

1й курс. 2й семестр.

Задачи домашнего задания по курсу физики.

Раздел «Механика»

Электронный вариант на сайте кафедры fn.bmstu.ru

Предисловие

Домашнее задание и методические указания к нему посвящены изучению основных разделов механики, усвоение которых абсолютно необходимо для изучения всех остальных разделов курса общей физики. Выполнение задания должно способствовать выработке у студентов устойчивых навыков в решении многоходовых физических задач и более глубокому усвоению и пониманию основных физических законов.

Задачи необходимо решать в общем аналитическом виде, используя общеизвестные стандартные математические преобразования. В результате таких действий студент получает соответствующую формулу для искомой физической величины, а затем подставляет численные значения исходных величин и получает итоговый численный результат. Например, круговая частота собственных незатухающих колебаний пружинного маятника рассчитывается по формуле $\omega = \sqrt{k/m}$, где $k = 10$ Н/м, $m = 0,1$ кг, тогда $\omega = \sqrt{10/0,1}$ 1/с.

Требования к оформлению домашнего задания

Решение каждой задачи выполняется на отдельных листах. На лицевой стороне первого листа должно быть написано:

Домашнее задание по курсу общей физики

1-й курс (2 –й семестр)

Группа Фамилия, инициалы

Вариант № Задача №

На первой странице следует написать условия задачи с исходными данными соответствующего варианта, изобразить заданный рисунок исходной задачи. Далее излагается решение задачи. Все вводимые студентом новые параметры и обозначения физических и геометрических величин обязательно следует сопровождать соответствующими пояснениями. При решении задачи необходимо ссылаться на используемые физические законы. Например: «...согласно закону сохранения импульса имеем ...», или «... в соответствии с законом сохранения энергии сле-

дует написать ...». Уравнения, математические выражения и формулы нужно выделять отдельной строкой и обязательно нумеровать. Это позволяет при преобразованиях делать ссылку на эти номера. Например: «... подставим зависимость (4) в уравнение (7) ...». Такое изложение хода решения задачи позволяет преподавателю проверить правильность предлагаемого решения и указать на конкретную ошибку, если она имеется. Целесообразно решение задачи сопровождать пояснительными рисунками, которые показывали бы исследуемую систему в ее движении, развитии.

Домашнее задание состоит из четырех задач.

Первая задача посвящена динамике материальной точки, решается с использованием закона сохранения импульса (ЗСИ) и закона сохранения энергии (ЗСЭ) и имеет три типа различных независимых условий.

Вторая задача относится к динамике вращательного движения твердого тела, решается с использованием закона сохранения момента импульса (ЗСМИ) и ЗСЭ и имеет четыре типа различных независимых условий.

Третья задача посвящена колебаниям, решается с применением уравнений динамики или закона сохранения механической энергии и имеет пять типов различных независимых условий.

Четвертая задача относится к волновым процессам, решается методом суперпозиции (наложения) волн и имеет четыре типа различных независимых условий.

Исходные данные каждого конкретного варианта домашнего задания сведены в соответствующие таблицы. При этом в таблицах крестиками отмечены предполагаемый характер взаимодействия частей рассматриваемой механической системы, а также те физические величины, значения которых требуется определить при решении задач.

Динамика материальной точки

Задача 1-1 для вариантов с 1 по 10

Две гладкие частицы сферической формы с массами m_1 и m_2 , движущиеся со скоростями $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$, сталкиваются под углом β , как указано на рис.1. Расстояние до места встречи и скорости частиц соответствуют условиям соударения (отсутствию промаха).

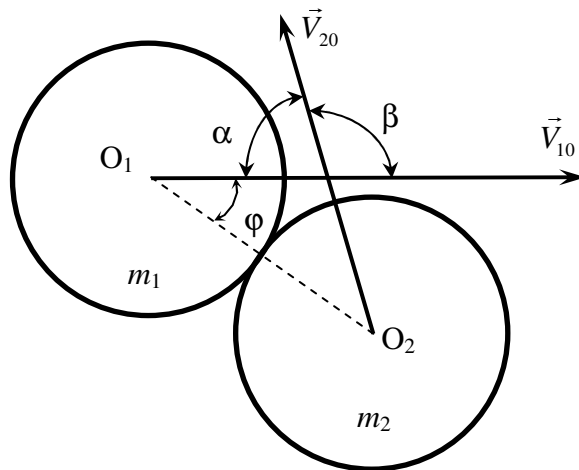


Рис. 1

На рис.1:

β - угол встречи, т.е. угол, образованный векторами $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$;

$\alpha = (\pi - \beta)$ - дополнительный угол;

φ - угол между линией удара O_1O_2 и вектором $\vec{V}_{10}$.

Другие обозначения:

$\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ - скорости соответственно 1-ой и 2-ой частицы после удара.

$\vec{U}$ - совместная скорость частиц после абсолютно неупругого удара.

θ - угол отклонения частицы после удара, т.е. угол, образованный векторами $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_1$ или $\vec{V}_{10}$ и $\vec{U}$.

γ - угол разлета частиц после удара, т.е. угол, образованный векторами $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$.

$\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ - импульсы соответственно 1-ой и 2-ой частицы после удара.

E_1, E_2 - кинетические энергии соответственно 1-ой и 2-ой частицы после удара.

ΔE - изменение кинетической энергии механической системы, состоящей из двух частиц за время удара.

Виды взаимодействия:

- а) абсолютно упругий удар (АУУ);
- б) неупругий удар (НУУ);
- в) абсолютно неупругий удар (АНУУ).

Общие исходные данные: $m^* = 10^{-3}$ кг, $V^* = 10$ м/с, $\alpha^* = \pi/2$.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задачи представлены в таблице № 1

Таблица №1

№ вар	Исходные данные к задаче 1-1						
	m_1	m_2	V_{10}	V_{20}	α	φ	θ
1	$2m^*$	m^*	V^*	0	-	$1/3\alpha^*$	-
2	m^*	$1/2m^*$	$2V^*$	0	-	$2/3\alpha^*$	-
3	$3m^*$	$2m^*$	$1/2V^*$	0	-	$1/2\alpha^*$	-
4	$3/2m^*$	$1/2m^*$	$3V^*$	0	-	$2/3\alpha^*$	-
5	$2m^*$	m^*	V^*	$2V^*$	$2/3\alpha^*$	-	-
6	$3m^*$	$2m^*$	$2V^*$	V^*	$1/2\alpha^*$	-	-
7	m^*	$2m^*$	V^*	0	-	$1/3\alpha^*$	$1/4\alpha^*$
8	$2m^*$	$3m^*$	$2V^*$	0	-	$1/2\alpha^*$	$1/3\alpha^*$
9	m^*	m^*	V^*	V^*	$1/2\alpha^*$	$1/2\alpha^*$	-
10	$2m^*$	$2m^*$	$2V^*$	$2V^*$	$2/3\alpha^*$	$2/3\alpha^*$	-

Таблица №1 (продолжение)

№ вар	Вид взаимодействия			Определить									
	АУУ	НУУ	АНУУ	V_1	V_2	γ	E_1	E_2	θ	p_1	p_2	ΔE	U
1	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
2	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-
3	+	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-
5	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+
6	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+
7	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-
8	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-

№ вар	Вид взаимодействия			Определить									
	АУУ	НУУ	АНУУ	V_1	V_2	γ	E_1	E_2	θ	p_1	p_2	ΔE	U
9	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
10	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-

Основные зависимости в задаче 1-1

Во всех процессах, связанных с ударным взаимодействием частиц, следует считать время удара пренебрежимо малой величиной, т.е. за время удара координаты местоположения и ориентация частиц практически не изменяются.

При соударении двух частиц выполняются законы сохранения импульса и энергии. ЗСИ и ЗСЭ для данной задачи в общем случае имеют вид

$$m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20} = \begin{cases} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 & \text{при АУУ и НУУ} \\ (m_1 + m_2) \vec{U} & \text{при АНУУ} \end{cases}$$

$$\frac{m_1 V_{10}^2}{2} + \frac{m_2 V_{20}^2}{2} = \begin{cases} \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} & \text{при АУУ} \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + |\Delta E| & \text{при НУУ} \\ \frac{(m_1 + m_2) U^2}{2} + |\Delta E| & \text{при АНУУ} \end{cases}$$

Образец оформления решения задачи 1-1.

Два одинаковых, абсолютно гладких шара движутся навстречу друг другу со скоростями $V_{10}=4 \cdot V$ и $V_{20}=V$. При этом векторы скоростей направлены по касательным к поверхностям противоположных шаров (см. рис.2). Определить под каким углом δ к первоначальному направлению движения будет двигаться правый шар после соударения если удар шаров является абсолютно упругим.

Дано

$$V_{10}=4 \cdot V$$

$$V_{20}=V$$

$$m_1=m_2=m$$

$$\delta=?$$

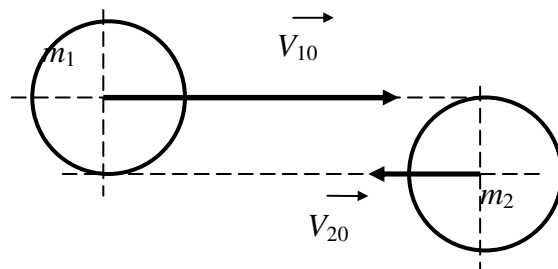


Рис.2

Решение

На рис.3 приведена векторная диаграмма соударения шаров, а на рис.4 изображено рас-
положение шаров в момент удара.

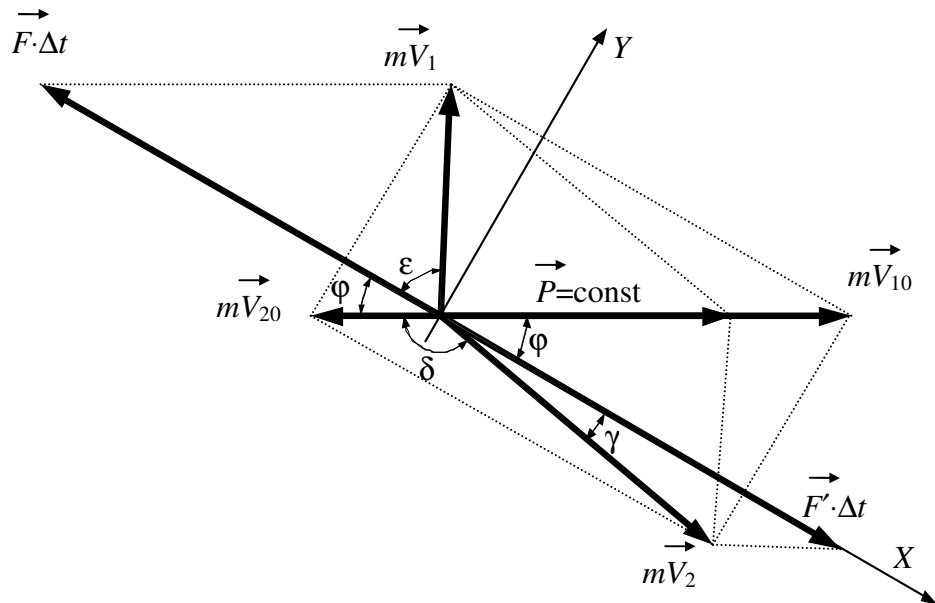


Рис. 3

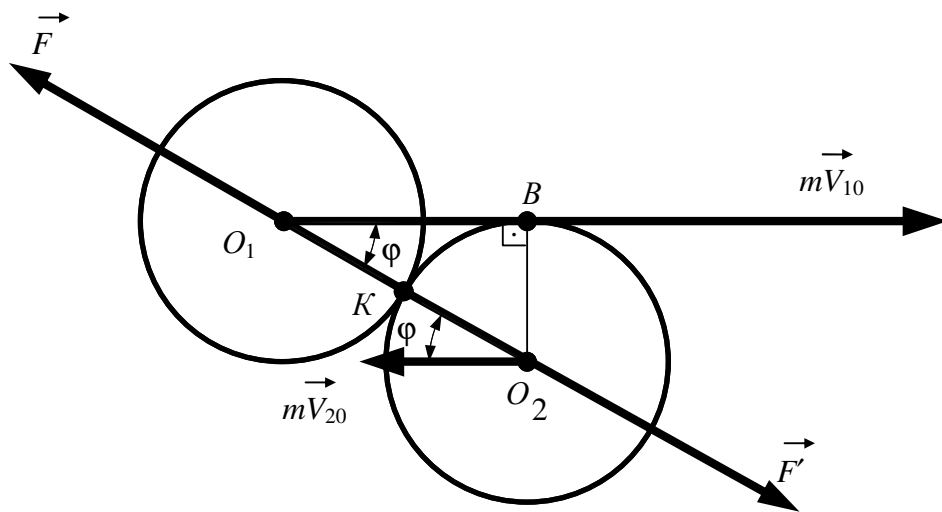


Рис.4

При упругом ударе шаров выполняется закон сохранения механической энергии (ЗСМЭ)

$$\frac{m \cdot V_{10}^2}{2} + \frac{m \cdot V_{20}^2}{2} = \frac{m \cdot V_1^2}{2} + \frac{m \cdot V_2^2}{2}, \quad (1.1)$$

где $V_{10}=4 \cdot V$ – начальная скорость 1-го шара, $V_{20}=V$ – начальная скорость 2-го шара,

V_1 – конечная скорость 1-го шара (скорость 1-го шара после удара),

V_2 – конечная скорость 2-го шара (скорость 2-го шара после удара).

Сокращая (1.1) на $m/2$, приходим к более простому выражению

$$V_{10}^2 + V_{20}^2 = V_1^2 + V_2^2 \quad (1.2)$$

Законы изменения импульсов для 1-го и 2-го шаров имеют вид:

$$m \cdot \vec{V}_1 - m \cdot \vec{V}_{10} = \vec{F} \cdot \Delta t, \quad (1.3)$$

$$m \cdot \vec{V}_2 - m \cdot \vec{V}_{20} = \vec{F}' \cdot \Delta t, \quad (1.4)$$

где Δt – интервал времени взаимодействия шаров при ударе,

$\vec{F}$ – сила, с которой 2-ой шар действовал на 1-ый шар во время удара, $\vec{F}'$ – сила, с которой 1-ый шар при ударе действовал на 2-ой шар. Векторы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ лежат на линии удара (линия, проходящая через центры масс шаров и точку контакта К).

