы в эжекторах

Эжекторами называют аппараты, предназначенные для получения газа или пара повышенного давления путём смешения двух потоков.



1, 2 - патрубок;

3 - диффузор;

4 - камера смешения.

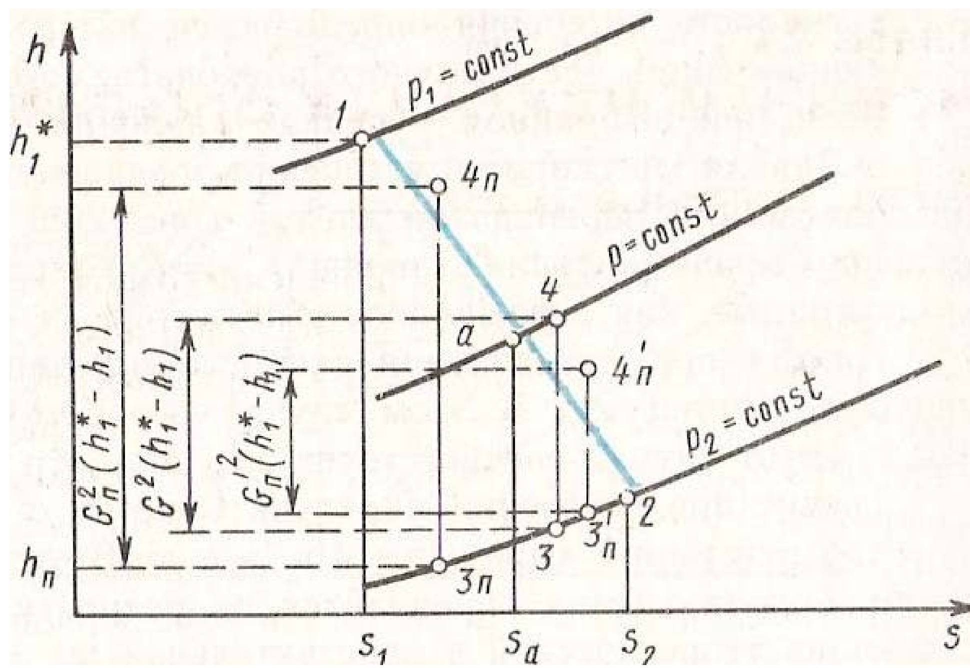


Рис. 6. Процесс эжектора на *sh*–диаграмме

$$h_1^* - h_1 = w_1^2/2$$

$$h^* - h = w^2/2$$

$$h^* = Gh_1^* + (1 - G)h_2^*$$

$$h^* = h + G^2\, w_1^2/2 = h + G^2\left(h_1^* - h_1\right)$$

Контрольные вопросы

- Основные уравнения
- Параметры торможения
- Адиабатное течение идеального газа в каналах
- Движение газа при наличии теплообмена с внешней средой
- Движение газа при наличии трения
- Истечение реальных газов и паров
- Процессы в эжекторах