Согласно третьему закону Ньютона

$$\vec{F} = -\vec{F}', \quad |\vec{F}| = |\vec{F}'| = F \quad (1.5)$$

Складывая (1.3) и (1.4) приходим к следующему выражению:

$$m \cdot \vec{V}_1 - m \cdot \vec{V}_{10} + m \cdot \vec{V}_2 - m \cdot \vec{V}_{20} = (\vec{F} + \vec{F}') \cdot \Delta t$$

которое с учётом (1.5) преобразуется в закон сохранения импульса (ЗСИ)

$$\vec{P} = m \cdot \vec{V}_{10} + m \cdot \vec{V}_{20} = m \cdot \vec{V}_1 + m \cdot \vec{V}_2 = \text{const} \quad (1.6)$$

сокращая (1.6) на m , получаем

$$\vec{V}_{10} + \vec{V}_{20} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (1.7)$$

Проецируем (1.7) на ось X , совпадающей с линией удара (рис. 3),

$$V_{10X} + V_{20X} = V_{1X} + V_{2X} \quad (1.8)$$

Проецируем (1.3) и (1.4) на ось Y , расположенную перпендикулярно линии удара, и, сокращая полученные выражения на массу m , приходим к равенствам:

$$V_{1Y} = V_{10Y} \quad (1.9)$$

$$V_{2Y} = V_{20Y} \quad (1.10)$$

Преобразуем (1.8)

$$V_{10X} - V_{1X} = V_{2X} - V_{20X} \quad (1.11)$$

и возведём (1.11) в квадрат: $(V_{10X} - V_{1X})^2 = (V_{2X} - V_{20X})^2$, или

$$V_{10X}^2 - 2 \cdot V_{10X} \cdot V_{1X} + V_{1X}^2 = V_{2X}^2 - 2 \cdot V_{2X} \cdot V_{20X} + V_{20X}^2 \quad (1.12)$$

Далее запишем (1.2) через проекции: $V_{10X}^2 + V_{10Y}^2 + V_{20X}^2 + V_{20Y}^2 = V_{1X}^2 + V_{1Y}^2 + V_{2X}^2 + V_{2Y}^2$.

Согласно (1.9) и (1.10), это выражение упростится: $V_{10X}^2 + V_{20X}^2 = V_{1X}^2 + V_{2X}^2$, или

$$V_{10X}^2 - V_{1X}^2 = V_{2X}^2 - V_{20X}^2 \quad (1.13)$$

Вычтем (1.13) из (1.12): $-2 \cdot V_{10X} \cdot V_{1X} + 2 \cdot V_{1X}^2 = -2 \cdot V_{2X} \cdot V_{20X} + 2 \cdot V_{20X}^2$, или

$$V_{1X} \cdot (V_{1X} - V_{10X}) \cdot V_{1X} = V_{20X} \cdot (V_{20X} - V_{2X}). \quad (1.14)$$

Но согласно (1.11) выражения, стоящие в скобках в левой и правой частях этого уравнения, равные. Следовательно:

$$V_{1X} = V_{20X} . \quad (1.15)$$

Подставляя (1.15) в (1.11), приходим к другому равенству

$$V_{10X} = V_{2X} . \quad (1.16)$$

Если умножить (1.15) и (1.16) на m , то получим равенство проекций импульсов:

$$m \cdot V_{1X} = m \cdot V_{20X} , \quad (1.17)$$

$$m \cdot V_{10X} = m \cdot V_{2X} . \quad (1.18)$$

Выражения (1.17) и (1.18) можно интерпретировать, как взаимный обмен импульсами шаров при ударе вдоль оси X (вдоль линии удара).

Угол φ между линией удара O_1KO_2 и вектором $\vec{V}_{10}$, определяем из геометрических построений (см. рис. 4). Так как $O_1O_2=2 \cdot R$ (здесь R – радиус шара), а $O_2B=R$, то $\varphi=30^\circ$.

Согласно (1.9), (1.10) и рис.3 получаем:

$$V_1 \cdot \sin \varepsilon = V_{10} \cdot \sin \varphi , \quad (1.19)$$

$$V_2 \cdot \sin \gamma = V_{20} \cdot \sin \varphi . \quad (1.20)$$

А согласно (1.15), (1.16) и рис.3 находим:

$$V_1 \cdot \cos \varepsilon = V_{20} \cdot \cos \varphi , \quad (1.21)$$

$$V_2 \cdot \cos \gamma = V_{10} \cdot \cos \varphi . \quad (1.22)$$

Формулы(1.19)÷(1.22) с учётом того, что $\sin \varphi = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos \varphi = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

а $V_{10}=4 \cdot V$, $V_{20}=V$ примут вид:

$$V_1 \cdot \sin \varepsilon = 2 \cdot V , \quad (1.23)$$

$$V_2 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} V . \quad (1.24)$$

$$V_1 \cdot \cos \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V , \quad (1.25)$$

$$V_2 \cdot \cos \gamma = 2\sqrt{3} \cdot V . \quad (1.26)$$

Итак, имеем 4 уравнения (1.23)÷(1.26) и 4 неизвестные величины: скорости V_1 , V_2 и углы ε , γ .

Разделим (1.24) на (1.26): $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{4\sqrt{3}} \approx 0,144$, отсюда $\gamma = \arctg(0,144) \Rightarrow \gamma = 8^\circ$.

Согласно рис.3: $\delta = 180^\circ - \varphi - \gamma$, или $\delta = 180^\circ - 30^\circ - 8^\circ = 142^\circ$. Итак $\delta = 142^\circ$.

Разделим (1.25) на (1.23) $\operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,433$, отсюда $\varepsilon = \arctg(0,443) \Rightarrow \varepsilon = 66^\circ 36'$.

Из (1.23) находим: $V_1 = \frac{2 \cdot V}{\sin(66^\circ 36')} \approx \frac{2 \cdot V}{0,91} \approx 2,2 \cdot V$.

Проверка из (1.25): $V_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{V}{\cos(66^\circ 36')} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{V}{0,4} \approx 2,2 \cdot V$.

Из (1.24): $V_2 = \frac{V}{2 \cdot \sin \gamma} = \frac{V}{2 \cdot \sin 8^\circ} \approx \frac{V}{2 \cdot 0,143} \approx 3,5 \cdot V$.

Проверка из (1.26): $V_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\cos \gamma} \cdot V = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\cos 8^\circ} \cdot V \approx \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{0,99} \cdot V \approx 3,5 \cdot V$.

Задача 1-2 для вариантов с 11 по 20

Гладкая частица сферической формы массой m , которую можно рассматривать как материальную точку, ударяется со скоростью $\vec{V}_0$ о гладкую массивную преграду, которая движется со скоростью $\vec{U} = const$. Угол, образованный векторами $\vec{V}_0$ и $\vec{U}$, равен β . Массу преграды считать бесконечной. На рис. 5, 6 преграда имеет форму плоской стенки, на рис.7 – форму острого конуса с углом раствора γ , а на рис. 8 – форму конуса сферической головной частью радиусом R . Удар частицы о сферическую поверхность происходит в точке А, расположенной под углом γ относительно оси преграды. При этом $АО = R$.

Виды взаимодействия:

- а) абсолютно упругий удар (АУУ);
- б) неупругий удар (НУУ);
- в) абсолютно неупругий удар (АНУУ).

Обозначения:

$\vec{V}_K$ - конечная скорость частицы после удара;

α_K - угол, образованный векторами $\vec{V}_K$ и $\vec{U}$;

$\Delta \vec{V}$ - изменение вектора скорости частицы за время удара;

$|\Delta \vec{p}|$ - изменение модуля импульса частицы за время удара;

ΔE - изменение кинетической энергии частицы за время удара;

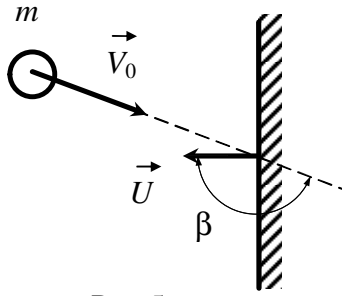


Рис.5

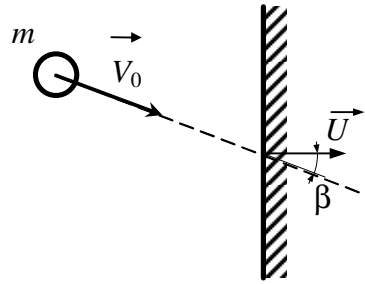


Рис.6

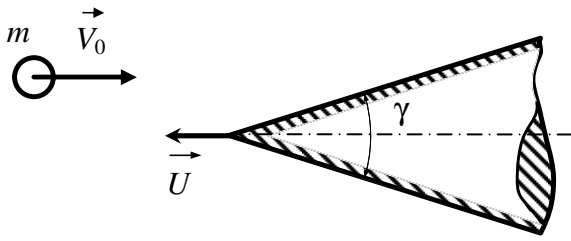


Рис.7

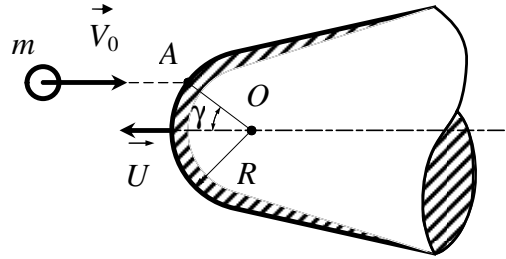


Рис.8

F - модуль средней силы, с которой частица действует на стенку во время удара;

$F \cdot \Delta t$ - модуль импульса силы, который за время удара Δt частица передаёт стенке;

$E_d = \frac{\eta m V_0^2}{2}$ - энергия деформирования частицы при ударе, выраженная через её начальную кинетическую энергию, где η - безразмерный коэффициент.

Общие исходные данные: $m^* = 10^{-3}$ кг, $V^* = 6$ м/с, $U^* = 2$ м/с, $\beta^* = 180^\circ$, $\eta^* = 0,5$, $\Delta t^* = 10^{-5}$ с.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задачи представлены в таблице № 2

Основные зависимости в задаче 1.

При решении этой задачи целесообразно использовать кинематическое соотношение

$$\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}', \quad (1.27)$$

где $\vec{V}$ - абсолютная скорость частицы, $\vec{V}'$ - скорость частицы относительно стенки.

Тогда закон сохранения энергии примет вид:

$$\frac{m V_0'^2}{2} = \begin{cases} \frac{m V_K'^2}{2} & \text{при АУУ;} \\ \frac{m V_K'^2}{2} + E_d & \text{при НУУ;} \\ E_d & \text{при АНУУ;} \end{cases}$$

где $\vec{V}_0'$ и $\vec{V}_K'$ - векторы относительной скорости частицы соответственно до и после удара. Закон изменения импульса частицы при ударе о стенку имеет вид:

$$m\vec{V}_K - m\vec{V}_0 = \vec{F}\Delta t, \quad (1.28)$$

где $\vec{V}_0$ и $\vec{V}_K$ - векторы абсолютной скорости частицы до и после удара, $\vec{F}$ - вектор средней силы, с которой стенка действует на частицу. После подстановки в уравнение (1.28) зависимости (1.27) получаем закон изменения импульса, выраженный через относительные скорости

$$m\vec{V}_K' - m\vec{V}_0' = \vec{F}\Delta t.$$

Таблица №2

№ вар.	Исходные данные к задаче 1-2							
	№ рис.	m	V_0	U	β	γ	η	Δt
11	5	m^*	V^*	U^*	$2/3\beta^*$	-	-	Δt^*
12	6	$2m^*$	$2V^*$	U^*	$1/4\beta^*$	-	-	$2\Delta t^*$
13	5	$5m^*$	$3V^*$	$2U^*$	$5/6\beta^*$	-	-	$3\Delta t^*$
14	6	$3m^*$	$1/2V^*$	$1/2U^*$	$1/6\beta^*$	-	-	-
15	7	$4m^*$	$2V^*$	$2U^*$	-	$1/3\beta^*$	-	-
16	8	m^*	$1/2V^*$	U^*	-	$1/6\beta^*$	-	-
17	5	$2m^*$	$2V^*$	U^*	0	-	$3/4\eta^*$	$8\Delta t^*$
18	6	$3m^*$	V^*	$2U^*$	β^*	-	$1/2\eta^*$	-
19	7	m^*	$2V^*$	U^*	-	$1/2\beta^*$	-	-
20	8	$2m^*$	V^*	U^*	-	$1/3\beta^*$	-	-

Таблица №2 (продолжение)

№ вар.	Вид взаимодействия			Определить							
	АУУ	НУУ	АНУУ	V_K	α_K	ΔV	ΔE	$ \Delta \vec{p} $	$F\Delta t$	F	η
11	+	-	-	+	+	+	+	+	-	+	-
12	+	-	-	+	+	+	+	+	-	+	-
13	+	-	-	+	+	+	+	+	-	+	-
14	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
15	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
16	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
17	-	+	-	+	-	+	+	+	-	+	-
18	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-
19	-	-	+	+	-	+	+	+	-	-	+

№ вар.	Вид взаимодействия			Определить							
	АУУ	НУУ	АНУУ	V_K	α_K	ΔV	ΔE	$ \Delta \vec{p} $	$F\Delta t$	F	η
20	-	-	+	+	-	+	+	+	-	-	+

Образец оформления задачи 1-2

Гладкая частица сферической формы массой $m=10^{-3}$ кг, летящая со скоростью $V_0=6$ м/с, ударяется о гладкую массивную стенку, которая движется со скоростью $U=2$ м/с. Угол, образованный векторами $\vec{V}_0$ и $\vec{U}$, равен $\beta=120^\circ$ (рис. 9, время удара $\Delta t=10^{-4}$ с. Массу стенки считать бесконечной. Вид взаимодействия: абсолютно упругий удар (АУУ).

Определить:

Скорость частицы после удара V_K ;

Угол α_K , образованный векторами $\vec{V}_K$ и $\vec{U}$;

Модуль изменения импульса $|\Delta \vec{P}|$;

Модуль средней силы, с которой частица действует на стенку за время удара F ;

Дано:

$$m=10^{-3} \text{ кг}, \quad V_0=6 \text{ м/с},$$

$$U=2 \text{ м/с}, \quad \beta=120^\circ,$$

$$\Delta t=10^{-4} \text{ с}, \text{ АУУ.}$$

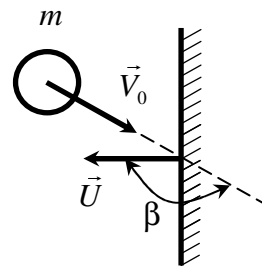


Рис. 9

$$V_K-?, \quad \alpha_K-?, \quad |\Delta \vec{P}|-?, \quad F-?$$

Решение:

С движущейся стенкой свяжем подвижную систему координат $X'O'Y'$. На рис. 10 представлена векторная диаграмма скоростей при ударе частицы о подвижную стенку.

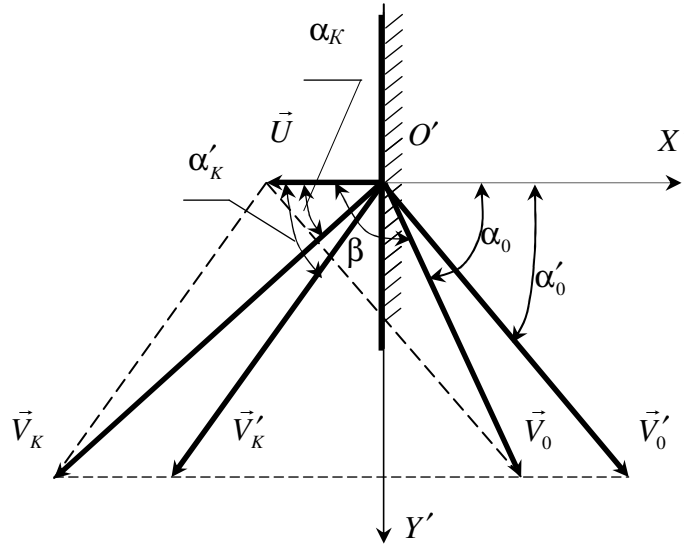


Рис. 10

Здесь:

$\vec{V}_0$ - вектор начальной абсолютной скорости частицы;

$\vec{V}'_0$ - вектор начальной скорости частицы, относительно подвижной стенки;

$\vec{U}$ - вектор скорости подвижной стенки (скорость подвижной инерциальной системы отсчета (ИСО));

$\vec{V}_K$ - вектор конечной абсолютной скорости частицы;

$\vec{V}'_K$ - вектор конечной скорости частицы, относительно подвижной стенки.

Эти скорости связаны соотношениями:

$$\vec{V}_0 = \vec{U} + \vec{V}'_0 \quad (1.29)$$

$$\vec{V}_K = \vec{U} + \vec{V}'_K \quad (1.30)$$

Соответствующие углы указаны на рис. 10, в частности, угол $\alpha_0 = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\alpha_0 = 60^\circ$.

Проецируем соотношения (1.29) и (1.30) на оси $O'X'$ и $O'Y'$

$$V_0 \cos \alpha_0 = -U + V'_0 \cos \alpha'_0, \quad (1.31)$$

$$V_0 \sin \alpha_0 = V'_0 \sin \alpha'_0, \quad (1.32)$$

$$V_K \cos \alpha_K = U + V'_K \cos \alpha'_K, \quad (1.33)$$

$$V_K \sin \alpha_K = V'_K \sin \alpha'_K. \quad (1.34)$$

Уравнение изменения импульса при ударе частицы о стенку имеет вид:

$$m\vec{V}_K - m\vec{V}_0 = \vec{F}\Delta t, \quad (1.35)$$

где $\vec{F}$ - вектор средней силы, с которой стенка действует на частицу во время удара (рис. 11), $\vec{F}'$ - вектор средней силы, с которой частица действует на стенку во время удара. По третьему Закону Ньютона $\vec{F} = -\vec{F}'$ и соответственно $|\vec{F}| = |\vec{F}'| = F$.

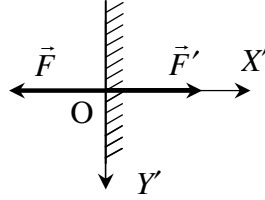


Рис.11

Если (1.29) и (1.30) подставить в (1.35) то тогда получим

$$m\vec{V}'_K - m\vec{V}'_0 = \vec{F}\Delta t. \quad (1.36)$$

Уравнения (1.35) и (1.36) выражают закон изменения импульса частицы: уравнение (1.35) относительно неподвижной системы отсчета, а уравнение (1.36) относительно подвижной системы отсчета. Проецируем (1.35) и (1.36) на оси O'X' и O'Y'

$$mV_K \cos\alpha_K + mV_0 \cos\alpha_0 = F\Delta t, \quad (1.37)$$

$$mV_K \sin\alpha_K = mV_0 \sin\alpha_0, \quad (1.38)$$

$$mV'_K \cos\alpha'_K + mV'_0 \cos\alpha'_0 = F\Delta t, \quad (1.39)$$

$$mV'_K \sin\alpha'_K = mV'_0 \sin\alpha'_0. \quad (1.40)$$

Так как удар частицы о стенку абсолютно упругий, то будет выполняться закон сохранения механической энергии

$$\frac{m(V'_0)^2}{2} = \frac{m(V'_K)^2}{2}$$

Отсюда находим

$$V'_0 = V'_K. \quad (1.41)$$

Подставляя (1.41) в (1.40) получаем $\sin\alpha'_0 = \sin\alpha'_K$, или

$$\alpha'_0 = \alpha'_K \quad (1.42)$$

Определим угол α'_0 . С этой целью преобразуем (1.31) и (1.32). Первоначально из (1.31) находим

$$V'_0 \cos\alpha'_0 = U + V_0 \cos\alpha_0, \quad (1.43)$$

а затем делим (1.32) на (1.43), в итоге находим

$$\operatorname{tg}\alpha'_0 = \frac{V_0 \sin\alpha_0}{U + V_0 \cos\alpha_0} \quad (1.44)$$

$$\operatorname{tg} \alpha'_0 = \frac{6 \cdot \sin 60^\circ}{2 + 6 \cdot \cos 60^\circ} = 1,04, \text{ отсюда } \alpha'_0 = 46^\circ 6', \quad (1.45)$$

следовательно, согласно (1.42) $\alpha_K' = 46^\circ 6'$

Далее из формулы (1.32) определяем $V'_0 = V_0 \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha'_0}$

$$\begin{cases} V'_0 = 6 \frac{\sin 60^\circ}{\sin 46^\circ 6'} = 7,21 \frac{M}{c} & \text{и согласно (1.41)} \\ V'_K = 7,21 \frac{M}{c} \end{cases} \quad (1.46)$$

Переходим к расчету конечных характеристик. Разделив (1.34) на (1.33), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_K &= \frac{V'_K \sin \alpha'_K}{U + V'_K \cos \alpha'_K} \\ \operatorname{tg} \alpha_K &= \frac{7,21 \cdot \sin(46^\circ 6')}{2 + 7,21 \cdot \cos(46^\circ 6')} = 0,7423 \\ \alpha_K &= 36^\circ 35' \end{aligned} \quad (1.47)$$

Тогда из (1.34) находим

$$V_K = V'_K \frac{\sin \alpha'_K}{\sin \alpha_K}; \quad V_K = 7,21 \frac{\sin(46^\circ 6')}{\sin(36^\circ 35')} = 8,72 \frac{M}{c}. \quad (1.48)$$

Проверка! Из (1.38) имеем

$$V_K = V_0 \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_K}; \quad V_K = 6 \frac{\sin 60^\circ}{\sin(36^\circ 35')} = 8,72 \frac{M}{c}.$$

Модуль изменения импульса частицы согласно (1.36) и (1.39) будет равен

$$|\Delta \vec{P}| = m V'_K \cos \alpha'_K + m V'_0 \cos \alpha'_0 = F \Delta t$$

или в соответствии с (1.41) и (1.42) получаем

$$|\Delta \vec{P}| = 2m V'_0 \cos \alpha'_0,$$

подставляя численные значения (1.45) и (1.46) находим

$$|\Delta \vec{P}| = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 7,21 \cos(46^\circ 6') = 0,01 \frac{KZ \cdot M}{c}.$$

Проверка! Согласно (1.35) и (1.37) имеем

$$|\Delta \vec{P}| = m V_K \cos \alpha_K + m V_0 \cos \alpha_0 = F \Delta t.$$

Подставляя численные значения, в частности (1.47) и (1.48), получаем

$$|\Delta \vec{P}| = 10^{-3} \cdot (8,72 \cdot \cos(36^\circ 35') + 6 \cdot \cos 60^\circ) = 0,01 \frac{KZ \cdot M}{c}.$$

Модуль средней силы будет равен

$$F = \frac{|\Delta \vec{P}|}{\Delta t}, \quad F = \frac{0,01}{10^{-4}} = 10^2 \text{ Н}.$$

Задача 1-3 для вариантов с 21 по 28

Нерелятивистская частица с внутренней энергией E_0 и массой m_0 , летящая со скоростью $\vec{V}_0$, распадается на две нерелятивистские частицы, скорости которых $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, массы m_1 и m_2 , импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, кинетические энергии E_1 и E_2 . При этом часть внутренней энергии E_0 исходной частицы в количестве ηE_0 , где коэффициент $\eta < 1$, расходуется на увеличение кинетической энергии образовавшихся частиц.

На рис. 12 γ - угол разлета частиц, т.е. угол, образованный векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, θ - угол отклонения первой частицы (из вновь образовавшихся) от направления движения исходной частицы, т.е. угол, образованный векторами $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_1$, где $\vec{p}_0 = m_0 \vec{V}_0$.

Общие исходные данные: $m^* = 10^{-2}$ кг, $V^* = 10$ м/с, $\gamma^* = \pi/2$, $E^* = 10$ Дж, $\eta^* = 0,5$. Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в таблице №3.

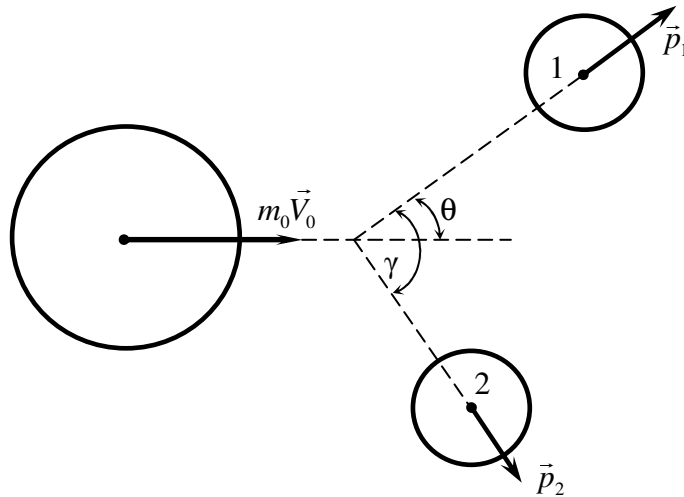


Рис. 12

Основные зависимости.

При распаде частицы выполняются законы сохранения импульса и энергии. Соответствующие уравнения в общем случае для данной задачи имеют вид:

$$m_0 \vec{V}_0 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2,$$

$$\eta E_0 + \frac{m_0 V_0^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}.$$

Таблица №3

№ вар.	Исходные данные к задаче 1-3									
	m_0	V_0	γ	θ	m_1	m_2	p_1	p_2	E_0	η
21	m^*	V^*	γ^*	-	$1/4m^*$	$3/4m^*$	$p_1=p_2$		-	-
22	m^*	V^*	-	-	$2/3m^*$	$1/3m^*$	$p_1=p_2$		E^*	$0,35\eta^*$
23	$2m^*$	V^*	-	$2/3\gamma^*$	$4/3m^*$	$2/3m^*$	$p_1=p_2$		-	-
24	m^*	V^*	$4/3\gamma^*$	$1/3\gamma^*$	$2/3m^*$	$1/3m^*$	-	-	-	-
25	$2m^*$	V^*	γ^*	-	$4/3m^*$	$2/3m^*$	$2/3m^*V^*$	-	-	-
26	m^*	$2V^*$	γ^*	-	$2/3m^*$	$1/3m^*$	-	m^*V^*	-	-
27	m^*	V^*	-	$1/3\gamma^*$	$1/3m^*$	$2/3m^*$	$p_1=p_2$		E^*	-
28	$2m^*$	$2V^*$	-	-	$2/3m^*$	$4/3m^*$	$p_1=p_2$		E^*	$1,6\eta^*$

Таблица №3 (продолжение)

№ вар.	Определить									
	γ	θ	V_1	V_2	p_1	p_2	E_1	E_2	η	ηE_0
21	-	+	+	+	+	+	-	-	-	+
22	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-
23	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+
24	-	-	+	+	+	+	+	+	-	+
25	-	+	-	+	-	+	+	+	-	+
26	-	+	+	-	+	-	+	+	-	+
27	+	-	+	+	-	-	+	+	+	-
28	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-

Динамика вращательного движения

Все задачи этого раздела решаются в два этапа. В задачах 2-1, 2-2, 2-4 расчёт следует начинать с определения минимальной скорости V_{0m} . После этого проводится второй этап расчёта со скоростью V_0 , значения которой представлены в таблицах 4, 5, 7. Аналогичным образом, в задаче 2-3 расчёт следует начинать с определения минимальной угловой скорости ω_{0m} . После этого проводится второй этап расчёта с угловой скоростью ω_0 , значение которой представлено в таблице 6. На втором этапе расчёта определяются в зависимости от варианта задания, либо ω_k , либо ϕ_m , а также ΔE . В задаче 2-3 в некоторых вариантах требуется определить на втором этапе расчёта скорость кубика V_0 после удара.

Внимание! После задачи 2-4 приведён пример решения.

Задача 2-1 для вариантов с 1 по 6

Однородный жёсткий стержень длиной $l=1$ м и массой $M=1$ кг свободно висит на горизонтальной идеально гладкой оси вращения O , как показано на рис. 13.

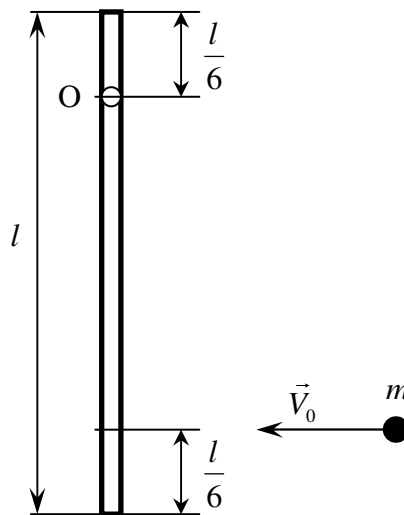


Рис. 13

Ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка. Малый шарик массой $m=0,1$ кг, летящий горизонтально со скоростью V_0 , движется в плоскости рисунка и ударяет в стержень.

При этом взаимодействие шарика со стержнем может происходить в виде:

- абсолютно упругого удара (АУУ);
- неупругого удара (НУУ);

– абсолютно неупругого удара (АНУУ).

Сразу после удара стержень вращается с угловой скоростью ω_0 , а шарик приобретает скорость V_K и продолжает двигаться в плоскости рисунка. Другие обозначения:

V_{0m} – минимальная начальная скорость шарика,

ω_{0m} – соответственно минимальная угловая скорость стержня, при которой стержень после удара совершает полный оборот;

ω_K - угловая скорость стержня при прохождении им крайней верхней точки;

φ_m - максимальный угол отклонения стержня от положения равновесия;

ΔE – потери механической энергии при ударе.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в таблице № 4.

Расчет следует начинать с определения характерной величины V_{0m} .

Таблица №4

№ Вар	Задано		Виды взаимодействия			Определить			
	V_0	V_K	АУУ	НУУ	АНУУ	ω_K	φ_m	V_{0m}	ΔE
1	$0.5V_{0m}$	-	-	-	+	-	+	+	+
2	$2V_{0m}$	-	-	-	+	+	-	+	+
3	$0.5V_{0m}$	0	-	+	-	-	+	+	+
4	$2V_{0m}$	0	-	+	-	+	-	+	+
5	$0.5V_{0m}$	-	+	-	-	-	+	+	-
6	$2V_{0m}$	-	+	-	-	+	-	+	-

Задача 2 -2 для вариантов с 7 по 15

Однородный жёсткий вертикальный стержень длиной $l=1$ м и $M=1$ кг, движущийся поступательно в плоскости рисунка с постоянной горизонтальной скоростью V_0 , налетает на край массивной преграды (рис. 14). После удара стержень вращается вокруг оси О перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку контакта стержня с преградой, так что точка контакта лежит выше центра тяжести стержня (рис. 14). Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь. Другие обозначения:

l_1 – расстояние от верхнего конца стержня до точки контакта;

ω_0 – угловая скорость стержня сразу после удара о ребро преграды;

V_{0m} – минимальная горизонтальная скорость стержня, а ω_{0m} – соответственно минимальная угловая скорость стержня, при которой он после удара способен коснуться горизонтальной поверхности преграды;

φ_m – максимальный угол поворота стержня после удара;

ω_K – угловая скорость стержня в момент его удара о горизонтальную поверхность преграды.

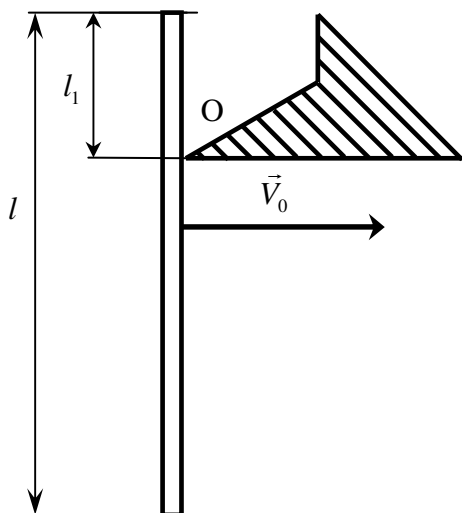


Рис. 14

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в таблице № 5.

Расчет следует начинать с определения характерной скорости V_{0m} .

Таблица №5

№ Вар	Задано		Определить			
	l_1	V_0	ω_0	ω_K	φ_m	V_{0m}
7	$0,1l$	$1,4 V_{0m}$	+	+	-	+
8	$0,1l$	$0,5 V_{0m}$	+	-	+	+
9	$0,2l$	$1,5 V_{0m}$	+	+	-	+
10	$0,2l$	$0,6 V_{0m}$	+	-	+	+
11	$0,4l$	$1,2 V_{0m}$	+	+	-	+
12	$0,4l$	$0,8 V_{0m}$	+	-	+	+
13	$0,3l$	$1,1 V_{0m}$	+	+	-	+
14	$0,3l$	$0,4 V_{0m}$	+	-	+	+
15	$0,25l$	$1,3 V_{0m}$	+	+	-	+

Задача 2-3 для вариантов с 16 по 21

Однородный жёсткий стержень длиной $l=0,5$ м и массой $M=0,5$ кг может свободно без трения вращаться вокруг горизонтальной оси O . При прохождении стержнем вертикального положения с угловой скоростью ω_0 , он своим нижним концом ударяет по маленькому кубику массой $m=0,1$ кг, который после удара движется в плоскости рисунка (рис. 15).

При этом взаимодействие стержня с кубиком может происходить в виде:

- абсолютно упругого удара (АУУ);
- неупругого удара (НУУ);
- абсолютно неупругого удара (АНУУ).

Другие обозначения:

ω'_0 – угловая скорость стержня сразу после взаимодействия с кубиком;

ω_{0m} – минимальная угловая скорость ω_0 , при которой стержень после удара совершит полный оборот вокруг оси O при заданном типе взаимодействия;

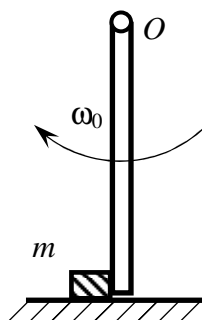


Рис. 15

ω'_{0m} – угловая скорость стержня сразу после взаимодействия с кубиком, при условии, что начальная угловая скорость стержня была равна ω_{0m} ;

ω_k – угловая скорость стержня в крайней верхней точке после удара;

φ_m – максимальный угол отклонения стержня от положения равновесия после удара;

V_0 – скорость кубика после удара;

ΔE – потери механической энергии при ударе стержня по кубику.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в таблице № 6.

Расчет следует начинать с определения минимальной угловой скорости стержня ω_{0m} .

Таблица №6

№ Вар	Задано		Вид взаимодействия			Определить				
	ω_0	V_0	АУУ	НУУ	АНУУ	ω_{0m}	ω_K	φ_m	V_0	ΔE
16	$0,5\omega_{0m}$	-	+	-	-	+	-	+	+	-
17	$1,2\omega_{0m}$	-	+	-	-	+	+	-	+	-
18	$0,4\omega_{0m}$	$\omega_0 l$	-	+	-	+	-	+	-	+
19	$1,5\omega_{0m}$	$\omega_0 l$	-	+	-	+	+	-	-	+
20	$0,6\omega_{0m}$	-	-	-	+	+	-	+	+	+
21	$2\omega_{0m}$	-	-	-	+	+	+	-	+	+

Задача 2-4 для вариантов с 22 по 28

Физический маятник, состоящий из однородного шара радиусом $R=3$ см и массой $M = 0,4$ кг, жестко соединённого с однородным жёстким стержнем длиной $4R$ и массой M , подвешен к горизонтальной оси O , проходящей через верхний конец стержня перпендикулярно плоскости рисунка (рис.16).

Маятник может свободно без трения вращаться вокруг оси O . Шарик массой $m=0,05$ кг движется горизонтально в плоскости рисунка со скоростью V_0 вдоль горизонтальной прямой, проходящей через центр шара, и ударяет в шар. При этом взаимодействие шарика с маятником может происходить в виде:

- абсолютно упругого удара (АУУ);
- неупругого удара (НУУ);
- абсолютно неупругого удара (АНУУ).

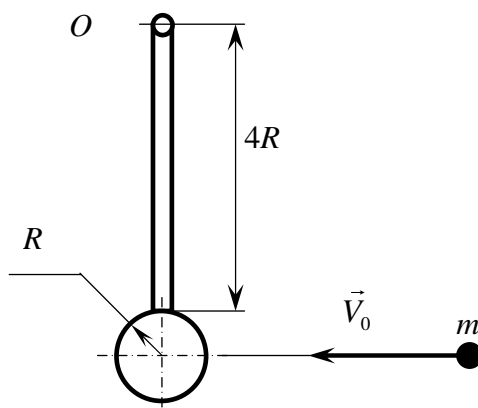


Рис. 16

Другие обозначения:

ω_0 – угловая скорость физического маятника сразу после удара шарика;

V_{0m} – минимальная скорость шарика, при которой маятник после удара, приобретая угловую скорость ω_{0m} , совершает полный оборот;

ω_K - угловая скорость физического маятника в верхней точке;

φ_m - максимальный угол отклонения физического маятника от положения равновесия;

V_K – скорость шарика после удара;

ΔE - потери механической энергии при ударе шарика по маятнику.

Другие исходные данные и искомые величины для каждого варианта задания представлены в таблице № 7.

Расчет следует начинать с определения минимальной скорости шарика V_{0m} .

Таблица №7

№ Вар	Задано		Вид взаимодействия			Определить			
	V_0	V_K	АУУ	НУУ	АНУУ	ω_K	φ_m	V_{0m}	ΔE
22	$0,5 V_{0m}$	-	+	-	-	-	+	+	-
23	$2 V_{0m}$	-	+	-	-	+	-	+	-
24	$0,4 V_{0m}$	0	-	+	-	-	+	+	+
25	$1,2 V_{0m}$	0	-	+	-	+	-	+	+
26	$0,8 V_{0m}$	-	-	-	+	-	+	+	+
27	$1,4 V_{0m}$	-	-	-	+	+	-	+	+
28	$0,6 V_{0m}$	-	+	-	-	-	+	+	-

Основные зависимости

Уравнение динамики вращательного движения механической системы относительно неподвижной оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

здесь L_z – сумма моментов импульсов всех частей механической системы относительно оси z;

M_z – сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно оси z.

Если $M_z = 0$, то из этого уравнения следует закон сохранения момента импульса относительно оси z:

$$L_z = const.$$

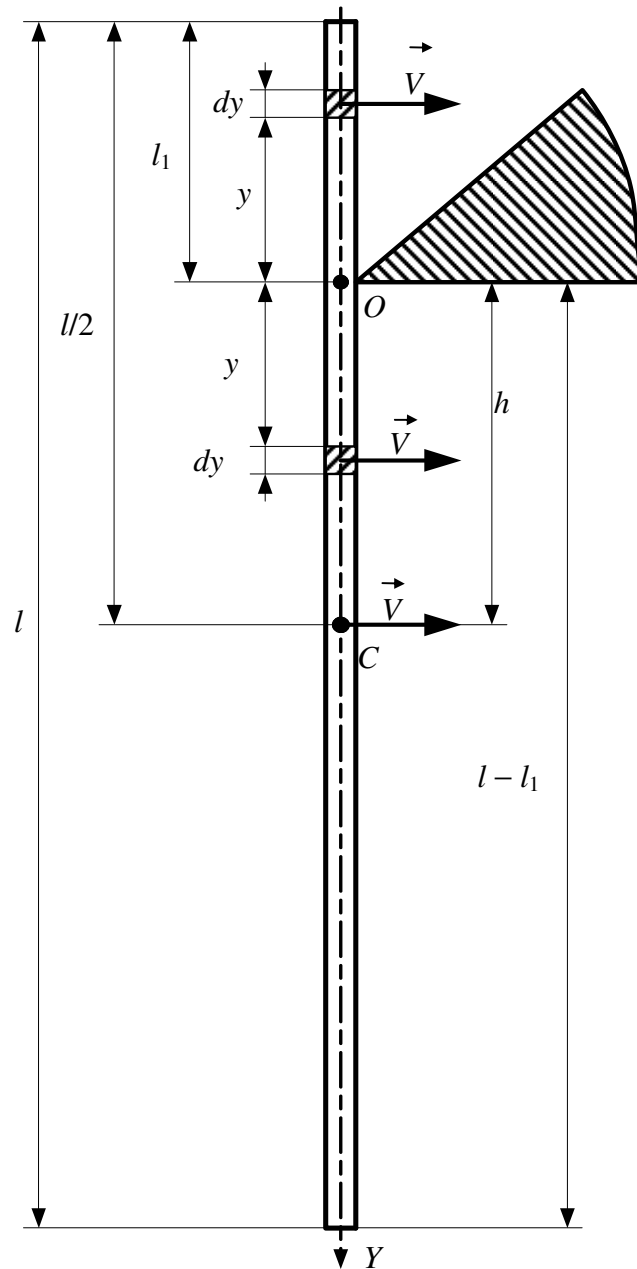


Рис. 17

Момент силы относительно оси z определяется по формуле:

$$M_z = F_\tau R,$$

где F_τ – проекция внешней силы на направление касательной к окружности с центром на оси z , лежащей в плоскости перпендикулярной оси z , и проходящей через точку приложения вектора $\vec{F}$ силы;

R – радиус этой окружности (плечо проекции силы F_τ).

Момент импульса твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси z с угловой скоростью ω равен:

$$L_z = I_z \omega$$

где I_z – момент инерции твердого тела относительно оси z .

Момент импульса твердого тела массой m , движущегося поступательно со скоростью V , перпендикулярно неподвижной оси z относительно этой оси равен:

$$L_z = mVh \quad (2.1)$$

где h – плечо импульса твёрдого тела, равное длине отрезка, проведённого от оси вращения перпендикулярно прямой, совпадающей с направлением вектора скорости центра масс тела $\vec{V}_C$.

Докажем справедливость данной формулы на примере поступательного движения однородного прямолинейного стержня массой m и длиной l (см. задачу 2-2), который движется со скоростью V . Момент импульса этого стержня относительно оси OZ (ось OZ перпендикулярна плоскости рис. 17 и направлена на нас) будет складываться в результате интегрирования моментов импульсов dL_z от элементарных частей стержня массой dm

$$dL_z = dm \cdot V \cdot y \quad (2.2)$$

где y – координата элементарной части стержня длиной dy .

Тогда

$$dm = \rho \cdot S \cdot dy,$$

где ρ – плотность материала стержня; S – площадь его поперечного сечения.

Начало координат оси OY расположено в т.О, где находится выступ (ребро) преграды. Момент импульса стержня относительно оси OZ будет, согласно (2.2), вычисляться по формуле:

$$L_z = \int_0^{l-l_1} \rho \cdot V \cdot S \cdot y \cdot dy - \int_0^{l_1} \rho \cdot V \cdot S \cdot y \cdot dy \quad (2.3)$$

На рис. 17:

l_1 – длина стержня над выступом;

h – расстояние от выступа (т. О) до центра масс стержня (т. С);

$l/2$ – расстояние от края стержня до центра масс.

Перед вторым интегралом в формуле (2.3) стоит знак минус, потому что проекции моментов импульсов нижней и верхней частей стержня относительно оси OZ имеет разные знаки. После интегрирования получаем:

$$L_z = \rho \cdot V \cdot S \cdot \frac{(l-l_1)^2}{2} - \rho \cdot V \cdot S \cdot \frac{l_1^2}{2}.$$

Или после преобразований имеем:

$$L_z = \rho \cdot V \cdot S \cdot l \cdot \left(\frac{l}{2} - l_1 \right).$$

Поскольку $\rho \cdot S \cdot l = m$, а $\frac{l}{2} - l_1 = h$, то в итоге имеем:

$$L_z = mVh \quad (2.4)$$

что совпадает с формулой (2.1).

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси z :

$$E_k = \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел массой m простой формы:

сплошного кругового цилиндра с радиусом R относительно его оси:

$$I = 0,5mR^2;$$

сплошного шара с радиусом R относительно оси, проходящей через центр шара:

$$I = 0,4mR^2;$$

тонкого стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс:

$$I = \frac{ml^2}{12}.$$

Теорема Штейнера:

$$I_{OZ} = I_{CZ} + m \cdot a^2,$$

где I_{CZ} – момент инерции твердого тела, относительно оси, проходящей через центр масс;

I_{OZ} – момент инерции относительно оси OZ , параллельной CZ ;

a – расстояние между осями CZ и OZ .

Пример. Однородный жёсткий стержень длиной l и массой M свободно висит на горизонтальной гладкой оси вращения O , как показано на рис. 13. Ось вращения перпендикулярна плоскости рисунка. Малый шарик массой m , летящий горизонтально со скоростью V_0 , движется в плоскости рисунка, ударяет в стержень и застревает в нём. Найти изменение импульса механической системы (МС) стержень – шарик и потерю механической энергии МС за время удара.

Решение. При ударе шарика о стержень на ось вращения действует со стороны опоры оси дополнительная сила (реакция опоры), удерживающая эту ось на месте. Поэтому МС оказывается незамкнутой, так как реакция опоры является внешней силой по отношению к рассматриваемой МС.

Воспользуемся законом сохранения момента импульса данной МС относительно оси вращения O для расчёта угловой скорости вращения стержня сразу после удара ω_0 . Это возможно, так как, во-первых, интервал времени взаимодействия (удара) шарика со стержнем настолько незначителен, что углом поворота стержня вокруг оси вращения за этот интервал вре-

мени можно пренебречь, а, во-вторых, момент внешней силы (реакции опоры) относительно оси вращения равен нулю в силу равенства нулю плеча этой силы относительно оси О.

Момент импульса МС до удара равен моменту импульса шарика относительно оси О:

$$L_0 = mV_0 \frac{2}{3}l \quad (2.5)$$

Момент импульса МС после удара складывается из моментов импульсов шарика и стержня относительно оси О:

$$L_K = m\omega_0 \frac{2}{3}l \cdot \frac{2}{3}l + \omega_0 I_{OZ} \quad (2.6)$$

где $I_{OZ} = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{7}{36}Ml^2$ – момент инерции стержня относительно оси О вычисляется в соответствии с теоремой Штейнера. Приравнявая (2.5) и (2.6), после преобразований находим начальную угловую скорость вращения стержня:

$$\omega_0 = \frac{24m}{(16m + 7M)} \frac{V_0}{l}.$$

Импульс МС до удара направлен горизонтально и равен начальному импульсу шарика:

$$P_0 = mV_0 \quad (2.7)$$

Импульс МС после удара направлен горизонтально и равен:

$$P_K = m\omega_0 \frac{2}{3}l + MV_C \quad (2.8)$$

где $m\omega_0 \frac{2}{3}l$ – импульс шарика после удара, а скорость центра масс стержня равна $V_C = \omega_0 \frac{l}{3}$.

Вычитая (2.7) из (2.8) получим изменение импульса $\Delta P = P_K - P_0$ системы стержень – шарик за время удара:

$$\Delta P = m\omega_0 \frac{2}{3}l + M\omega_0 \frac{l}{3} - mV_0 = \frac{mV_0}{\left(7 + 16\frac{m}{M}\right)}.$$

Из последней формулы следует, что импульс МС за время удара увеличился.

Вычислим теперь потерю механической энергии при ударе шарика о стержень. Энергия МС до удара равна начальной кинетической энергии шарика:

$$E_0 = \frac{mV_0^2}{2} \quad (2.9)$$

Энергия МС сразу после удара складывается из кинетических энергий шарика и стержня:

$$E_K = \frac{m\left(\omega_0 \frac{2}{3}l\right)^2}{2} + \frac{MV_C^2}{2} \quad (2.10)$$

Вычитая (2.9) из (2.10) после соответствующих преобразований находим потерю механической энергии $\Delta E = E_K - E_0$ при ударе шарика о стержень:

$$\Delta E = -\frac{mV_0^2}{2} \left(\frac{7M}{16m+7M} \right) \quad (2.11)$$

В формуле (2.11) $\Delta E < 0$, это говорит о том, что при ударе механическая энергия МС уменьшилась, т.е. некоторое количество механической энергии МС при внедрении шарика в стержень перешло в тепло.

Колебания

В данных методических указаниях рассматриваются свободные затухающие механические колебания различных механических систем (МС), которые наиболее близки к реальным колебательным системам (КС). Например, МС, состоящая из двух, трёх и более шариков массой m каждый, соединённых упругими пружинами с жёсткостью k каждая, с достаточно хорошим приближением моделирует колебания молекулы, состоящей из двух, трёх и более атомов, соединённых упругими связями.

В качестве примера рассмотрим МС, состоящую из двух шариков m_1 и m_2 , соединённых упругой пружиной длиной l_0 и жёсткостью k (см. рис. 18). Такая МС неплохо моделирует некоторую молекулу, состоящую из двух разных атомов, соединённых упругой связью.

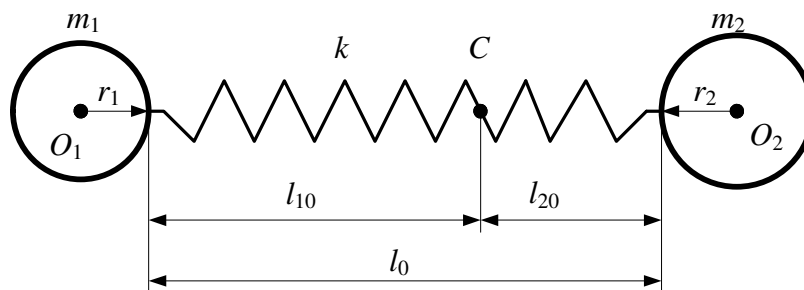


Рис. 18

Чтобы исключить влияние силы тяжести на данную МС, будем рассматривать движение этой системы на горизонтальной плоскости. При этом трением шариков об эту плоскость будем пренебрегать. Поскольку данная МС является замкнутой, то колебания этих шариков вдоль линии $O_1 O_2$, проходящей через центры шариков, можно рассматривать как колебания каждого шарика относительно неподвижного центра масс МС (т. C). В этом случае круговые (циклические) частоты колебаний 1-го и 2-го шариков будут равными $\omega_1 = \omega_2$ и соответственно будут определять частоту колебаний МС $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Данный тезис подтверждается соответствующими расчётами. Из формулы, определяющей координату центра масс МС, получаем следующие равенства:

$$m_1 (r_1 + l_{10}) = m_2 (r_2 + l_{20}) \quad (3.1)$$

где r_1 и r_2 – радиусы 1-го и 2-го шариков. В дальнейшем будем полагать, что $l_{10} \gg r_1$ и $l_{20} \gg r_2$, и тогда вместо (3.1) получаем:

$$m_1 l_{10} = m_2 l_{20} \quad (3.2)$$

Поскольку $l_0 = l_{10} + l_{20}$, то в соответствии с (3.2) находим величины:

$$l_{10} = l_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.3)$$

$$l_{20} = l_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (3.4)$$

Известно, что жёсткость пружины обратно пропорциональна её длине. Поэтому можно написать, что

$$kl_0 = k_1 l_{10} = k_2 l_{20} = \text{const} \quad (3.5)$$

где const зависит от упругих свойств материала пружины и её геометрии, k_1 и k_2 – это жёсткости левой и правой частей пружины, определяемых соответственно длинами l_{10} и l_{20} . Что касается циклических частот колебаний 1-го и 2-го шариков, то они, согласно (3.5), будут равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{10} m_1}} \quad (3.6)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{k \frac{l_0}{l_{20} m_2}} \quad (3.7)$$

Поскольку формула (3.2) остаётся справедливой в любой момент времени, то из (3.6) и (3.7) следует, что

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (3.8)$$

Если подставить (3.3) в (3.6), а (3.4) в (3.7), то с учётом (3.8) получаем формулу, определяющую круговую частоту колебаний рассматриваемой МС:

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{k \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} \quad (3.9)$$

Величина

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.10)$$

в формуле (3.9) называется приведённой массой КС. Следовательно, круговая частота данной КС запишется так:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}. \quad (3.11)$$

В этом случае задачу о колебаниях двух шариков можно свести к задаче колебания классического пружинного осциллятора с приведённой массой μ .

В частности, при $m_1 = m_2 = m$, согласно (3.10) и (3.11) получаем, что

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}. \quad (3.11)$$

Из (3.12) видно, что частота колебаний одинаковых шариков соединённых пружиной в $\sqrt{2}$ раз больше частоты колебаний одного шарика на такой же пружине.

На рис. 19, 20 представлены конструктивные схемы МС, состоящих из трёх одинаковых шариков массой m каждый, соединённых тремя пружинами жёсткостью k каждая. На рис. 19 шарики расположены в вершинах равностороннего треугольника, а на рис. 20 шарики вместе с пружинами образуют правильную трёхлучевую звезду с центром в т. О.

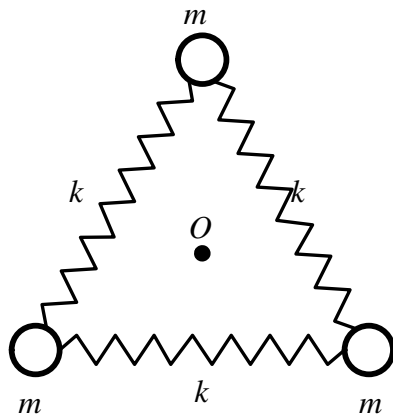


Рис.19

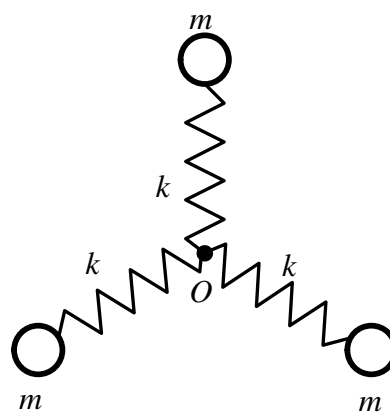


Рис.20

Данные МС можно рассматривать как модели трёхатомных молекул, соединённых между собой упругими связями. Так же, как в предыдущей задаче, будем рассматривать движение этой МС на горизонтальной плоскости, а трением шариков об эту плоскость будем пренебрегать.

Требуется определить собственную частоту колебаний каждой МС при условии, что шарики будут совершать малые синхронные колебания с соблюдением условий центральной симметрии.

Движение шариков МС на рис. 20 будет происходить вдоль лучей звезды, так что три шарика в любой момент времени будут находиться на одинаковом расстоянии от центра масс МС (т.О) и будут образовывать подобные геометрические фигуры.

Шарики МС на рис.19 также будут двигаться вдоль лучей, исходящих из центра (т.О). При этом исходная форма равностороннего треугольника этой МС будет сохраняться в любой момент времени, а изменяться будут только размеры треугольника (подобие треугольников сохраняется).

В обеих задачах при движении шариков из положения равновесия к центру пружины сжимаются, а при движении от центра пружины растягиваются. Но центры масс МС (т.О) на рис. 19, 20 остаются при любых движениях шариков неподвижными. Поэтому частоты колебаний МС будут равны частотам колебаний каждого отдельного шарика.

Итак, собственная круговая частота свободных незатухающих колебаний МС на рис. 20 будет равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.13)$$

Несколько сложнее дело обстоит с МС на рис. 19. Определим частоту этой МС, используя закон сохранения механической энергии. На рис. 21 представлена схема треугольной МС при её расширяющемся движении.

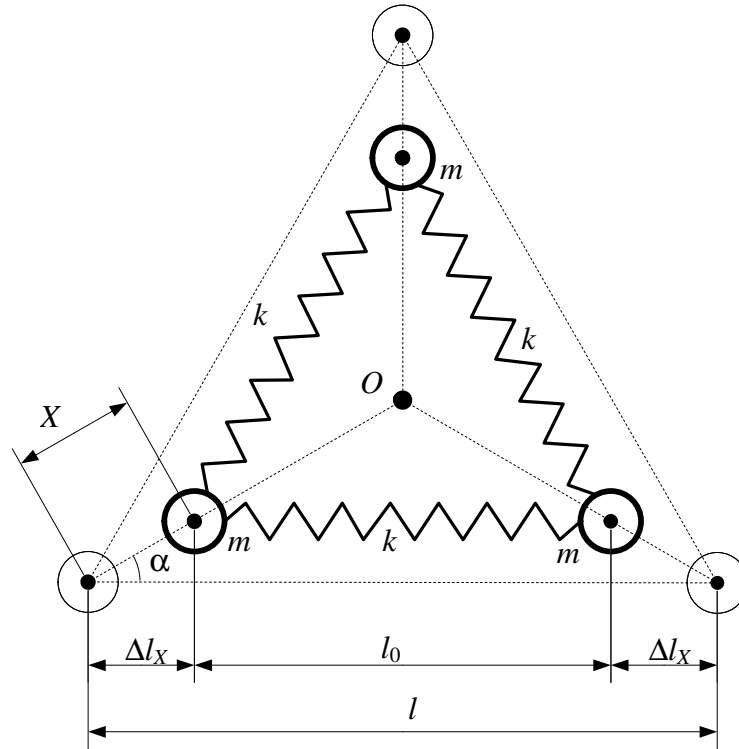


Рис.21

Обозначим через $\Delta l = l - l_0$ изменение длины каждой пружины, которое, согласно рис. 21, будет равно

$$\Delta l = 2\Delta l_x = 2x \cos \alpha \quad (3.14)$$

где x – это смещение шарика относительно его положения равновесия вдоль линии движения.

Поскольку каждый угол в равностороннем треугольнике равен 60° , то угол α на рис. 21 будет

равен $\alpha = 30^\circ$. А так как $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то поэтому вместо (3.14) следует написать

$$\Delta l = \sqrt{3} \cdot x \quad (3.15)$$

Полная механическая энергия всей МС в произвольный момент времени будет равна

$$E = 3 \frac{k\Delta l^2}{2} + 3 \frac{mv_x^2}{2} = \text{const} \quad (3.16)$$

После подстановки (3.15) в (3.16) получаем:

$$E = 9 \frac{kx^2}{2} + 3 \frac{mv_x^2}{2} = const. \quad (3.17)$$

Поскольку E , согласно (3.17), не зависит от времени, то поэтому производная от энергии по времени будет равна:

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (3.18)$$

Подставляя (3.17) в (3.18) приходим к уравнению следующего вида:

$$v_x \left(3kx + m \frac{dv_x}{dt} \right) = 0.$$

Так как в общем случае $v_x \neq 0$, то поэтому выражение, стоящее в скобках, должно быть равно нулю. А поскольку $v_x = \dot{x}$, то в итоге получаем дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}. \quad (3.20)$$

Итак, формула (3.20) определяет круговую частоту МС, изображённой на рис. 19, а также частоту колебаний каждого шарика этой МС. Интересно, что частота, определяемая по формуле (3.20), в $\sqrt{3}$ больше частоты, которая определяется формулой (3.13).

Аналогичным образом вычисляются собственные частоты незатухающих колебаний МС, изображённых на рис. 22 – 25. С этой целью необходимо, используя закон сохранения механической энергии, вывести дифференциальное уравнение для этих МС, аналогичное уравнению (3.19).

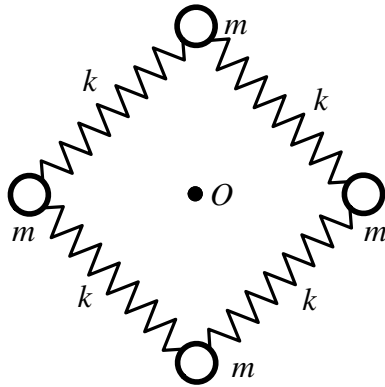


Рис.22

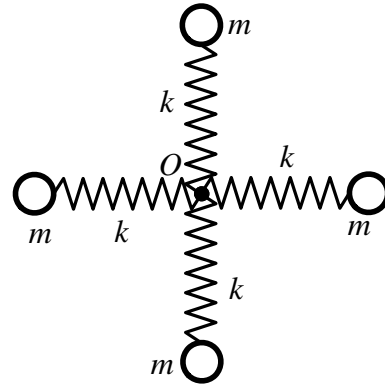


Рис.23

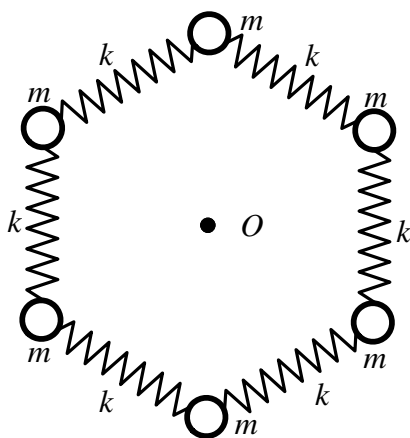


Рис.24

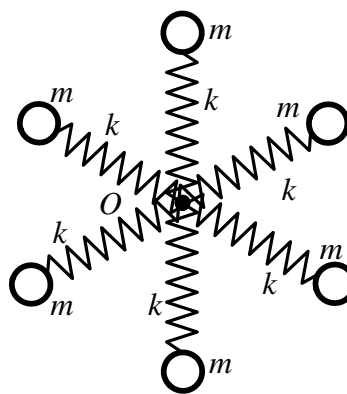


Рис.25

Общие условия задачи 3 для всех вариантов

Для конкретной колебательной системы (КС), представленной на соответствующем рисунке, необходимо:

1. Вывести дифференциальное уравнение малых свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению тела КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{v}$, где r - коэффициент сопротивления.
2. Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
3. Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
4. Вычислить логарифмический декремент затухания.
5. Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
6. Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.

Другие исходные данные и начальные условия задачи для каждого варианта задания приведены в табл. 8 – 15.

Общие исходные данные: $m^* = 0,1$ кг; $k^* = 10$ Н/м; $l^* = 0,1$ м; $r^* = 0,2$ кг/с; $u^* = 0,1$ м/с; $\rho^* = 103$ кг/м³; $S^* = 10^{-3}$ м²; $\varphi^* = \pi/6$.

Основные зависимости

Исходными уравнениями для вывода дифференциального уравнения колебаний могут быть, например, уравнение поступательного движения твердого тела, записанное в проекции на ось x , или уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения z . В первом случае уравнение имеет вид:

$$ma_x = \sum_i F_{ix},$$

где $a_x = \ddot{x}$ - проекция вектора ускорения тела на ось x ; F_{ix} - проекция вектора i -й силы, действующего на тело, на ось x .

Во втором случае уравнение выглядит так:

$$I_z \varepsilon_z = \sum_i M_{iz},$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси z ; $\varepsilon_z = \ddot{\alpha}$ - проекция углового ускорения на ось z ; α - угол поворота тела; M_{iz} - проекция вектора момента i -й силы на ось z .

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний запишется так:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\beta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания. Решение этого уравнения при условии, что $\omega_0 > \beta$, имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - круговая частота свободных затухающих колебаний.

Логарифмический декремент затухания вычисляется по формуле $\delta = \beta T$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Задача 3-1 для вариантов с 1 по 4

Для механических систем (МС), расположенных на горизонтальной плоскости и представленных на рис. 22 – 25, определить круговую частоту и период собственных незатухающих колебаний. Значения масс шариков, жёсткость соединяющих их пружин, а также другие исходные данные приведены в табл. 8. Трением шариков при их движении о контактную горизонтальную плоскость пренебречь.

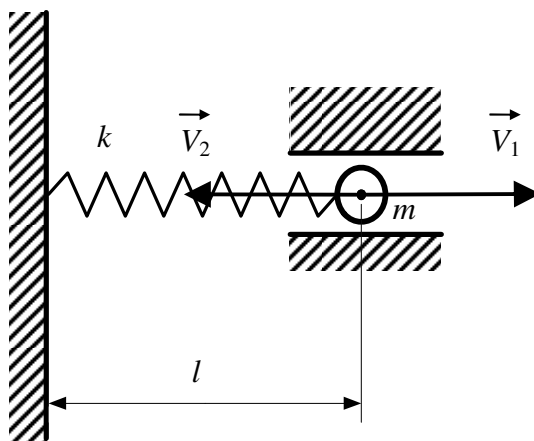


Рис. 26

Дополнительно (в соответствии с общими условиями задачи 3) рассчитать все требуемые величины и вывести уравнение затухающих колебаний горизонтального пружинного маятника (см. рис. 26), у которого масса шарика m , а длина и жёсткость пружины равны соответственно l_0 и k (см. табл. 8). В начальный момент времени шарик смещают так, что длина пружины становится равной l , а за тем кратковременным воздействием сообщают шарiku скорость $\vec{v}_1$ или $\vec{v}_2$. В результате система приходит в колебательное движение в горизонтальном направлении. Трением шарика о боковую поверхность пренебречь.

Таблица 8

№ Вар.	№ Рис.	m	k	l_0	l	r	V_1	V_2
1	22;23	$0,3m^*$	$1,5k^*$	$1,3l^*$	$1,5l^*$	$1,1r^*$	$0,5u^*$	0
2	24;25	$0,9m^*$	$1,1k^*$	$1,5l^*$	$1,2l^*$	$1,5r^*$	0	$0,4u^*$
3	22;23	$0,5m^*$	$1,7k^*$	$1,7l^*$	$1,5l^*$	$1,7r^*$	$0,7u^*$	0
4	24;25	$0,7m^*$	$1,3k^*$	$1,1l^*$	$1,4l^*$	$1,9r^*$	0	$0,6u^*$

Задача 3-2 для вариантов с 5 по 8

Механическая система для этой задачи расположена на горизонтальной плоскости и представлена на рис. 18. Значения массы шариков, длина и жёсткость, соединяющих их пружин, а также другие исходные данные приведены в табл.9.

Определить:

- положение центра масс МС;
- жёсткость левой и правой частей пружины, длины которых равны l_{10} и l_{20} ;

- приведённую массу $MС$;
- круговую частоту и период собственных незатухающих колебаний.

Трением шариков о контактную горизонтальную плоскость пренебречь.

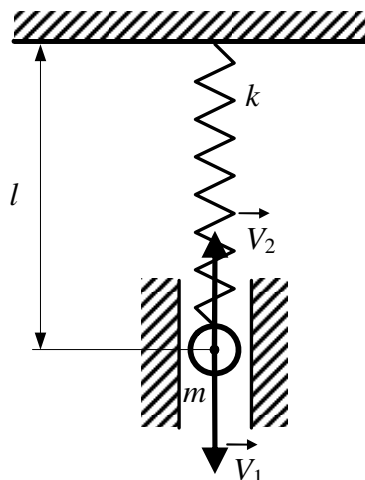


Рис. 27

Дополнительно (в соответствии с общими условиями задачи 3) рассчитать все требуемые величины и вывести уравнение затухающих колебаний вертикального пружинного маятника (см. рис. 27), у которого масса шарика равна $m=m_1$, а длина и жёсткость пружины равны соответственно l_0 и k (см. табл.9). В начальный момент времени шарик смещают так, что длина пружины становится равной l , а затем кратковременным воздействием сообщают скорость $\vec{v}_1$ или $\vec{v}_2$. В результате система приходит в колебательное движение в вертикальном направлении. Трением шарика о боковую поверхность пренебречь.

Таблица 9

№ Вар.	m_1	m_2	k	l_0	l	r	v_1	v_2
5	$0,4m^*$	$0,6m^*$	$1,2k^*$	l^*	$1,2l^*$	$2r^*$	$0,4u^*$	0
6	$0,2m^*$	$0,7m^*$	$1,5k^*$	$1,2l^*$	l^*	$1,4r^*$	0	$0,5u^*$
7	$0,8m^*$	$0,4m^*$	$1,6k^*$	$1,4l^*$	$1,6l^*$	$1,8r^*$	$0,6u^*$	0
8	$0,6m^*$	$0,5m^*$	$1,4k^*$	$1,6l^*$	$1,2l^*$	$1,6r^*$	0	$0,7u^*$

Задача 3-3 для вариантов с 9 по 20

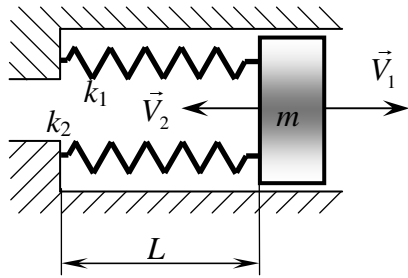


Рис. 28

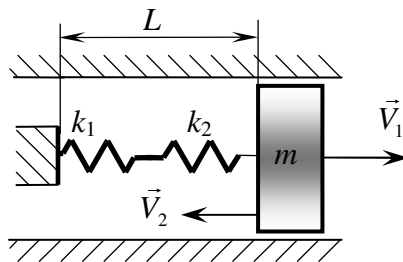


Рис. 29

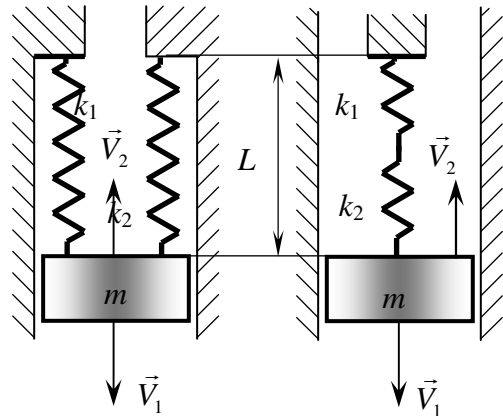


Рис. 30

Рис. 31

Каждая колебательная система (КС), представленная на рис. 28, 29, 30, 31, состоит из шайбы массой m и двух упругих пружин, имеющих жесткости k_1 и k_2 . Движение КС происходит в окружающей среде с малыми вязкими свойствами (малым коэффициентом сопротивления r). На рис. 28, 30 шайба колеблется под действием пружин, соединенных параллельно, а на рис. 29, 31 колебания происходят под действием пружин, соединенных последовательно. Массой пружин можно пренебречь. На рис. 28, 29 КС имеет горизонтальное расположение, а на рис. 30, 31 вертикальное расположение в поле силы тяжести. Длины 1-ой и 2-ой пружин в недеформированных состояниях равны l_{10} и l_{20} . На рис. 28, 30 L - длина каждой пружины в деформированном состоянии при $t=0$. На рис. 29, 31 L - общая длина двух пружин в деформированном состоянии при $t=0$. Возможные векторы начальной скорости шайбы равны $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$. Шайбу, находящуюся в положении равновесия, смещают до расстояния L , а затем импульсом придают ей в начальный момент времени $t=0$ скорость $\vec{V}_1$ или $\vec{V}_2$, в соответствии с заданием (см. таблицы № 10 - 13). В результате КС приходит в колебательное движение.

Таблица №10 (к рис. 28)

№ вар.	r	k_1	k_2	m	l_{10}	l_{20}	L	V_1	V_2
9	r^*	$1,6 k^*$	$1,4 k^*$	$1,4 m^*$	l^*	l^*	$0,9 l^*$	$0,4 U^*$	0
10	$2r^*$	$1,2 k^*$	k^*	$1,5 m^*$	$1,1 l^*$	$1,1 l^*$	$1,2 l^*$	$0,5 U^*$	0
11	$4r^*$	$1,6 k^*$	$1,4 k^*$	m^*	$1,2 l^*$	$1,2 l^*$	$1,1 l^*$	0	$0,3 U^*$

Таблица №11 (к рис. 29)

№ вар.	r	k_1	k_2	m	l_{10}	l_{20}	L	V_1	V_2
12	$3r^*$	$0,8 k^*$	k^*	m^*	l^*	l^*	$2,1l^*$	$0,4U^*$	0
13	$2r^*$	$1,6 k^*$	$1,4 k^*$	$0,8m^*$	l^*	l^*	$1,9l^*$	0	$0,2U^*$
14	$3r^*$	k^*	$1,2 k^*$	$1,4m^*$	$1,1l^*$	$1,1l^*$	$2,3l^*$	0	$0,3U^*$

Таблица №12 (к рис. 30)

№ вар.	r	k_1	k_2	m	l_{10}	l_{20}	L	V_1	V_2
15	$2r^*$	$1,6 k^*$	$1,4 k^*$	m^*	$1,6l^*$	$1,6l^*$	$1,5l^*$	U^*	0
16	$2r^*$	$1,2 k^*$	$1,4 k^*$	$1,4m^*$	$1,5l^*$	$1,5l^*$	$1,4l^*$	0	U^*
17	$3r^*$	$2k^*$	$1,8 k^*$	$0,8m^*$	l^*	l^*	$1,6l^*$	$0,8U^*$	0

Таблица №13 (к рис. 31)

№ вар.	r	k_1	k_2	m	l_{10}	l_{20}	L	V_1	V_2
18	r^*	$1,6k^*$	$1,4k^*$	$0,8m^*$	$3l^*$	$3l^*$	$5,8l^*$	U^*	0
19	$3r^*$	$1,2k^*$	k^*	$0,4m^*$	$2l^*$	$2l^*$	$4,8l^*$	$0,8U^*$	0
20	r^*	$1,8k^*$	$1,6k^*$	m^*	$4l^*$	$4l^*$	$7,8l^*$	0	U^*

Задача 3-4 для вариантов с 21 по 24

Колебательная система (КС), представленная на рис. 32, состоит из невесомой пробирки площадью поперечного сечения S , на дно которой насыпана свинцовая дробь массой m . Пробирка с дробью опущена в жидкость плотностью ρ и находится в ней в вертикальном положении.

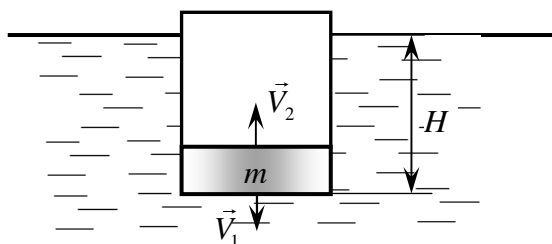


Рис. 32

Пробирку, находящуюся в положении равновесия на глубине H_0 , смещают на глубину H , а затем импульсом придают ей в начальный момент времени $t=0$ скорость $\vec{V}_1$ или $\vec{V}_2$, в соответствии с заданием (см. таблицу № 14). В результате КС приходит в колебательное движение в вертикальном направлении. Коэффициент сопротивления при движении пробирки в жидкости равен r .

Таблица №14

№ вар.	ρ	S	m	r	H	V_1	V_2
21	ρ^*	S^*	m^*	$5r^*$	$1,1l^*$	$0,2U^*$	0
22	ρ^*	$1,2S^*$	$2m^*$	$5r^*$	$1,9l^*$	0	$0,3U^*$
23	$0,9\rho^*$	$1,1S^*$	$1,5m^*$	$6r^*$	$1,6l^*$	$0,4U^*$	0
24	$0,9\rho^*$	S^*	m^*	$6r^*$	$1,2l^*$	0	$0,2U^*$

Задача 3-5 для вариантов с 25 по 28

На рис. 33 представлен физический маятник (ФМ), состоящий из двух шаров радиусами R_1 и R_2 , и массами соответственно m_1 и m_2 . Шары жёстко скреплены с помощью стержня длиной L и массой m_3 . Через т. О стержня проходит горизонтальная ось вращения ФМ, расположенная на расстоянии l_0 от верхнего конца стержня, так что ФМ может совершать вращательное движение в вертикальной плоскости. ФМ, находящийся в положении равновесия, отклоняют на угол α_0 (см. таблицу № 15), а затем в начальный момент времени $t=0$ отпускают. В результате ФМ начинает совершать свободные незатухающие колебания, т.е. в этой задаче коэффициент сопротивления считается равным нулю ($r = 0$).

Таблица №15

№ вар.	m_1	m_2	m_3	R_1	R_2	L	l_0	α_0
25	$8,8m^*$	$21m^*$	$32m^*$	$0,3l^*$	$0,4l^*$	$10l^*$	$3l^*$	$1/2\varphi^*$
26	$21m^*$	$41m^*$	$35m^*$	$0,4l^*$	$0,5l^*$	$12l^*$	$4l^*$	$1/3\varphi^*$
27	$8,8m^*$	$21m^*$	$28m^*$	$0,3l^*$	$0,4l^*$	$8l^*$	$2l^*$	$1/2\varphi^*$
28	$21m^*$	$41m^*$	$30m^*$	$0,4l^*$	$0,5l^*$	$9l^*$	$3l^*$	$1/3\varphi^*$

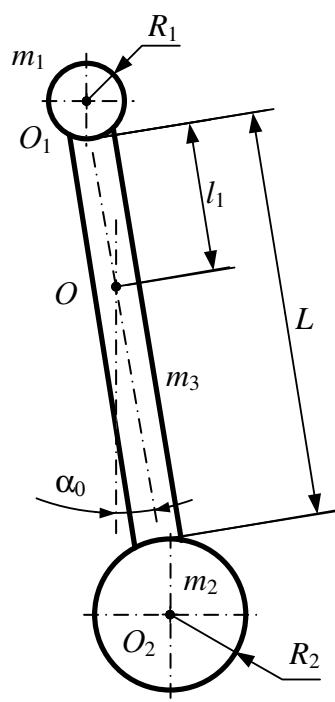


Рис. 33

Волны

Задача 4-1 для вариантов с 1 по 6

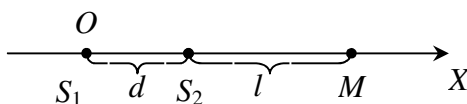


Рис. 34

В среде на расстоянии d друг от друга находятся одинаковые излучатели плоских продольных, акустических, монохроматических волн (S_1 и S_2 , рис.34). Оба излучателя колеблются по закону $\xi = A \cos(\omega t)$, где ξ - смещение излучателя из положения равновесия при колебаниях, A - амплитуда, ω - круговая частота при колебаниях излучателя.

Исходные данные для каждого варианта задания представлены в таблице № 16.

Таблица 16

№ вар.	Частота ν , кГц	Амплитуда A , мм	d , м	l , м	Среда	Скорость волны в среде c , м/с
1	1	0,8	1,36	30	воздух	340
2	2	0,6	0,68	20	воздух	340
3	1	0,5	0,34	10	воздух	340
4	10	0,3	0,9	30	вода	1500
5	20	0,2	0,6	20	вода	1500
6	10	0,1	0,3	10	вода	1500

Необходимо:

- вывести уравнение колебаний частиц среды в точке М, находящейся на расстоянии l от второго излучателя. Считать, что направления колебаний частиц среды в точке М совпадают с осью x ;
- определить отношение амплитуды смещений частиц среды к длине волны λ ;
- вывести уравнение колебаний скорости частиц среды в точке М. Найти амплитуду скорости частиц среды и её отношение к скорости распространения волны;
- вывести уравнение колебаний деформаций частиц среды в точке М. Найти связь амплитуды деформаций с амплитудой скорости частиц среды.

Основные зависимости

Уравнение плоской монохроматической косинусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси x , в общем случае имеет вид

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi),$$

где ξ - смещение частиц среды $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число; λ - длина волны, определяемая по

формулам $\lambda = \frac{c}{\nu}$ или $\lambda = c \cdot T$, здесь c - скорость волны в среде; круговая частота ω , период T и

частота колебаний ν связаны соотношениями $\omega = 2\pi\nu$, $T = \frac{1}{\nu}$; φ - начальная фаза волны.

Принцип суперпозиции (наложения) волн:

Результирующая волна, образующаяся при наложении двух волн ξ_1 и ξ_2 , определяется следующим образом:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2),$$

где индексы 1, 2 относятся соответственно к параметрам первой и второй волн.

В частном случае рассмотрим, как это происходит в задаче 4-1.

Если начало координат (т. О) совпадает с расположением источника колебаний S_1 , то от этого источника будет распространяться вдоль оси ОХ первая волна следующего вида:

$$\xi_1 = A \cos[\omega t - kx] \quad (4.1)$$

А от источника колебаний S_2 будет распространяться вдоль оси Ох вторая прямая волна:

$$\xi_2 = A \cos[\omega t - k(x - d)]. \quad (4.2)$$

В итоге результирующие колебания частиц среды в произвольной точке x оси ОХ будут происходить в соответствии с принципом суперпозиции волн:

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) \quad (4.3)$$

После подстановки (4.1) и (4.2) в (4.3) и последующих преобразований получаем:

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{kd}{2}\right) \cos\left(\omega t - kx + \frac{kd}{2}\right) \quad (4.4)$$

Скорость частиц среды определяется, как частная производная от смещения частиц (4.4) по времени:

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (4.5)$$

а деформация (относительное изменение длины частиц среды), как частная производная по координате,

$$\epsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Далее вместо произвольной координаты x подставляем в уравнения (4.4), (4.5), (4.6) координату т.М ($x=d+l$), т.е. тем самым определяем искомые величины ξ , V_x , ϵ_x в т. М.

Задача 4-2 для вариантов с 7 по 17

Для стержня длиной l , закреплённого, как указано на рис. 35 ÷ 40, необходимо:

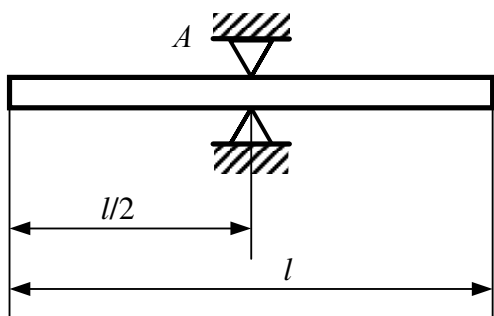


Рис. 35

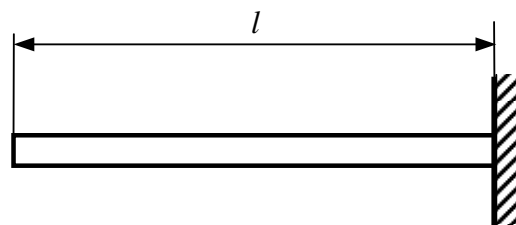


Рис. 36

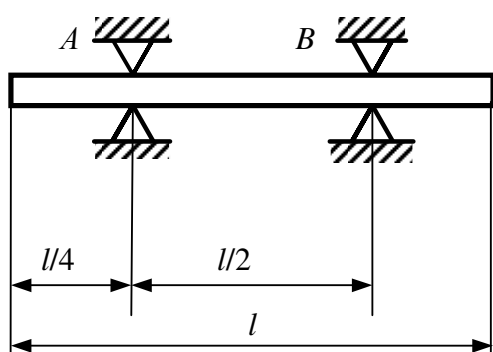


Рис. 37

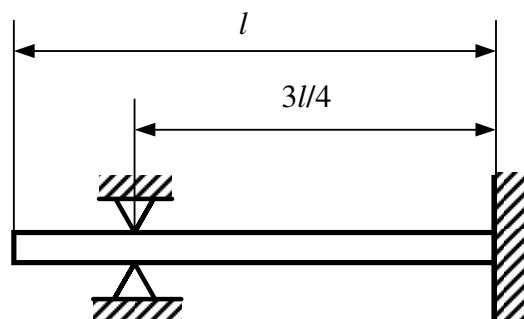


Рис. 38

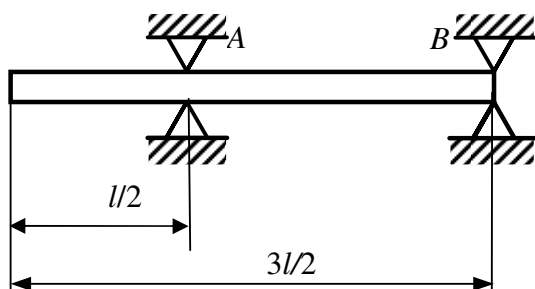


Рис. 39

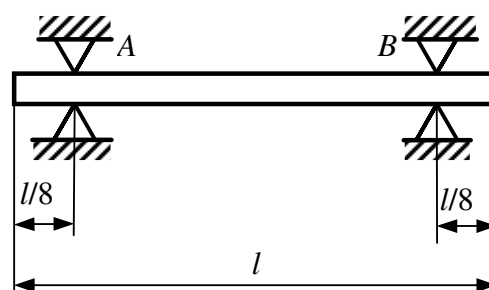


Рис. 40

- вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна;
- указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам);
- определить частоту и длину волны i -ой гармоники;
- для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественную картину:
 - а) стоячей волны амплитуд смещений;
 - б) стоячей волны амплитуд деформаций.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в таблице № 17.

Таблица 17

№ вар.	Вид крепления	Материал	Плотность $\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$	Модуль Юнга $E, 10^{10} \text{ Па}$	Длина $l, \text{ м.}$	Определить i -ю гармонику
7	Рис 35.	Сталь	7,8	20	0,8	3
8	Рис 36.	Латунь	8,5	12	1	2
9	Рис 37.	Алюминий	2,7	7	1,2	1
10	Рис 38.	Стекло	2,5	6	1	1
11	Рис 39.	Титан	4,5	11	0,8	1
12	Рис 35.	Медь	8,9	12	1,2	2
13	Рис 36.	Сталь	7,8	20	0,8	3
14	Рис 37.	Латунь	8,5	12	1	2
15	Рис 38.	Алюминий	2,7	7	1,2	2
16	Рис 39.	Стекло	2,5	6	1	2
17	Рис. 40	Сталь	7,8	20	1,6	2

Теория стоячих волн

Если на левом торце стержня длиной l (см. рис. 35) будет действовать источник гармонических колебаний

$$\xi(t) = A \cos \omega t ,$$

то вдоль стержня слева направо будет распространяться прямая волна

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (4.7)$$

где A - амплитуда волны, $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, ω - циклическая частота колебаний, λ

- длина волны.

При отражении прямой волны (4.7) от свободного противоположного правого торца стержня длиной l по стержню будет распространяться обратная отражённая волна

$$\xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx - 2kl) \quad (4.8)$$

При наложении прямой (4.7) и обратной (4.8) волн в стержне образуется стоячая волна

$$\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t) = 2A \cos(kl - kx) \cos(\omega t - kl).$$

Амплитуда стоячей волны будет равна

$$A_{cm} = 2A \cos(kl - kx). \quad (4.9)$$

При $x=l$ из (4.9) следует, что $A_{cm}=2A$. Это означает, что на конце стержня всегда будет пучность смещений частиц стержня. Чтобы на переднем торце стержня, откуда по стержню распростра-

няется возмущение, (при $x=0$) была также пучность, необходимо чтобы в (4.9) $\cos kl = 1$. А это возможно при выполнении условия, что

$$kl = \pi n,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – целочисленный ряд значений или с учётом того, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, после преобразований получаем

$$l = \frac{\lambda}{2} n. \quad (4.10)$$

Формула (4.10) показывает, что при образовании в стержне стоячей волны, на его длине l должно укладываться целое число полуволин.

Величина $\frac{\lambda}{2}$ в формуле (4.10) определяет длину стоячей волны $\lambda_{cm} = \frac{\lambda}{2}$. Из формулы (4.10)

можно также определить частоты ν_n , при которых в стержне образуется стоячая волна.

Поскольку

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (4.11)$$

где ν - частота колебаний, связанная с циклической частотой соотношением $\omega = 2\pi\nu$, а скорость упругой волны c определяется по формуле $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, то при подстановке (4.11) в (4.10) находим возможные частоты, при которых в стержне может образоваться стоячая волна,

$$\nu_n = \frac{c}{2l} n. \quad (4.12)$$

При $n=1$ из (4.12) определяем основную частоту (основной тон) $\nu = \frac{c}{2l}$, а при $n = 2, 3, 4$ находим обертоны.

Из формулы (4.9) при условии равенства $\cos(kl - kx) = 0$, находим координаты узлов стоячей волны

$$kl - kx = \frac{\pi}{2} (2m + 1),$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Отсюда при условии, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, находим

$$x_m = l - \frac{\lambda}{4} (2m + 1). \quad (4.13)$$

Подставляя в (4.13) целочисленный ряд значений находим координаты узлов:

$$\text{при } m=0 \quad x_0 = l - \frac{\lambda}{4},$$

$$\text{при } m=1 \quad x_1 = l - \frac{3}{4}\lambda,$$

$$\text{при } m=2 \quad x_2 = l - \frac{5}{4}\lambda.$$

Эти координаты для различных стоячих волн указаны на рис. 41 а, б. В данной задаче стержень закреплён посередине. Следовательно, в центре стержня всегда будет узел стоячей волны. На рис. 41 а схематично изображена стоячая волна при $n=1$ и $m=0$, а на рис. 41 б при $n=3$ и $m=0, 1, 2$. При $n=2$ в рассматриваемом стержне стоячая волна не образуется. В точке с координатой $x=0$ узла не должно быть из физических представлений, так как с этого места в стержень передаётся возмущение от внешнего источника.

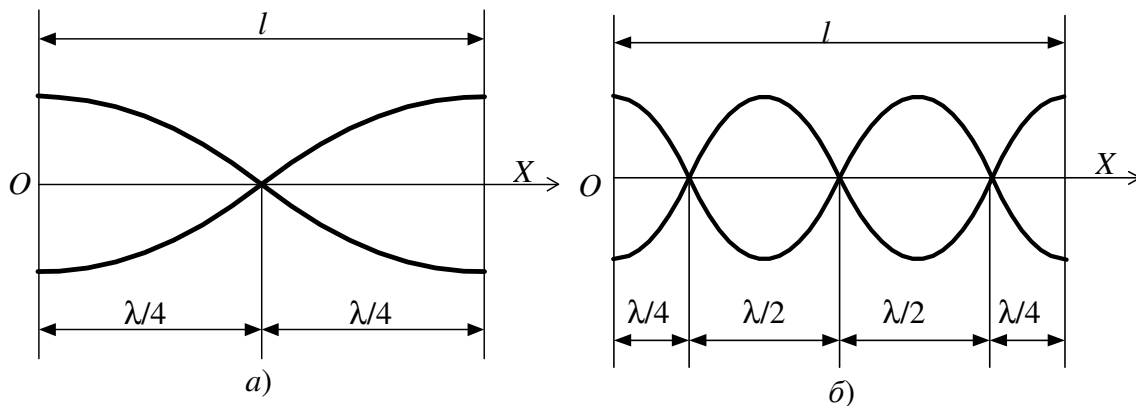


Рис. 41

Если второй торец стержня имеет жёсткую заделку (рис. 36), то тогда фаза отражённой волны от этой заделки будет смещена на величину π

$$\xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi)$$

а прямая волна остаётся без изменений

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

При наложении прямой и обратной волн получаем стоячую волну:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi) = 2A \cos\left(kl - kx - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - kl - \frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$\xi(x, t) = 2A \sin(kl - kx) \sin(\omega t - kl)$$

где амплитуда стоячей волны имеет вид:

$$A_{cm} = 2A \sin(kl - kx) \quad (4.14)$$

В итоге уравнение стоячей волны запишется так:

$$\xi(x, t) = A_{cm} \sin(\omega t - kl)$$

Согласно (4.14) амплитуда стоячей волны при $x=l$ будет равна нулю ($A_{cm}=0$). Отсюда следует, что на заднем торце стержня, где имеется жёсткая заделка всегда будет узел стоячей волны. При $x=0$ из (4.14) получаем:

$$A_{cm} = 2A \sin kl \quad (4.15)$$

Поскольку на переднем торце стержня, откуда от источника колебаний распространяются возмущения, должна быть пучность, то поэтому из (4.15) следует, что $\sin kl = 1$. И тогда в этом случае находим:

$$kl = \pi n - \frac{\pi}{2}, \quad (4.16)$$

где n принимает целочисленный ряд значений $n=1, 2, 3, \dots$. Поскольку волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то тогда из (4.16) следует, что

$$l = \frac{\lambda}{2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \quad (4.17)$$

Например, при $n=1$ из (4.17) получаем: $l = \frac{\lambda}{4}$, (см. рис. 42 а), а при $n=2$ $l = \frac{3}{4}\lambda$, (см. рис. 42 б).

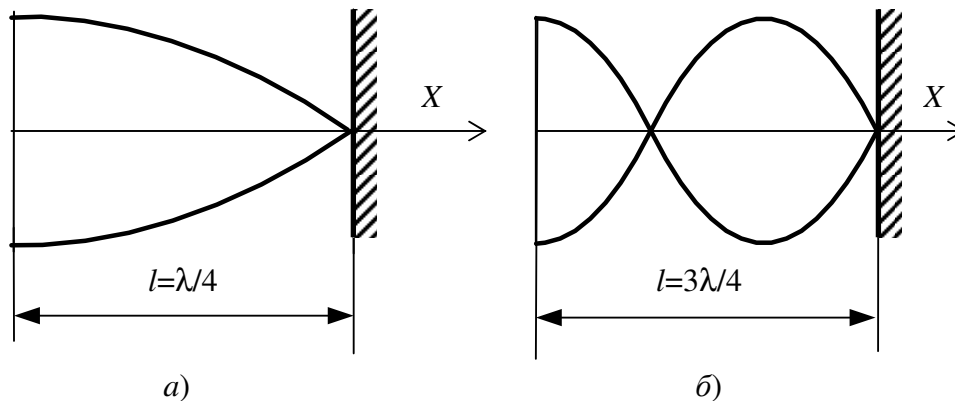


Рис. 42

Поскольку $\lambda = \frac{c}{\nu}$, то, подставляя это соотношение в (4.17), находим спектр резонансных частот, при которых в данном стержне будет образовываться стоячая волна

$$\nu_n = \frac{c}{2l} \left(n - \frac{1}{2} \right).$$

При $n=1$ получаем основную частоту $\nu_1 = \frac{c}{4l}$, а при $n=2, 3, 4, \dots$ определяем обертоны.

В тех местах стержня, где имеется одно или два крепления, как, например, в местах А на рис. 35, 38 или в местах А и В на рис. 37, 39, 40 считается, что в этих местах нет продольных смещений частиц стержня, т.е. в этих местах будет узел стоячей волны.

Задача 4-3 для вариантов с 18 по 22

Для прямого вертикального волновода (трубы) длиной l , расположенного в среде (воздухе или воде), как указано на соответствующем рисунке, необходимо:

- вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в волноводе, при которых в нём образуется стоячая волна;
- указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам);
- определить частоту и длину волны i -ой гармоники;
- для этой гармоники нарисовать вдоль волновода качественную картину:
 - а) стоячей волны амплитуд смещений;
 - б) стоячей волны амплитуд давлений.

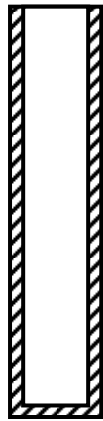


Рис. 43

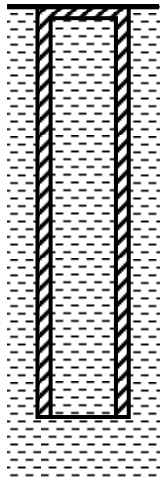


Рис. 44

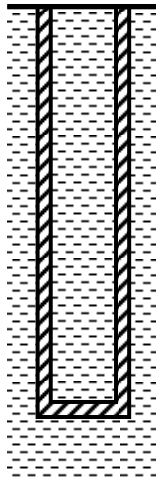


Рис. 45

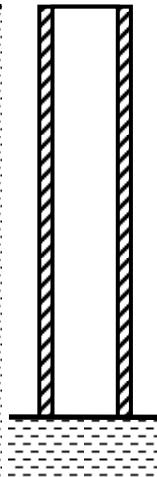


Рис. 46

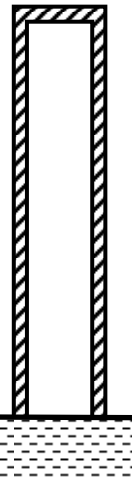


Рис. 47

При этом необходимо учитывать то обстоятельство, что в том месте, где расположен узел стоячей волны смещений, то в этом месте будет пучность стоячей волны давлений и наоборот.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в таблице № 18.

Скорость звука в воде $c_1 = 1500$ м/с, а в воздухе $c_2 = 340$ м/с.

Таблица 18

№ вар.	Схема волновода	Среда		Длина волновода l , м	Определить i -ю гармонику
		Внутри	Снаружи		
18	Рис. 43	воздух	воздух	1,02	1
19	Рис. 44	вода	вода	1,5	4
20	Рис. 45	вода	вода	0,9	2
21	Рис. 46	воздух	воздух	2,04	2
22	Рис. 47	воздух	воздух	3,4	4

Дополнительные пояснения.

На рис. 46 волновод открыт с обоих концов. На рис. 43, 44, 45, 47 волновод на одном конце имеет жёсткую пластину, а другой его конец свободен. На рис. 46, 47 - открытый нижний конец волновода совпадает с границей раздела сред (воздух-вода), а другой конец волновода открыт и находится полностью в воздухе (рис. 46), либо закрыт жёсткой пластиной (рис. 47).

Задачи №4-2 и №4-3, которые относятся к стержням и волноводам, необходимо выполнять в следующей последовательности: сначала прорисовать возможные стоячие волны на длине стержня (волновода) при различных длинах волн так, чтобы на длине стержня (волновода) укладывалось, в соответствии с граничными условиями, требуемое число полувольт и четвертей волн. Начинать прорисовывать стоячие волны необходимо для больших длин волн, а затем для меньших длин волн. Далее, внимательно рассматривая получившиеся рисунки, постараться установить общую закономерность возникновения стоячих волн при разных длинах волн, так что в итоге получить общую формулу, связывающую длину стержня (волновода) и число полувольт, и четвертей волн, укладывающихся на его длине.

Как это необходимо делать рассмотрим на примере образования стоячей волны внутри замкнутого волновода, заполненного воздухом, с жёсткими торцами, но верхний торец выполнен в виде заглушки на резьбовом соединении, а в центре волновода расположен источник колебаний. Сначала прорисуем возможные стоячие волны в рассматриваемом волноводе (рис. 48).

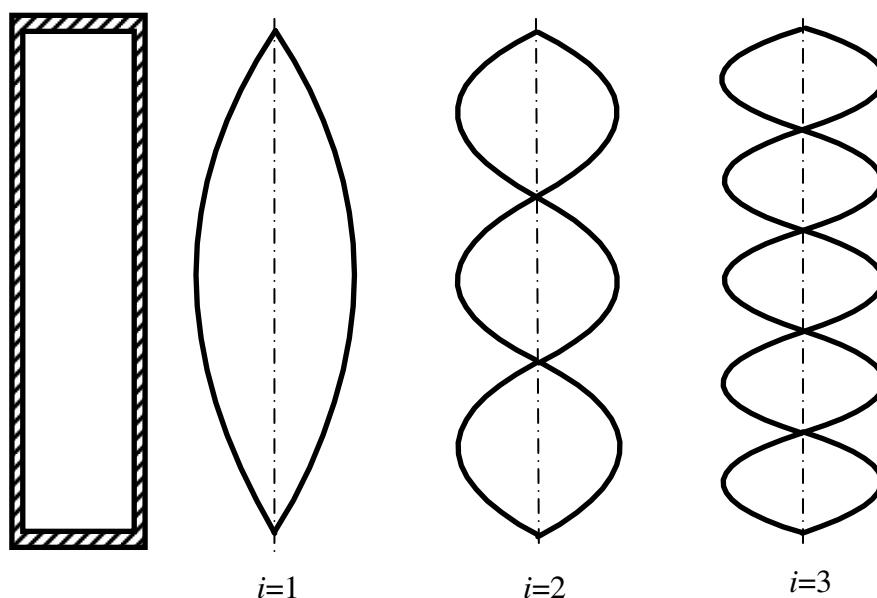


Рис. 48

Рассматривая получившиеся рисунки, можно подобрать формулу, которая определяет число полувольт на длине l волновода.

Например: при $i=1$ $l=\lambda/2$, при $i=2$ $l=3\lambda/2$, при $i=3$ $l=5\lambda/2$.

Следовательно, общая формула, связывающая l и λ при любом целочисленном значении $i=1, 2, 3, 4, \dots$ будет иметь вид

$$l = (2i - 1) \lambda / 2. \quad (4.18)$$

Согласно (4.18) и известному соотношению $\lambda = c/v$, находим значения резонансных частот, при которых в волноводе образуется стоячая волна

$$v_i = (2i - 1) c / 2l. \quad (4.19)$$

Итак, при $i=1$ из (4.19) получаем основную частоту $v_1 = c/2l$, а при $i=2, 3, 4, \dots$ получаем частоты $v_2, v_3, v_4, \dots$, которые будут соответствовать обертонам.

Задача 4-4 для вариантов с 23 по 28

Для струны длиной l , натянутой с силой $\vec{F}$ и закреплённой, как указано на рис.49, необходимо:

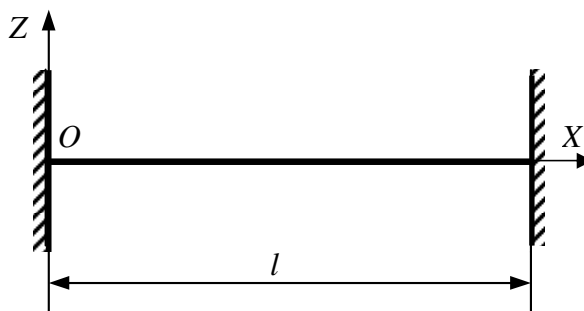


Рис. 49

- определить частоту колебаний и длину волны i -ой гармоники стоячей волны;
- для этой гармоники нарисовать вдоль струны качественную картину:
 - а) стоячей волны амплитуд смещений точек струны;
 - б) распределения скоростей точек струны для момента времени $t = 0,25T$, где T - период колебания струны для i -ой гармоники.

Исходные данные для каждого варианта задачи представлены в таблице № 19

Таблица 19

№ вар.	Характеристики струны				Сила натяжения F , Н	Определить i -ю гармонику
	Длина l , м	диаметр d , мм	материал струны	Плотность ρ , 10^3 кг/м ³		
23	0,6	0,4	медь	8,9	1	3
24	0,9	0,5	медь	8,9	3	4

№ вар.	Характеристики струны				Сила натяжения F , Н	Определить i -ю гармонику
	Длина l , м	диаметр d , мм	материал струны	Плотность ρ , 10^3 кг/м ³		
25	1,0	0,6	медь	8,9	4	5
26	1,2	0,3	сталь	7,8	5	4
27	0,8	0,2	сталь	7,8	6	3
28	0,7	0,1	сталь	7,8	2	2

Дополнительные пояснения. Скорость волны в струне (скорость распространения поперечных смещений) рассчитывается по формуле $a = \sqrt{\frac{F}{\tau}}$, где $\tau = \frac{m}{l}$ - линейная плотность материала струны, а m - масса струны. Волновое уравнение, описывающее распространение вдоль струны поперечной волны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

где z - смещение точек струны относительно положения равновесия в поперечном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Савельев И. В. Курс общей физики: В 5 Т. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1998. - 336 с.
- 2) Савельев И. В. Курс общей физики: В 5 Т. Т. 4. Волны. Оптика. М.: Наука, 1998. - 256 с
- 3) Сивухин Д. В. Общий курс физики: В 5 Т. Т.1. Механика. М.: Физматлит, 2005. - 560 с.
- 4) Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. - М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. - 432 с..
- 5) Иродов И. Е. Механика. Основные законы.. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. - 312 с.